Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2022/2023

Primo appello - Giugno 2023

Esercizio 1. Si consideri al variare di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ il fascio di coniche $\mathcal{C}[\lambda, \mu] \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dato dall'equazione:

$$2\lambda x_0^2 - (\mu + \lambda)x_1^2 + (\mu - \lambda)x_2^2 - 2\mu x_0 x_1 - 2\mu x_0 x_2 = 0$$

(1) Trovare le coniche degeneri e i punti base del fascio.

(2) Dimostrare che esiste un'unica retta L tangente a tutte le coniche del fascio.

(3) Indicato con $U_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ l'aperto affine in cui la coordinata $x_0 \neq 0$, si determinino tutte le coniche $C \in \mathcal{C}[\lambda, \mu]$ tali per cui $C \cap U_0$ è una parabola.

Esercizio 2. Sia $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ la cubica affine di equazione

$$f(x, y) = x - xy^2 + 1 = 0.$$

(1) Determinare i punti singolari e gli asintoti di C.

(2) Calcolare i punti di flesso di $\overline{C}$, dove $\overline{C}$ è la chiusura proiettiva di C in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

(3) Dimostrare che i punti di flesso di $\overline{C}$ sono allineati e trovare l'equazione della retta $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ che li contiene.

Soluzione 1. (1) Associamo alla conica $C_{\lambda,\mu}$ del fascio la matrice simmetrica $A_{\lambda,\mu}$ che la rappresenta

$$A_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} 2\lambda & -\mu & -\mu \\ -\mu & -\lambda-\mu & 0 \\ -\mu & 0 & \mu-\lambda \end{pmatrix}$$

Espandendo il determinante lungo la terza colonna otteniamo:

$$det(A_{\lambda,\mu}) = -\mu^2(\lambda+\mu) + (\mu-\lambda)[-2\lambda(\lambda+\mu)-\mu^2] = 2\lambda^3$$

Le coniche degeneri del fascio corrispondono ai valori $[\lambda,\mu]$ per i quali $det(A_{\lambda,\mu} = 0$. Dal conto precedente ricaviamo che il fascio ha una sola conica degenere D_1 corrispondente al punto $[\lambda,\mu] = [0,1]$. L'equazione della conica D_1 è perciò la seguente:

$$D_1 : -x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0$$

Scrivendo $x_2^2 - x_1^2 = (x_2-x_1)(x_2+x_1)$ e $-2x_0x_1 - 2x_0x_2 = -2x_0(x_1+x_2)$ si ottiene la scomposizione di D_1 come

$$D_1 : (2x_0 + x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

La conica D_1 è perciò una coppia di rette date da

$$l_1 : (2x_0 + x_1 - x_2) = 0 \quad \text{e} \quad l_2 : (x_1 + x_2) = 0$$

Il punto di intersezione $P = l_1 \cap l_2$ si ottiene mettendo a sistema

$$\begin{cases} 2x_0 + x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \qquad \rightsquigarrow P = [1,-1,1]$$

Chiamiamo ora D_2 la conica corrispondente al parametro $[\lambda,\mu] = [1,0]$. Si ha che D_2 ha equazione

$$D_2 : 2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$$

Poichè le coniche D_1 e D_2 generano il fascio si ha che i punti base di quest'ultimo sono dati dalle soluzioni del sistema tra D_1 e D_2

$$\begin{cases} (2x_0 + x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \\ 2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo $x_0 = \frac{x_2 - x_1}{2}$ nella seconda equazione troviamo come unico punto il punto $P = [1,-1,1]$. Sostituendo invece $x_1 = -x_2$ otteniamo un ulteriore punto $Q = [1,1,-1]$.

(2) Poichè l_1 è tangente alla conica irriducibile D_2 nel punto $P = [1,-1,1]$ si ha che l_1 è tangente a

tutte le coniche del fascio. Infatti si ha per definizione di tangente ad una conica nel punto P che

$$(1,-1,1)A_{1,0}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}=l_1 \quad \text{e} \quad (1,-1,1)A_{0,1}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}=l_1$$

da cui si ricava che

$$(1,-1,1)A_{\lambda,\mu}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}=(\lambda+\mu)l_1$$

la retta l_1 è tangente a tutte le coniche del fascio. Viceversa se r fosse un'altra retta tangente a tutte le coniche del fascio dovrebbe essere tangente in particolare alla conica D_1, e quindi passare per P. Tuttavia poichè D_2 è liscia si ha che la retta tangente in P a D_2 è unica e quindi ogni altra retta distinta da l_1 non sarebbe tangente a D_2 in P. Perciò si ha che $L = l_1$ è unica ed è la retta cercata.

