Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2017/2018

18 Giugno 2018
Appello di Giugno

Il tempo per la prova è di 3 ore. Durante la prova non è permesso l'uso di appunti e libri.

Esercizio 1
Si consideri $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ con un sistema di riferimento affine di centro O e base $\mathcal{B}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Siano x, y, z, w le coordinate rispetto a tale riferimento. Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la matrice A_k

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k+2 & 0 \\ k-2 & k & -k-4 & 0 \\ k-1 & k & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sia U_k il sottospazio vettoriale tale che

$$U_k = \{\underline{t} = [t_1, t_2, t_3, t_4]^T \mid A_k\underline{x} = \underline{t} \text{ ha soluzione}\}.$$

(i) Si determini, al variare di k, un sistema di equazioni cartesiane indipendenti per U_k.

(ii) Si ponga $k = 0$ e si consideri lo spazio affine S soluzione del sistema $A_0\underline{x} = [1, -2, -1, 4]^T$. Sia $X = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}} \,\middle|\, \begin{cases} y - 4x = 2018\pi \\ w - 3x = 2018\pi \end{cases} \right\}$. Si ricavi uno spazio affine Y di dimensione maggiore o uguale a 1 passante per $P(0, 0, 0, 8)$ e parallelo sia a S che e a X.

(iii) Si ricavi la dimensione e le equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{A}^4$ contenente Y e S.

Esercizio 2
Si consideri l'endomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definito dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 & -1 \\ -10 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Si dimostri che F è un automorfismo, si calcoli il polinomio caratteristico di F e si trovino i suoi autovalori.

(ii) Trovare gli autovettori di F relativi agli autovalori precedentemente calcolati e dire se la matrice A è diagonalizzabile. In caso affermativo trovare una base diagonalizzante per A.

(iii) Trovare, se esiste, una base $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ di $\mathbb{R}^4$ tale che

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(Nota bene: Se A è una matrice e $c \in \mathbb{R}$, allora $Ax - cx = (A - cI)x$).

Esercizio 3
Sia ρ_1 l'isometria del piano euclideo $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ di equazioni

$$\rho_1 : \begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = -y \end{cases}$$

e sia ρ_2 la rotazione nel piano di centro $A(2,1)$ e di angolo $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(i) Si scrivano le equazioni di $f_1 = \rho_1 \circ \rho_2$ e $f_2 = \rho_2 \circ \rho_1$.

(ii) Mostrare che ρ_1, f_1 e f_2 sono tutte rotazioni del piano e chiamati rispettivamente B, C e D i loro centri, calcolare l'area del quadrilatero $ABCD$.

Si consideri la conica $\mathscr{C}$ in $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ di equazione:

$$\mathscr{C} : x^2 + 6xy + y^2 - 2\sqrt{2}x - 6\sqrt{2}y - 4 = 0.$$

(iii) Classificare la conica $\mathscr{C}$ e scrivere un'isometria che la porta in forma canonica.

Esercizio 4
Sia $\mathbb{P}^2$ il piano proiettivo complesso munito delle coordinate proiettive $[x_0, x_1, x_2]$. Sia r_∞ la retta proiettiva di equazione $x_0 = 0$ e si consideri il piano affine complesso $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus r_\infty$ munito delle coordinate affini (x, y) con $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$. Si consideri la quartica affine $\mathcal{C}$ descritta dall'equazione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^3 - 2y^2 + 2x = 0$$

(i) Dopo avere individuato i punti singolari di $\mathcal{C}$ e della sua chiusura proiettiva si individui la natura di ciascun punto sigolare e le tangenti principali.

(ii) Per ogni tangente t ricavata, calcolare le intersezioni tra t e $\mathcal{C}$ e, in ogni punto di intersezione P, il valore di $\mathcal{I}(t, \mathcal{C}, P)$.

(iii) Si scrivano gli asintoti della quartica $\mathcal{C}$.

Esame scritto di Geometria II

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2014/2015
Appello di giugno 2018

Esercizio 5
Sia $I := [0,1)$ e si consideri lo spazio topologico $X = (I, \tau)$ dove τ è la topologia generata dalla seguente collezione di sottoinsiemi di I:

$$\{(0,\delta) \mid \delta \in (0,1]\}.$$

Si consideri il sottospazio $Y = (\{0\} \cup (1/2, 1), \tau_Y)$ con τ_Y topologia indotta da quella su X.

