Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2019/2020
11 Gennaio 2021 - Quarto Appello

Il tempo per la prova è di 2 ore.

Esercizio 1. Sia $b_k : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica definita (al variare di $k \in \mathbb{R}$) dalla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1+k \\ -1 & k^2 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 2 & -1 \\ 1+k & 0 & -1 & 2k^2 \end{pmatrix}.$$

(i) Si calcoli per quali valori di k la forma bilineare b_k è definita positiva, definita negativa e degenere. In corrispondenza dei casi per cui è degenere si trovi il rango di b_k.

(ii) Sia $k = -1$. Si calcoli una matrice ortogonale M tale che ${}^tMA_{-1}M$ è una matrice diagonale.

(iii) Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ con prodotto scalare definito da b_4 di coordinate $\{x, y, z, w\}$. Si calcolino le equazioni cartesiane dell'iperpiano π passante per il punto $P = (5, 1, -3, 1)$ ed avente giacitura generata dai vettori

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Infine, si trovino le equazioni cartesiane in $\mathbb{E}^4$ della retta r perpendicolare a π e passante per P.

Soluzione dell'Esercizio 1. (i) Calcoliamo il determinante di A_k:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1+k \\ -1 & k^2 & 1-k & 0 \\ 0 & 1-k & 2 & -1 \\ 1+k & 0 & -1 & 2k^2 \end{vmatrix} = -(1+k) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1+k \\ k^2 & 1-k & 0 \\ 1-k & 2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1+k \\ -1 & k^2 & 0 \\ 0 & 1-k & -1 \end{vmatrix} + 2k^2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & k^2 & 1-k \\ 0 & 1-k & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-k)[-k+1+(1-k)(2k^2-1-k^2+2k)]+$$

$$+ [(k-1)(1+k)-(k^2-1)] + 2k^2(2k^2-2-k^2-1+2k) =$$

$$= (-1-k)[1-k+2k^2-1-k^2+2k+2k^3-k-k^3+2k^2]+$$

$$+ 2k^4+4k^3-6k^2 =$$

$$= -k^4-3k^3-k^3-3k^2+2k^4+4k^3-6k^2 =$$

$$= k^4-9k^2 = k^2(k^2-9) = k^2(k-3)(k+3).$$

Quindi la forma b_k risulta $\boxed{\text{degenere per } k=0,\ k=3 \text{ e } k=-3.}$ Per calcolare quando è definita positiva o negativa, studiamo il segno dei minori principali di A_k:

$$1 > 0 \text{ per ogni } k \in \mathbb{R};$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & k \end{vmatrix} = k^2-1 > 0 \iff k < -1 \vee k > 1;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & k & 1-k \\ 0 & 1-k & 2 \end{vmatrix} = k^2+2k-3 > 0 \iff k < -3 \vee k > 1;$$

$$|A_k| = k^2(k-3)(k+3) > 0 \iff k < -3 \vee k > 3.$$

$\boxed{\text{La matrice risulta definita positiva}}$ quando tutti i minori hanno determinante positivo, cioè quando $\boxed{k > 3}$ o $\boxed{k < -3}$. Invece affinché la matrice risulti definita negativa, i minori di ordine pari devono avere determinante negativo, ma vediamo che la condizione del secondo minore $-1 < k < 1$ intersecata con quella del terzo minore $k < -3 \vee k > 1$ non dà alcuna soluzione. Quindi la forma bilineare $\boxed{\text{non è definita negativa per alcun valore di } k.}$ Infine per studiare il rango della matrice nei casi in cui è degenere sostituiamo i valori trovati nella matrice. Nel primo caso

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e chiaramente $\boxed{r(A_0) = 3.}$ Nel secondo caso, operando alcune semplici operazioni sulle righe si ricava che

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 9 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -1 & 18 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi $\boxed{r(A_3) = 3.}$ Analogamente per la terza matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 9 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 18 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 14 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cioè $\boxed{r(A_{-3}) = 3.}$

(ii) Per $k = -1$ la matrice diventa

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico di questa matrice

$$\begin{aligned} P(\lambda) = |A_{-1} - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)[(1-\lambda)(4+\lambda^2-4\lambda-1) - 2(4-2\lambda)] - (4+\lambda^2-4\lambda-1) = \\ &= (1-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 3 - \lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 8 + 4\lambda] - \lambda^2 + 4\lambda - 3 = \\ &= \lambda^2 + 3 - \lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda - 8 - \lambda^3 - 3\lambda + \lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + \\ &+ 8\lambda - \lambda^2 + 4\lambda - 3 = \\ &= \lambda^4 - 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + 6\lambda - 8. \end{aligned}$$