(3) Nella carta affine U_0, chiamiamo $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$ le coordinate affini la conica $C_{\lambda,\mu} \cap U_0$ ha equazioni

$$2\lambda - (\mu+\lambda)x^2 + (\mu-\lambda)y^2 - 2\mu x - 2\mu y = 0$$

Per essere una parabola deve essere non degenere, ovvero $\lambda \neq 0$ e la sua chiusura proiettiva deve essere tangente alla retta all'infinito. Intersecando quindi la chiusura proiettiva di C con la retta all'infinito $x_0 = 0$ tramite il sistema

$$\begin{cases} 2\lambda x_0^2 - (\mu+\lambda)x_1^2 + (\mu-\lambda)x_2^2 - 2\mu x_0x_1 - 2\mu x_0x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

otteniamo l'equazione

$$-(\mu+\lambda)x_1^2 + (\mu-\lambda)x_2^2 = 0$$

che ha un'unica soluzione in x_1, x_2 (doppia) solo per i valori $[\lambda,\mu] = [1,1]$ e $[\lambda,\mu] = [1,-1]$.

$\square$

Soluzione 2. (1) Rinominiamo per comodità le variabili $x = x_1$ e $y = x_2$. Possiamo quindi identificare $\mathbb{C}^2$ come l'aperto affine $U_0 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, dove $U_0 = \{[x_0,x_1,x_2] | x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tramite la mappa

$$j_0 : \mathbb{C}^2 \to U_0$$
$$(x_1,x_2) \mapsto [1,x_1,x_2]$$

La chiusura proiettiva $F(x_0,x_1,x_2)$ di $f(x,y)$ diventa perciò

$$F(x_0,x_1,x_2) = x_0^2x_1 - x_1x_2^2 + x_0^3)$$

Per determinare i punti singolari di C dobbiamo perciò mettere a sistema la derivate parziali

$F_{x_i} := \frac{\partial F}{\partial x_i}$ di F valutate in $[x_0, x_1, x_2]$:

$$\begin{cases} F_{x_0} = 2x_0x_1 + 3x_0^2 = x_0(2x_1 + 3x_0) = 0 \\ F_{x_1} = x_0^2 - x_2^2 = (x_0 - x_2)(x_0 + x_2) = 0 \\ F_{x_2} = -2x_1x_2 = 0 \end{cases}$$

Analizziamo i due casi possibili derivanti dall'annullarsi della terza equazione:

- $x_1 = 0$ sostituendo nella prima equazione otteniamo $3x_0^2 = 0$ da cui otteniamo $x_0 = 0$. Sostituendo infine $x_0 = 0$ nella seconda equazione otteniamo $-x_2^2 = 0$ che ha come unica soluzione $x_2 = 0$. Poichè $[0, 0, 0]$ non è punto nel piano proiettivo otteniamo un assurdo.
- $x_2 = 0$ sostituendo nella seconda equazione otteniamo $x_0^2 = 0$ che ha come unica soluzione $x_0 = 0$. Sostituendo nella prima equazione osserviamo che essa è verificata per ogni valore di x_1. Di conseguenza l'unico punto singolare è il punto $P = [0, 1, 0]$.

Ne segue che la curva affine C è liscia mentre la sua chiusura proiettiva $\overline{C}$ ha un unico punto singolare. Intersechiamo ora $\overline{C}$ con la retta all'infinito data da $x_0 = 0$. Otteniamo quindi la condizione $x_1x_2^2 = 0$ che ha come soluzioni in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ il punto $P = [0, 1, 0]$ con molteplicità 2 e il punto semplice $Q = [0, 0, 1]$. Calcoliamo come prima cosa la retta tangente al punto Q. Poichè esso è un punto liscio la retta tangente è data da