(i) Dimostrare che X è connesso e T_0.

(ii) X è T_1? X è compatto? X è connesso per archi? X è uno spazio di Hausdorff?

(iii) Calcolare la chiusura di $\{0\}$ e di $\{3/4\}$ in Y.

(iv) Esibire, se possibile, un arco continuo in Y che collega 0 a 3/4.

Esercizio 6
Sia $\mathbb{P}^2$ il piano proiettivo complesso munito delle coordinate proiettive $[x_0, x_1, x_2]$. Sia r_∞ la retta proiettiva di equazione $x_0 = 0$ e si consideri il piano affine complesso $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus r_\infty$ munito delle coordinate affini (x, y) con $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$. Si consideri la quartica affine $\mathcal{C}$ descritta dall'equazione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^3 - 2y^2 + 2x = 0$$

(i) Dopo avere individuato i punti singolari di $\mathcal{C}$ e della sua chiusura proiettiva si individui la natura di ciascun punto sigolare e le tangenti principali.

(ii) Per ogni tangente t ricavata, calcolare le intersezioni tra t e $\mathcal{C}$ e, in ogni punto di intersezione P, il valore di $\mathcal{I}(t, \mathcal{C}, P)$.

(iii) Si scrivano gli asintoti della quartica $\mathcal{C}$.

Soluzione dell'esercizio 1
Scriviamo il sistema in forma matriciale e operiamo delle riduzioni ammissibili:

$$B=[A|\underline{t}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & k+2 & 0 & t_1\\ k-2 & k & -k-4 & 0 & t_2\\ k-1 & k & -2 & 0 & t_3\\ 1 & 0 & -1 & 1 & t_4\end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & t_4\\ 1 & 0 & k+2 & 0 & t_1\\ -1 & 0 & -k-2 & 0 & t_2-t_3\\ k-1 & k & -2 & 0 & t_3\end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix}0 & 0 & -3-k & 1 & t_4-t_1\\ 1 & 0 & k+2 & 0 & t_1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_1+t_2-t_3\\ 0 & k & -2-(k-1)(k+2) & 0 & t_3-(k-1)t_1\end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & k+2 & 0 & t_1\\ 0 & k & -2-(k-1)(k+2) & 0 & t_3-(k-1)t_1\\ 0 & 0 & -3-k & 1 & t_4-t_1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_1+t_2-t_3\end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & t_4\\ 0 & k & -k(k+1) & 0 & t_3-(k-1)t_1\\ 0 & 0 & -(k+3) & 1 & t_4-t_1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_1+t_2-t_3\end{bmatrix} = [A'|\underline{t}'] = B'$$

Poichè abbiamo una riga di 0 avremo che A ha rango al massimo 3 e che il sistema è compatibile se $t_1+t_2-t_3=0$. Andiamo a calcolare il rango di A. Consideriamo la matrice C formata dalla prima e dalla quarta colonna della matrice B' e dalla prima e dalla terza riga. C è la matrice

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

quindi A e B hanno rango almeno 2 per ogni k. Orliamo C aggiungendo la seconda riga e la seconda o la terza colonna. Otteniamo le matrici

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & k & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -k(k+1) & 0\\ 0 & -(k+3) & 1\end{bmatrix}$$

che hanno determinante rispettivamente k e $-k(k+1)$. Quindi il rango di A è 3 se e solo $k\neq 0$. In caso contrario avremo $\mathrm{Rk}(A)=2$. Se $k=0$ la matrice B' diventa

$$B''=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & t_4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_3+t_1\\ 0 & 0 & -3 & 1 & t_4-t_1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & t_1+t_2-t_3\end{bmatrix}$$

quindi il sistema è compatibile se e solo se $t_1+t_2-t_3=t_1+t_3=0$. Riassumendo:

$$U_0:\begin{cases}t_1+t_2-t_3=0\\ t_1+t_3=0\end{cases} \qquad k\neq 0 \Longrightarrow U_k: t_1+t_2-t_3=0.$$