Notiamo che possiamo aggiungere e togliere un termine λ^2, in modo da raccogliere il polinomio in questa maniera:

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 1) - 6\lambda(\lambda^2 - 1) + 8(\lambda^2 - 1) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 8).$$

Il secondo termine ha come soluzioni

$$\lambda_{3/4} = 3 \pm \sqrt{9-8} = \begin{cases} 4 \\ 2. \end{cases}$$

Quindi il polinomio caratteristico ha come soluzioni e quindi come autovalori:

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = 4.$$

Per trovare i corrispondenti autovettori, calcoliamo una base per gli autospazi, sostituendo nella matrice $A_{-1} - \lambda I$ i valori trovati:

$$A_{-1} - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi una base per l'autospazio è data dal vettore

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Procediamo analogamente con tutti gli altri autovalori

$$A_{-1} - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rightsquigarrow \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$A_{-1} - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rightsquigarrow \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$A_{-1} - \lambda_4 I = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rightsquigarrow \boldsymbol{v_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dato che gli autovettori sono tutti relativi ad autovalori differenti essi sono già ortogonali. Per ottenere una matrice ortogonale diagonalizzante è sufficiente normalizzare i vettori. Calcoliamo quindi le loro norme:

$$\begin{aligned} ||\boldsymbol{v_1}|| &= \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}, \\ ||\boldsymbol{v_2}|| &= \sqrt{4+16+9+1} = \sqrt{30}, \\ ||\boldsymbol{v_3}|| &= \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}, \\ ||\boldsymbol{v_4}|| &= \sqrt{1+9+16+4} = \sqrt{30}. \end{aligned}$$

Possiamo quindi definire i vettori $\boldsymbol{w_i} = \frac{\boldsymbol{v_i}}{||\boldsymbol{v_i}||}$ e la matrice M è definita come

$$\boxed{M = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{4}{\sqrt{5}} & 1 & -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ 1 & \frac{3}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 2 & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.}$$

(iii) La generica equazione cartesiana di un iperpiano in $\mathbb{E}^4$ è

$$Ax + By + Cz + DW + E = 0.$$

Affinché i vettori $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$, $\boldsymbol{u_3}$ siano nella giacitura, devono essere una soluzione del sistema omogeneo associato, cioè:

$$\begin{cases} 2A + B + D = 0 \\ -3A - 2C + D = 0 \\ -4A + B + 2C + 2D = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} B = -\frac{13}{2}A \\ C = \frac{3}{4}A \\ D = \frac{9}{2}A. \end{cases}$$

Quindi $\pi : 4x - 26y - 3z + 18w + E = 0$, allora imponendo il passaggio per il punto P si ottiene

$$20 - 26 - 9 + 18 + E = 0 \rightsquigarrow E = -3,$$

quindi

$$\boxed{\pi : 4x - 26y - 3z + 18w - 3 = 0.}$$

Per trovare l'equazione della retta r imponiamo la condizione di perpendicolarità, trovando il vettore ortogonale ai vettori della giacitura di π, cioè il vettore $\big(x//y//z//w\big)$, tale che

$$\begin{pmatrix} x & y & z & w \end{pmatrix} A_4 \boldsymbol{u_i} = 0$$

per ogni $i = 1, 2, 3$. Sviluppando i conti otteniamo che

$$A_4\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ -4 \\ 42 \end{pmatrix}, \quad A_4\boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -5 \\ 19 \end{pmatrix}, \quad A_4\boldsymbol{u_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ -1 \\ 42 \end{pmatrix}.$$

Quindi il vettore cercato soddisfa il sistema

$$\begin{cases} 6x + 14y - 4z + 42w = 0 \\ 2x + 9y - 5z + 19w = 0 \\ 5x + 14y - z + 42w = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 3z \\ z + y + 3w = 0 \\ 9y + z + 19w = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \\ w = -z. \end{cases}$$

Quindi il vettore della giacitura di t è $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Le equazioni parametriche di t sono quindi:

$$\begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 + t \\ w = 1 - t. \end{cases}$$

Esplicitando il valore di t dalla terza equazione otteniamo che $t = z + 3$ e porta alle equazioni cartesiane:

$$\boxed{t : \begin{cases} x - 3z = 14 \\ y - 2z = 7 \\ w + z = -2. \end{cases}}$$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ il piano affine complesso di coordinate (x, y). Si consideri la famiglia $\mathcal{C}_{a,b}$ di curve nel piano $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ al variare dei paramentri $a, b \in \mathbb{C}$ definita dal polinomio

$$\mathcal{C}_{a,b} : f_{a,b}(x, y) = ax^2y^2 - bx^2 - y^2 + 1 = 0.$$

(i) Si dimostri che se $a = b = 1$, la curva $\mathcal{C}_{1,1}$ risulta riducibile e si trovino le sue componenti irriducibili, identificando anche eventuali punti di intersezione tra esse.

