Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2019/2020
10 Giugno 2020 - Primo Appello

Il tempo per la prova è di 2 ore.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo di coordinate (x, y, z) rispetto al riferimento ortonormale standard $O\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$. Si considerino in $\mathbb{E}^3$ i seguenti sottospazi:

$$\pi : x + y - z = 0 \qquad s : \begin{cases} x + z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad r : \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

(i) Si trovino, se esistono, le coordinate del punto $A \in r$ tali che $d(A, \pi) = 3\sqrt{3}$ e $d(A, s) = \sqrt{14}$.

Sia definita la retta

$$t_k : \begin{cases} (k^2 - 1)x + (k - 1)y - 2z = k + 2 \\ 2x + ky + 4z = k^2 \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Si studi la posizione reciproca delle rette t_k ed r al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(iii) Si fissi $k = -2$ e sia B il punto d'intersezione tra t_{-2} e r. Si trovino le possibili coordinate, se esistono, del punto $C \in t_{-2}$ tali per cui il triangolo ABC ha area uguale a $\frac{9}{4}\sqrt{6}$.

Soluzione dell'Esercizio 1. (i) Le equazioni parametriche della retta r sono

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 \\ z = -t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Quindi A avrà la forma del tipo $A = (1 + 2t, -1, -t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Per calcolare la distanza dal piano π, possiamo utilizzare la formula della distanza punto-piano e imporre che

$$3\sqrt{3} = d(A, \pi) = \frac{|1 \cdot (1 + 2t) + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-t)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|3t|}{\sqrt{3}}.$$

Quindi $|t| = 3$.

Per trovare invece la distanza tra A e s, consideriamo il piano τ perpendicolare a s e passante per A: dato che $\mathrm{Giac}(s) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$, il piano τ avrà giacitura ortogonale ad esso, cioè $\mathrm{Giac}(\tau) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ e quindi le equazioni di τ saranno:

$$\tau : \begin{cases} x = 1 + 2t + u \\ y = -1 + v \\ z = -t + u + v, \end{cases} \qquad u, v \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \tau : x + y - z = 3t$$

Se calcoliamo $P = s \cap \tau$, allora per definizione $d(A, s) = d(A, P)$. Per trovare P, consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 3t \\ x + z = 3 \\ x - y = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = y \\ z = 3 - x \\ x + x - 3 + x = 3t \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = 2 - t \end{cases},$$

quindi $P = (t + 1, t + 1, 2 - t)$ e

$$\begin{aligned} \sqrt{14} = d(A, P) &= \sqrt{(1 + 2t - t - 1)^2 + (-1 - t - 1)^2 + (-t - 2 + t)^2} \\ &= \sqrt{t^2 + t^2 + 4 + 4t + 4} = \sqrt{2t^2 + 4t + 8} = \sqrt{2}\sqrt{t^2 + 2t + 4}, \end{aligned}$$

quindi per trovare il valore corretto di t, imponiamo che le due equazioni che abbiamo trovato valgano contemporaneamente:

$$\begin{cases} |t| = 3 \\ t^2 + 2t + 4 = 7 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} t = \pm 3 \\ (t + 3)(t - 1) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow t = -3$$

e allora $\boxed{A = (-5, -1, 3)}$ è l'unico punto che soddisfa le distanze richieste.

(ii) Per studiare la posizione di r e t_k, calcoliamo innanzitutto le loro intersezioni sostituendo le equazioni parametriche di r all'interno di quelle di t_k:

$$\begin{cases} (k^2 - 1)(1 + 2t) + (k - 1)(-1) - 2(-t) = k + 2 \\ 2(1 + 2t) + k(-1) + 4(-t) = k^2 \end{cases} \rightsquigarrow$$
$$\rightsquigarrow \begin{cases} 2k^2 t = -k^2 + 2k + 2 \\ k^2 + k - 2 = 0. \end{cases}$$

Notiamo che la seconda equazione ha soluzioni solo se $k = -2 \vee k = 1$. Se $k = 1$, abbiamo che la prima equazione diventa

$$2t = -1 + 2 + 2 = 3 \rightsquigarrow t = \frac{3}{2},$$

quindi $\boxed{\text{per } k = 1,\ r \text{ e } t_1 \text{ sono incidenti nel punto } (4, -1, -\frac{3}{2}).}$
Invece se $k = -2$, la prima equazione è

$$8t = -4 - 4 + 2 = -6 \rightsquigarrow t = -\frac{3}{4},$$

quindi $\boxed{\text{per } k = -2,\ r \text{ e } t_{-2} \text{ sono incidenti nel punto } (-\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{4}).}$ In tutti gli altri casi t_k e r non hanno alcuna intersezione, quindi o sono sghembe oppure sono parallele. Per distinguere questi due casi, verifichiamo quando il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, che genera la giacitura di r, genera anche la giacitura di t_k, verificando quando è soluzione del sistema omogeneo associato alle equazioni cartesiane di t_k:

$$\begin{cases} 2(k^2 - 1) + 2 = 0 \\ 4 - 4 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow k^2 - 1 = -1 \rightsquigarrow k^2 = 0.$$

