Geometria A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

A.A. 2020/2021

Primo appello - 14 giugno 2021

Esercizio 1. Si consideri $V = \mathbb{R}^3$ con la base ortonormale $\{e_1, e_2, e_3\}$ e la forma quadratica $q_k : V \to \mathbb{R}$ definita, al variare di $k \in \mathbb{R}$, da

$$q_k(x, y, z) = (k+1)x^2 - 2xy + y^2 + 2kyz + 2z^2.$$

(1) Determinare la matrice A_k associata alla forma bilineare $f_k : V \times V \to \mathbb{R}$ associata a q_k.

(2) Determinare per quali valori di k, le rette

$$l : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \quad m : \begin{cases} x - y = 0 \\ y + 6z = 0 \end{cases}$$

sono ortogonali rispetto a f_k.

(3) Trovare i valori di k per cui f_k è un prodotto scalare.

(4) Per quali valori di k si ha che 0 è un autovalore di A_k? Studiare la segnatura di f_k in questi casi.

Esercizio 2. Si consideri la curva algebrica $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ data dall'equazione

$$f(x, y) = x^2(y-5)^2 + y(bx + a^2y) = 0.$$

Al variare di $a, b \in \mathbb{C}$ determinare:

(1) Il numero di asintoti di $\mathcal{C}$.

(2) Se il punto $(0,0) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ è singolare per $\mathcal{C}$. Poi, calcolare la sua molteplicità e dire quando è un punto doppio ordinario.

(3) Quando la curva passa per il punto $(-1, 1)$ ed è tangente in quel punto alla retta $3x + 5y - 2 = 0$.

Soluzione Esercizio 1. (1) Sappiamo che, detti $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$, avremo

$$f_k(u, v) = \frac{1}{2}(q_k(u + v) - q(u) - q(v)).$$

Sviluppiamo i vari termini che compaiono nell'uguaglianza:

$$q_k(u + v) = (k + 1)(u_1 + v_1)^2 - 2(u_1 + v_1)(u_2 + v_2) + (u_2 + v_2)^2 + 2k(u_2 + v_2)(u_3 + v_3) + 2(u_3 + v_3)^2,$$
$$q_k(u) = (k + 1)u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2 + 2ku_2u_3 + 2u_3^2,$$
$$q_k(v) = (k + 1)v_1^2 - 2v_1v_2 + v_2^2 + 2kv_2v_3 + 2v_3^2,$$

da cui segue che

$$f_k(u, v) = (k + 1)u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_2v_2 + ku_2v_3 + ku_3v_2 + 2u_3v_3.$$

Allora la matrice associata è data da

$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & k \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad f_k(u, v) = u^t A_k v.$$

(2) Per trovare i valori di k, dobbiamo imporre che siano perpendicolari le giaciture delle rette l e m nel senso di f_k. Possiamo facilmente riscrivere

$$l = \{(t, 2t, 0) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\} \quad \rightsquigarrow \quad u_l = (1, 2, 0),$$
$$m = \{(s, s, -6s) \in \mathbb{R}^3 : s \in \mathbb{R}\} \quad \rightsquigarrow \quad v_m = (6, 6, -1).$$

Non rimane che imporre la condizione $f_k(u_l, v_m) = 0$:

$$f_k(u_l, v_m) = 6k - 6 + 6 - 2k = 4k = 0 \quad \rightsquigarrow \quad k = 0.$$

(3) Affinché f_k sia un prodotto scalare, dobbiamo imporre che sia simmetrico e definito positivo. La simmetria è garantita dalla simmetria della matrice A_k. Perché sia definita positiva, dobbiamo avere che tutti gli autovalori di A_k siano positivi. Usiamo la tecnica del minori principali, sappiamo infatti che A_k sarà definita positiva se valgono le condizioni

$$\det(k + 1) > 0, \quad \det \begin{pmatrix} k+1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} > 0, \quad \det A_k > 0$$

Le tre condizioni appena espresse diventano

$$\begin{cases} k + 1 > 0 \\ k > 0 \\ (k + 1)(2 - k^2) - 2 > 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} k > 0 \\ k(k^2 + k - 2) < 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} k > 0 \\ k < -2 \text{ oppure } 0 < k < 1 \end{cases}$$

da cui segue che la soluzione si ottiene per $0 < k < 1$, per cui f_k è un prodotto scalare.

(4) La segnatura di q_k è data dal numero di autovalori positivi e negativi della matrice A_k. Notiamo che il punto precedente ci dice quando la segnatura è $(3, 0)$. Calcoliamo il polinomio caratteristico $p_{A_k}(\lambda) = \det(A_k - \lambda \mathrm{Id})$:

$$p_{A_k}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} k+1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & k \\ 0 & k & 2-\lambda \end{pmatrix} = (k + 1 - \lambda)((1 - \lambda)(2 - \lambda) - k^2) + \lambda - 2.$$

Se riscriviamo il polinomio rispetto a λ, questo assume la forma

$$p_{A_k}(\lambda) = -\lambda^3 + (k+4)\lambda^2 + (k+1)(k-4)\lambda - k(k-1)(k+2).$$