Sia $a = -2$ e $b = -6$.

(ii) Si trovino i punti impropri ed i punti singolari della curva $\mathcal{C}_{-2,-6}$.

(iii) Per ognuno dei punti singolari calcolati al punto precedente si trovi la molteplicità di tali punti, le tangenti principali ad essi e la molteplicità d'intersezione tra queste rette e la curva $\mathcal{C}_{-2,-6}$ nei punti singolari. Infine si calcolino gli eventuali asintoti.

Soluzione dell'Esercizio 2. (i) La curva $\mathcal{C}_{1,1}$ è definita dal polinomio

$$\begin{aligned} f_{1,1}(x, y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 &= x^2(y^2 - 1) - (y^2 - 1) = \\ &= (x^2 - 1)(y^2 - 1) = \\ &= (x - 1)(x + 1)(y - 1)(y + 1) = 0. \end{aligned}$$

Le componenti irriducibili di questa curva sono quindi quattro rette di equazione:

$$\boxed{\begin{array}{l} r_1 : x = 1 \\ r_2 : x = -1 \\ r_3 : y = 1 \\ r_4 : y = -1. \end{array}}$$

Le intersezioni tra di esse sono i punti $\boxed{R_1 = (1,1),\ R_2 = (1,-1)}$, $\boxed{R_3 = (-1,1) \text{ e } R_4 = (-1,-1).}$

(ii) Scriviamo l'equazione omogeneizzata del polinomio $f_{-2,-6}$, rispetto la variabile x_0:

$$\overline{f_{-2,-6}} : 6x_0^2x_1^2 - 2x_1^2x_2^2 - x_0^2x_2^2 + x_0^4 = 0$$

Per trovare i punti all'infinito è sufficiente studiare le intersezioni con la retta $x_0 = 0$. L'intersezione è data da

$$2x_1^2x_2^2 = 0.$$

Quindi i due punti impropri sono $\boxed{P_1 = [0,1,0] \text{ e } P_2 = [0,0,1].}$ Per trovare invece i punti singolari, calcoliamo il gradiente

$$\nabla\overline{f_{-2,-6}} = \left(12x_0x_1^2 - 2x_0x_2^2 + 4x_0^3, 12x_0^2x_1 - 4x_1x_2^2, -4x_1^2x_2 - 2x_0^2x_2\right)$$

e imponiamo che ogni entrata del gradiente si annulli, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2x_0(6x_1^2 - x_2^2 + 2x_0^2) = 0 \\ 4x_1(3x_0^2 - x_2^2) = 0 \\ -2x_2(2x_1^2 + x_0^2) = 0. \end{cases}$$

Annulliamo x_0 e troviamo le soluzioni

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1x_2^2 = 0 \\ x_2x_1^2 = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema sono i due punti impropri P_1 e P_2, che risultano quindi anche singolari. Se $x_1 = 0$, otteniamo che

$$\begin{cases} -x_0x_2^2 + 2x_0^3 = 0 \\ x_1 = 0 \\ -2x_2x_0^2 = 0, \end{cases}$$

che ha come soluzione non banale solo P_2. Analogamente se $x_2 = 0$,

$$\begin{cases} 3x_0x_1^2 + x_0^3 = 0 \\ x_1x_0^2 = 0 \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

la cui unica soluzione non banale è P_1. Annulliamo adesso il secondo fattore della seconda equazione (e rimuoviamo i termini già annullati in precedenza) imponendo che $x_2^2 = 3x_0^2$, questo porta a

$$\begin{cases} 6x_1^2 - x_0^2 = 0 \\ 3x_0^2 = x_2^2 \\ 2x_1^2 + x_0^2 = 0. \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 6x_1^2 = x_0^2 \\ 3x_0^2 = x_2^2 \\ 8x_1^2 = 0, \end{cases}$$

che possiede solamente la soluzione banale. Quindi gli unici punti singolari, sono i punti impropri $\boxed{P_1 = [0,1,0] \text{ e } P_2 = [0,0,1].}$