Quindi $\boxed{\text{per } k = 0, \text{ abbiamo che } r \text{ e } t_0 \text{ sono parallele}}$. Possiamo quindi riassumere tutte le posizioni reciproche delle rette nel seguente specchietto:

$$\boxed{r \text{ e } t_k \text{ sono } \begin{cases} \text{incidenti in } (4, -1, -\frac{3}{2}) & \text{se } k = 1, \\ \text{incidenti in } (-\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{4}) & \text{se } k = -2, \\ \text{parallele} & \text{se } k = 0, \\ \text{sghembe} & \text{altrimenti.} \end{cases}}$$

(iii) Abbiamo già calcolato che $B = (-\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{4})$. Le equazioni della retta t_{-2} sono:

$$t_{-2} : \begin{cases} 3x - 3y - 2z = 0 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = t \\ z = \frac{3}{4}, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

quindi il punto C sarà del tipo $C = (\frac{1}{2} + t, t, \frac{3}{4})$. Consideriamo adesso la retta r e calcoliamo la distanza $d(C, r) = h$, che consideriamo come altezza del triangolo ABC di base $\overline{AB}$. Analogamente a prima, calcoliamo il piano ρ perpendicolare a r e passante per C. La giacitura di ρ è quindi

$$\mathrm{Giac}(\rho) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle^{\perp} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

e quindi ρ ha coordinate:

$$\rho : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + t + v \\ y = t + u \\ z = \frac{3}{4} + 2v, \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \rho : 8x - 4z = 8t + 1.$$

Troviamo quindi $T = \rho \cap r$:

$$\begin{cases} 8x - 4z = 8t + 1 \\ x + 2z = 1 \\ y = -1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 - 2z \\ 8 - 16z - 4z = 8t + 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y = -1 \\ z = \frac{7-8t}{20} \\ x = \frac{3+8t}{10}. \end{cases}$$

Quindi $T = \left(\frac{3+8t}{10}, -1, \frac{7-8t}{20}\right)$ e l'altezza $h = \overline{CT} = d(C, r)$ è

$$\begin{aligned}
\overline{CT} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} + t - \frac{3+8t}{10}\right)^2 + (t+1)^2 + \left(\frac{3}{4} - \frac{7-8t}{20}\right)^2} = \\
&= \sqrt{\left(\frac{20t + 10 - 6 - 16t}{20}\right)^2 + (t+1)^2 + \left(\frac{15 - 7 + 8t}{20}\right)^2} = \\
&= \sqrt{\left(\frac{t+1}{5}\right)^2 + (t+1)^2 + 4\left(\frac{t+1}{5}\right)^2} = \\
&= |t+1|\sqrt{\frac{1}{25} + 1 + \frac{4}{25}} = |t+1|\sqrt{\frac{6}{5}}.
\end{aligned}$$

Invece la lunghezza della base del triangolo ABC è data da

$$b = \overline{AB} = \sqrt{\left(-5 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{81}{16}} = \frac{9}{4}\sqrt{5}.$$

Quindi l'area del triangolo è

$$\frac{9}{4}\sqrt{6} = \frac{b \cdot h}{2} = |t+1|\sqrt{\frac{6}{5}} \cdot \frac{9}{8}\sqrt{5} \rightsquigarrow |t+1| = 2 \rightsquigarrow t = -3 \vee t = 1,$$

da cui abbiamo che i possibili valori di C sono

$$\boxed{C = \left(-\frac{5}{2}, -3, \frac{3}{4}\right) \ \vee \ C = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{4}\right).}$$

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ il piano affine reale di coordinate (x, y) e siano definite le coniche

$$\mathcal{C}_k : x^2 - ky^2 + 2xy - 2kx - 2ky + k^2 - k - 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad \mathcal{D}_h : x^2 - \frac{1}{2}y^2 + 2hx = 0$$

al variare di $k, h \in \mathbb{R}$.