Poniamo $k=0$ e consideriamo l'insieme delle soluzioni del sistema $A\underline{x}=(1,-2,-1,4)$. Siccome $(1,-2,-1,4)$ soddisfa le equazioni di U_0 ricavate prima, sappiamo che S è un piano (poichè, per $k=0$, il rango di A e il rango di $[A|(1,-2,-1,4)^T]$ valgono 2). Dalla matrice B'' ricaviamo anche facilmente delle equazioni parametriche per S:

$$S:\begin{cases}x=z+4-w=-2z+1\\ w=3z+3\end{cases} \rightsquigarrow S:\underline{x}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\3\end{bmatrix}+a\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\3\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

In particolare, la giacitura di S è generata da $v_1 = [-2, 0, 1, 3]$ e da $v_2 = e_2$. La giacitura di X ha equazione cartesiana

$$\begin{cases} y - 4x = 0 \\ w - 3x = 0 \end{cases}$$

Quindi un vettore $v = av_1 + bv_2 = [-2a, b, a, 3a]$, cioè un vettore nella giacitura di S, appartiene alla giacitura di X se e solo se

$$\begin{cases} b + 8a = 0 \\ 3a + 6a = 0 \end{cases}$$

cioè se e solo se $b = a = 0$, cioè in nessun caso, se non ottenendo il vettore nullo. Abbiamo appena dimostrato che l'intersezione delle giaciture di X e di S è solo il vettore nullo. In particolare, non esiste uno spazio affine che è parallelo sia a S che a X, passante per P di dimensione almeno 1. Quindi il più piccolo sottospazio affine che contiene S ed $Y = 0$ è S stesso.

Soluzione dell'esercizio 2 (i) Per verificare che F sia un automorfismo basta verificare che la matrice A abbia determinante non nullo. Infatti,

$$|A| = \left| \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 & -1 \\ -10 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = -2 \left| \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 1 & 9 & 11 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = -2(-88 - 1 - 72 - 1) = 324.$$

Calcoliamo il polinomio caratteristico, facendo il determinante di $|A - \lambda I|$, cioè

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} 8-\lambda & 0 & -1 & -1 \\ -10 & -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 9-\lambda & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \right|$$
$$= (2 + \lambda)(\lambda^3 - 16\lambda^2 + 45\lambda + 162) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 9)^2.$$

Quindi gli autovalori sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 9$.

(ii) Iniziamo calcolando gli autovettori relativi a $\lambda_1 = -2$:

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -1 & -1 \\ -10 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'autospazio V_{-2} è dato dalle equazioni

$$\begin{cases} x = 0 \\ z + w = 0 \end{cases}$$

e dunque una base per esso è data dai due autovettori v_1, v_2

$$V_{-2} = \langle v_1, v_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Per quanto riguarda $\lambda_2 = 9$, abbiamo che

$$A - 9I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -10 & -11 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & -11 & 1 & 111 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 0 & 121 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi l'autospazio V_9 è descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} x = -11w \\ y = 11w \\ z = 10w \end{cases}$$

ed una base per esso è data dall'autovettore v_3

$$V_9 = \langle v_3 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Questo ci dice anche che la molteplicità algebrica e quella geometrica dell'autovalore $\lambda_1 = -2$ sono entrambe uguali a 2, mentre la molteplicità algebrica di $\lambda_2 = 9$ è 2, ma quella geometrica è 1. <u>Allora la matrice NON è diagonalizzabile</u>.

(iii) Dato che sappiamo che $F(b_1) = 9b_1$, $F(b_2) = b_1 + 9b_2$, $F(b_3) = -2b_3$, $F(b_4) = -2b_4$, possiamo già supporre che $b_1 = v_3$, che è un autovettore di autovalore 9 e $b_3 = v_1$ e $b_4 = v_2$, che sono i due autovettori di autovalore -2. Per trovare b_2, basta risolvere il sistema lineare $Ab_2 = b_1 + 9b_2$, cioè $(A - 9I)b_2 = b_1$ e prendere una soluzione che sia linearmente indipendente rispetto gli altri autovettori. Il sistema è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ -10 & -11 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Allora usando l'algoritmo di Gauss-Jordan si arriva alle seguenti matrici equivalenti:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & -11 \\ -10 & -11 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & -11 & 1 & 111 & 111 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 1 \\ 0 & -11 & 1 & 111 & 111 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -11 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Quindi abbiamo che il sistema equivalente è