(iii) Dato che i punti impropri sono anche gli unici punti singolari, trovare le tangenti principali ai punti impropri equivale a trovare anche gli asintoti. Troviamo quindi $m_{P_1}(\mathcal{C}_{-2,-6})$ deomogeneizzando il polinomio $\overline{f_{-2,-6}}$ rispetto la variabile x_1 ed otteniamo la curva descritta dal polinomio:

$$g_1(x',y') = 6(x')^2 - 2(y')^2 - (x')^2(y')^2 + (x')^4 = 0.$$

Dato che $j_1^{-1}(P_1) = O$, per trovare la molteplicità di P_1 e le rette tangenti principali è sufficiente annullare i termini di grado minimo in g_1:

$$3(x')^2 - (y')^2 = 0.$$

Notiamo che essi hanno grado 2, quindi $\boxed{m_{P_1}(\overline{\mathcal{C}_{-2,-6}}) = 2}$ e le tangenti principali sono date da

$$\begin{aligned} s_1 &: y' = \sqrt{3}x' \\ s_2 &: y' = -\sqrt{3}x'. \end{aligned}$$

Dobbiamo però riportare le rette tangenti nel piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, quindi omogeneizziamo rispetto x_1 ed otteniamo:

$$\begin{aligned} \overline{s_1} &: x_2 = \sqrt{3}x_0 \\ \overline{s_2} &: x_2 = -\sqrt{3}x_0, \end{aligned}$$

che corrispondono alle tangenti nel piano $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$:

$$\boxed{\begin{aligned} t_1 &: y = \sqrt{3} \\ t_2 &: y = -\sqrt{3}. \end{aligned}}$$

Per trovare $I(\overline{\mathcal{C}_{-2,-6}}; t_1, P_1)$ e $I(\overline{\mathcal{C}_{-2,-6}}; t_2, P_1)$, dato che è un invariante per la curva e la retta, calcoliamo la molteplicità di intersezione tra le rette s_1 ed s_2 e la curva $\mathcal{C}'_{-2,-6}$, data dal polinomio g_1, trovando una parametrizzazione per entrambe: $s_1 = (t, \sqrt{3}t)$ e $s_2 = (t, -\sqrt{3}t)$ e sostituiamo questi valori in g_1:

$$g_1(t, \pm\sqrt{3}t) = 6t^2 - 6t^2 - 3t^4 + t^4 = -2t^4 = 0,$$

che possiede $t = 0$ come radice con molteplicità 4. Quindi possiamo concludere che $\boxed{I(\overline{\mathcal{C}_{-2,-6}}; t_1, P_1) = I(\overline{\mathcal{C}_{-2,-6}}; t_2, P_1) = 4.}$ Possiamo ragionare analogamente per P_2, considerando la deomogeneizzazione rispetto x_2 ed ottenendo il polinomio:

$$g_2(x'',y'') = 6(x'')^2(y'')^2 - 2(y'')^2 - (x'')^2 + (x'')^4 = 0.$$

Anche in questo caso $j_2^{-1}(P_2) = O$, quindi esattamente come prima studiamo il termine di grado più basso:

$$2(y'')^2 + (x'')^2 = 0.$$

Questo ci dice che $\boxed{m_{P_2}(\overline{\mathcal{C}_{-2,-6}}) = 2}$ e le tangenti principali sono

$$\begin{aligned} s_3 &: x'' = i\sqrt{2}y'' \\ s_4 &: x'' = -i\sqrt{2}y''. \end{aligned}$$

Riportandole sul piano proiettivo otteniamo che

$$\begin{aligned} \overline{s_3} &: x_0 = i\sqrt{2}x_1 \\ \overline{s_4} &: x_0 = -i\sqrt{2}x_1, \end{aligned}$$

che corrispondono alle rette tangenti sul piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ di partenza a

$$\boxed{\begin{aligned} t_3 &: x = -i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ t_4 &: x = i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}}$$

Per conludere, una parametrizzazione per le rette s_3 ed s_4 è data da $(\pm i\sqrt{2}t, t)$, che sostituita in g_2 restituisce

$$g_2(t, \pm i\sqrt{2}) = -12t^4 - 2t^2 + 2t^2 + 4t^4 = -8t^4,$$

quindi $\boxed{I(\overline{\mathcal{C}_{-2,-6}}; t_3, P_2) = I(\overline{\mathcal{C}_{-2,-6}}; t_4, P_2) = 4.}$