(i) Si classifichino entrambe le coniche in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ al variare di $k, h \in \mathbb{R}$. Per quali valori di h e k, $\mathcal{C}_k$ e $\mathcal{D}_h$ sono affinemente equivalenti?

(ii) Sia $k = 2$. Si trovi un'affinità $\psi : \mathbb{A}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ per cui $\psi(\mathcal{C}_2)$ è in forma canonica.

Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ il piano proiettivo reale di coordinate $[x_0, x_1, x_2]$ e sia

$$\begin{aligned} j_0 : \mathbb{A}^2 &\to \mathbb{P}^2 \setminus \{x_0 = 0\} \\ (x, y) &\mapsto [1, x, y] \end{aligned}$$

la funzione di proiettivizzazione rispetto x_0.

(iii) Sia $k = 1$. Dopo aver verificato che $\mathcal{C}_1$ è un'iperbole, si calcolino i punti all'infinito di $j_0(\mathcal{C}_1)$ e si trovino le equazioni cartesiane degli asintoti di $\mathcal{C}_1$.

Soluzione dell'Esercizio 2. (i) Iniziamo a classificare la conica $\mathcal{D}_h$: se consideriamo le matrici

$$A'_h = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B'_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

esse rappresentano rispettivamente la matrice associata alla conica e quella associata ai termini quadratici. In particolare, sviluppando secondo l'ultima riga, si ottiene che $\det(A'_h) = \frac{1}{2}h^2$, mentre $\det(B'_h) = -\frac{1}{2} < 0$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Risulta quindi che se $h = 0$, $r(A'_h) = 2$, allora possiamo classificare totalmente la conica nei seguenti casi:

$$\boxed{\mathcal{D}_h \text{ è } \begin{cases} \text{iperbole} & \text{se } h \neq 0 \\ \text{iperbole degenere} & \text{se } h = 0. \end{cases}}$$

Passiamo adesso alla classificazione di $\mathcal{C}_k$: in questo caso le due matrici rappresentative sono

$$A_k = \begin{pmatrix} k^2 - k - 1 & -k & -k \\ -k & 1 & 1 \\ -k & 1 & -k \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di A_k sviluppando secondo l'ultima riga:

$$\begin{aligned} \det(A_k) &= -k(-k + k) - (k^2 - k - 1 - k^2) - k(k^2 - k - 1 - k^2) = \\ &= k + 1 + k(k + 1) = (k + 1)^2, \end{aligned}$$

mentre $\det(B_k) = -k - 1 = -(k + 1)$. Se $k = -1$, abbiamo che

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha chiaramente rango 1 e quindi $\mathcal{C}_{-1}$ è una conica doppiamente degenere. Il segno del determinante di B_k è invece il seguente

$$\det(B_k) \begin{cases} > 0 & \text{se } k < -1 \\ = 0 & \text{se } k = -1 \\ < 0 & \text{se } k > -1. \end{cases}$$

Notiamo che se $k < -1$, allora la segnatura di B_k è $(2,0)$, mentre la segnatura di A_k è $(3,0)$ (utlizzando il criterio dei minori principali) quindi la classificazione di $\mathcal{C}_k$ è la seguente:

$$\boxed{\mathcal{C}_k \text{ è } \begin{cases} \text{conica doppiamente degenere} & \text{se } k = -1 \\ \text{iperbole} & \text{se } k > -1 \\ \text{ellisse a punti non reali} & \text{se } k < -1. \end{cases}}$$

Allora $\boxed{\mathcal{C}_k \text{ e } \mathcal{D}_h \text{ sono affinemente equivalenti se e solo se } k > -1 \wedge h \neq 0.}$

(ii) Se $k = 2$, allora

$$\mathcal{C}_2 : x^2 - 2y^2 + 2xy - 4x - 4y + 1 = 0.$$

Dal punto precedente, sappiamo che la sua forma canonica è

$$x^2 - y^2 - 1 = 0.$$

Per trovare un'affinità che la porta in tale forma, utilizziamo il metodo di completamento dei quadrati:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 :& x^2 - 2y^2 + 2xy - 4x - 4y + 1 + y^2 - y^2 = 0 \\ & x^2 - 3y^2 + 2xy - 4x - 4y + 1 + y^2 = 0 \\ & (x+y)^2 - 3y^2 - 4(x+y) + 1 = 0 \end{aligned}$$