$$F_{x_0}(Q)x_0 + F_{x_1}(Q)x_1 + F_{x_2}(Q)x_2 = 0$$

Poichè

$$F_{x_0}(0, 0, 1) = 0 \quad F_{x_1}(0, 0, 1) = 1 \quad F_{x_2}(0, 0, 1) = 0$$

otteniamo che la retta tangente in Q ha equazione $x_1 = 0$ che nell'aperto affine di partenza $\mathbb{C}^2 = U_0$ corrisponde alla retta $x = 0$. Perciò l'asse delle ordinate è asintoto per la curva. Poichè $P = [0, 1, 0]$ consideriamo la curva affine $\overline{C} \cap U_1$ dove $U_1 = \{[x_0, x_1, x_2] | x_1 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ con coordinate $u = \frac{x_0}{x_1}$ e $v = \frac{x_2}{x_1}$. La curva affine ha equazioni:

$$u^2 - v^2 + u^3 = (u - v)(u + v) + u^3 = 0$$

Poichè in U_1 il punto P corrisponde all'origine abbiamo che in P la curva $\overline{C}$ ha un punto doppio con tangenti principali le due rette

$$l_1 : u - v = 0 \quad l_2 : u + v = 0$$

Le due rette hanno equazioni $x_0 - x_2 = 0$ e $x_0 + x_2 = 0$ rispettivamente in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e in particolare $y = -1$ e $y = 1$ nello spazio affine $\mathbb{C}^2$ di partenza. Pertanto la curva affine C ha tre asintoti, corrispondenti alle tre rette $x = 0$,$y = 1$ e $y = -1$.

(2) Per calcolare i punti di flesso dobbiamo prima calcolare l'Hessiano di C. Abbiamo quindi:

$$H_F = \begin{pmatrix} 2x_1 + 6x_0 & 2x_0 & 0 \\ 2x_0 & 0 & -2x_2 \\ 0 & -2x_2 & -2x_1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il determinante di H_F sviluppando secondo la terza colonna, ottenendo

$$det(H_F) = 2x_2(-4x_1x_2 - 12x_0x_2) - 2x_1(-4x_0^2) \quad \rightsquigarrow \quad 8(x_0^2x_1 - 3x_0x_2^2 - x_1x_2^2)$$

I punti di flesso saranno quindi le soluzioni del sistema tra le equazioni di F e quelle di H_F:

$$\begin{cases} x_0^2x_1 - x_1x_2^2 + x_0^3 = 0 \\ x_0^2x_1 - 3x_0x_2^2 - x_1x_2^2 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima otteniamo il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x_0^2x_1 - x_1x_2^2 + x_0^3 = 0 \\ x_0(x_0^2 + 3x_2^2) = 0 \end{cases}$$

- $x_0 = 0$ sostituito nella prima equazioni ci fornisce i due punti soluzione $P = [0, 1, 0]$ e $Q = [0, 0, 1]$.
- $-\frac{x_0^2}{3} = x_2^2$ sostituito nella prima equazione restituisce, dopo aver raccolto x_0^2, l'equazione $x_0^2(4x_1 + 3x_0) = 0$. Ora se $x_0 = 0$ otteniamo un assurdo, mentre se $4x_1 + 3x_0 = 0$ otteniamo le due soluzioni

$$A = [-12, 9, 4i\sqrt{3}] \quad \text{e} \quad B = [-12, 9, -4i\sqrt{3}]$$

Poichè i punti di flesso sono punti semplici otteniamo che i 3 punti di flesso cercati sono A, B e Q.

(3) Mostriamo infine che i punti A, B e Q sono allineati. Sia

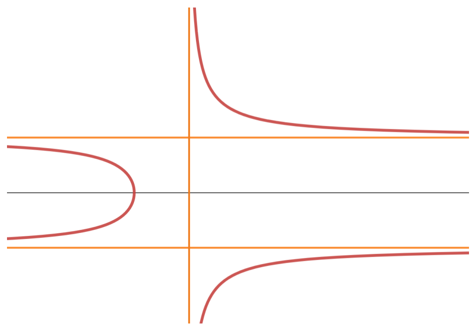
$$ax_0 + bx_1 = 0$$

il fascio di rette passanti per Q. Imponendo il passaggio per A otteniamo

$$-12a + 9b = 0 \quad \rightsquigarrow \quad a = 3 \quad \text{e} \quad b = 4$$

Poichè B appartiene alla retta $L : 3x_0 + 4x_1 = 0$ abbiamo mostrato che i 3 punti di flesso sono allineati. L'equazione della retta affine in $\mathbb{C}^2$ che li contiene è $y = -\frac{3}{4}$.

Di seguito si può osservare il grafico della cubica affine C con i tre asintoti disegnati in arancione, corrispondenti a $y = 1$,$y = -1$ e $x = 0$.



□