Chiamiamo p il numero di autovalori positivi e n il numero di autovalori negativi, allora

$$p + n = \begin{cases} 2 & \text{se } k = -2, 0, 1 \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Studiamo i casi per cui $p + n = 2$:

$$\begin{aligned} k = -2 \quad &\rightsquigarrow \quad -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 6) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad (1,1); \\ k = 0 \quad &\rightsquigarrow \quad -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad (2,0); \\ k = 1 \quad &\rightsquigarrow \quad -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad (2,0). \end{aligned}$$

Questo conclude le richieste del problema. □

Soluzione Esercizio 2. (1) Sappiamo che studiare gli asintoti di una curva $\mathcal{C}$ equivale a guardare le rette tangenti nei punti che appartengono alla sua chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_1^2(x_2 - 5x_0)^2 + x_0^2 x_2(bx_1 + a^2 x_2) = 0.$$

I punti impropri sono dati dall'intersezione $\overline{\mathcal{C}} \cap \{x_0 = 0\}$, quindi sono i punti $[0 : x_1 : x_2]$ che risolvono l'equazione $x_1^2 x_2^2 = 0$: $P = [0 : 1 : 0]$ e $Q = [0 : 0 : 1]$.

Cominciamo a studiare le tangenti principali di P mettendoci nella carta $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$ (e supponiamo senza problemi che $x_1 = 1$ per deomogeneizzare), allora l'equazione della curva nella carta locale diventa

$$F(x_0, 1, x_2) = (x_2 - 5x_0)^2 + bx_0^2 x_2 + a^2 x_0 x_2^2 = 0.$$

Segue che P è un punto doppio non ordinario con un'unica tangente principale:

$$x_2 - 5x_0 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad y = 5.$$

Possiamo concludere che $\mathcal{C}$ possiede un asintoti verso il punto improprio P.

Per studiare il caso di Q, mettiamoci nella carta $U_2 = \{x_2 \neq 0\}$ (supponiamo ancora per semplicità $x_2 = 1$), allora otteniamo localmente l'equazione

$$F(x_0, x_1, 1) = x_1^2(1 - 5x_0)^2 + bx_0^2 x_1 + a^2 x_0^2.$$

Segue che le tangenti principali sono date dalla fattorizzazione di

$$x_1^2 + a^2 x_0^2 = (x_1 + iax_0)(x_1 - iax_0).$$

In particolare, se $a = 0$ abbiamo una sola tangente principale data da $x_1 = 0$, quindi l'asintoto

$$x = 0.$$

Se $a \neq 0$, invece, ci sono due tangenti principali e gli asintoti corrispondenti sono dati dalle equazioni

$$x = \pm ia.$$

A questo punto possiamo concludere che il numero degli asintoti di $\mathcal{C}$ è

$$\begin{cases} 3 & \text{se } a \neq 0 \\ 2 & \text{se } a = 0 \end{cases}.$$

(2) Per vedere se $(0,0) \in \mathcal{C}$ è un punto singolare, calcoliamo il gradiente di f nel punto:

$$\nabla f(0,0) = (2x(y-5)^2 + by, 2x^2(y-5) + bx + 2a^2y)(0,0) = (0,0).$$

Segue che l'origine è un punto singolare per la curva. Infatti abbiamo che

$$f(x,y) = F(1,x,y) = x^2y^2 - 10x^2y + 25x^2 + bxy + a^2y^2,$$

da cui segue che $(0,0)$ è un punto doppio, cioè $m_{(0,0)}(\mathcal{C}) = 2$. È un punto doppio ordinario se possiede due tangenti principali, cioè se la parte omogenea di grado 2 di f non è il quadrato di un fattore lineare:

$$25x^2 + bxy + a^2y^2 = (5x \pm ay)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad b = \pm 10a.$$

Concludiamo che $(0,0)$ è un punto doppio ordinario se e solo se $b \neq \pm 10a$.

(3) La condizione di passaggio per il punto $(-1,1)$ si traduce nell'equazione

$$f(-1,1) = 16 - b + a^2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad b = a^2 + 16.$$

Affrontiamo ora il problema della tangenza: sappiamo che la retta tangente sarà della forma $\nabla f(-1,1) \cdot (x+1, y-1) = 0$, da cui segue che i coefficienti di x e y nell'equazione della retta tangente valgono

$$f_x(-1,1) = b - 32 \quad \text{e} \quad f_y(-1,1) = 2a^2 - b - 8.$$

Visto che dobbiamo tenere conto del fattore di proporzionalità, dobbiamo richiedere che i vettori $\nabla f(-1,1)$ e $(3,5)$ siano linearmente dipendenti, cioè che valga

$$0 = \det \begin{pmatrix} b-32 & 2a^2 - b - 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 8b - 6a^2 - 136.$$

Quindi i valori $a, b \in \mathbb{C}$ che cerchiamo sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} b = a^2 + 16 \\ 8b = 6a^2 + 136 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} b = a^2 + 16 \\ 2a^2 = 8 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} a = \pm 2 \\ b = 20 \end{cases}.$$

Per questi valori $\mathcal{C}$ passa per $(-1,1)$ e la retta $3x + 5y - 2 = 0$ è tangente alla curva in quel punto. $\square$