Quindi operando l'affinità

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = x' - y' \\ y = y', \end{cases}$$

otteniamo che $\mathcal{C}_2$ è affinemente equivalente a

$$\mathcal{C}_2' : (x')^2 - 3(y')^2 - 4x' + 1 = 0.$$

Il centro di $\mathcal{C}_2'$ è il punto $(\frac{4}{2}, 0) = (2,0)$, quindi operando la traslazione che porta il centro nell'origine

$$\begin{cases} x'' = x' - 2 \\ y'' = y' \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x' = x'' + 2 \\ y' = y'', \end{cases}$$

otteniamo

$$\mathcal{C}_2'' : (x'')^2 - 3(y'')^2 - 3 = 0.$$

Per normalizzare i coefficienti è quindi sufficiente applicare l'omotetia

$$\begin{cases} x''' = \frac{x''}{\sqrt{3}} \\ y''' = y'' \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x'' = \sqrt{3}x''' \\ y'' = y''', \end{cases}$$

che porta $\mathcal{C}_2''$ in
$$\mathcal{C}_2''' : (x''')^2 - (y''')^2 - 1 = 0.$$
Quindi l'affinità ψ è data dalla composizione di queste affinità:
$$\begin{cases} x = x' - y' = x'' - y'' + 2 = \sqrt{3}x''' - y''' + 2 \\ y = y' = y'' = y''' \end{cases}$$
cioè
$$\boxed{\psi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

(iii) Nel primo punto dell'esercizio abbiamo già notato che per $k = 1$, la conica rappresenta un'iperbole.
Applicando la funzione j_0 all'equazione della conica $\mathcal{C}_1$, otteniamo (chiamando $\overline{\mathcal{C}}_1 = j_0(\mathcal{C}_1)$):
$$\overline{\mathcal{C}}_1 : F(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 - x_0^2 + 2x_1x_2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0.$$
Per studiarne i punti all'infinito è sufficiente calcolare l'intersezione dell'equazione di $\overline{\mathcal{C}}_1$ con la retta $x_0 = 0$. Si tratta quindi di studiare le soluzioni del sistema:
$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 = 0 \end{cases}$$
La seconda equazione può essere risolta per x_2 ottenendo,
$$x_2 = x_1 \pm \sqrt{x_1^2 + x_1^2} = x_1 \pm x_1\sqrt{2} = (1 \pm \sqrt{2})x_1.$$
Otteniamo quindi due punti all'infinito
$$\boxed{P_1 = [0, 1, 1 + \sqrt{2}], \qquad P_2 = [0, 1, 1 - \sqrt{2}].}$$
Per trovare gli asintoti, sapendo che essi sono le tangenti principali nei punti impropri e che in una conica non degenere ogni punto è semplice, possiamo calcolare le tangenti principali calcolando il gradiente di $\overline{\mathcal{C}_1}$:
$$\nabla F(x_0, x_1, x_2) = (-2x_0 - 2x_1 - 2x_2, 2x_1 + 2x_2 - 2x_0, -2x_2 + 2x_1 - 2x_0),$$
che calcolato nei punti P_1 e P_2 è uguale a
$$\begin{aligned} \nabla F\left([0, 1, 1 + \sqrt{2}]\right) &= \left(-2(2 + \sqrt{2}), 2(2 + \sqrt{2}), -2\sqrt{2}\right) \\ \nabla F\left([0, 1, 1 - \sqrt{2}]\right) &= \left(-2(2 - \sqrt{2}), 2(2 - \sqrt{2}), 2\sqrt{2}\right). \end{aligned}$$
Quindi le due tangenti principali nei due punti hanno equazioni
$$\begin{aligned} \overline{t_1} &: -(2 + \sqrt{2})x_0 + (2 + \sqrt{2})x_1 - \sqrt{2}x_2 = 0 \\ \overline{t_2} &: -(2 - \sqrt{2})x_0 + (2 - \sqrt{2})x_1 + \sqrt{2}x_2 = 0. \end{aligned}$$

Chiaramente entrambe queste rette sono diverse dalla retta all'infinito $x_0 = 0$ e quindi deomogeneizzando rispetto x_0, otteniamo i due asintoti:

$$t_1 : (2 + \sqrt{2})x - \sqrt{2}y - (2 + \sqrt{2}) = 0$$
$$t_2 : (2 - \sqrt{2})x + \sqrt{2}y - (2 - \sqrt{2}) = 0.$$

Infine dividendo tutto per il coefficiente di x e razionalizzando otteniamo le rette

$$\boxed{\begin{gathered} t_1 : x - (\sqrt{2} - 1)y - 1 = 0 \\ t_2 : x + (\sqrt{2} + 1)y - 1 = 0. \end{gathered}}$$