$$\begin{cases} w = t \\ z = 1 + 10t \\ y = -10 + 11t \\ x = 10 - 11t \end{cases}$$

quindi prendiamo ad esempio come soluzioni $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'unica cosa rimasta da verificare è che i 4 vettori siano linearmente indipendenti:

$$\left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -11 \\ 0 & 1 & 11 & 11 \\ 1 & 0 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = -11.$$

Soluzione dell'esercizio 3 (i) Per prima cosa iniziamo a scrivere le equazioni ρ_2: ogni isometria è scritta nella forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

e sappiamo che, essendo una rotazione, la matrice deve essere ortonormale e con determinante uguale ad 1 ed inoltre deve esserci un solo punto fisso, che è il centro. Quindi sappiamo che $ad - bc = 1$ e che

$$\begin{cases} 2a + b + e = 2 \\ 2c + d + f = 1 \end{cases}$$

Inoltre questa rotazione manda il punto $(2, 0)$ nel punto $(3, 1)$, quindi

$$\begin{cases} 2a + e = 3 \\ 2c + f = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} e = 3 - 2a \\ f = 1 - 2c \end{cases}$$

e sostituendo queste equazioni all'interno di quelle trovate prima

$$\begin{cases} 2a + b + 3 - 2a = 2 \\ 2c + d + 1 - 2c = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -1 \\ d = 0 \end{cases}$$

Ricordando inoltre che la matrice deve essere ortogonale e che $ad - bc = 1$, otteniamo anche che

$$\begin{cases} c = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

E questo consente anche di trovare i valori per $e = 3$ e $f = -1$. Quindi la rotazione cercata ha equazioni

$$\rho_2 : \begin{cases} x' = -y + 3 \\ y' = x - 1 \end{cases}$$

A questo punto è possibile scrivere la composizione delle due isometrie ed otteniamo che

$$f_1 = \rho_1 \circ \rho_2 : \begin{cases} x' = y - 1 \\ y' = -x + 1 \end{cases} \qquad f_2 = \rho_2 \circ \rho_1 : \begin{cases} x' = y + 3 \\ y' = -x + 1 \end{cases}$$

(ii) La matrice associata all'isometria ρ_1 è

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I,$$

che ha chiaramente determinante uguale a 1 ed è ortogonale. Per verificare che è una rotazione basta vedere quanti punti fissi ha questa isometria

$$\begin{cases} x = 2 - x \\ y = -y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

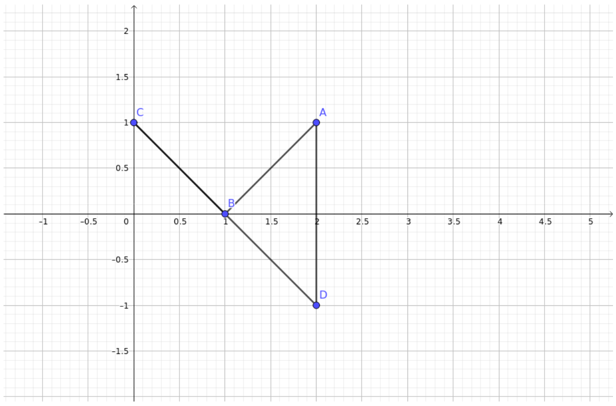
Quindi ρ_1 è una rotazione e il suo centro è $B(1, 0)$.
Procediamo analogamente per f_1 ed f_2: le loro matrici sono entrambe uguali a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

che anche in questo caso è una matrice ortogonale di determinante uguale ad 1. Per verificare i punti fissi basta risolvere i sistemi

$$\begin{cases} x = y - 1 \\ y = -x + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y + 3 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

che hanno come soluzioni $C(0, 1)$ e $D(2, -1)$. La figura che si viene a formare è quindi la seguente:



In realtà la figura che si viene a creare è un triangolo!
Possiamo dunque calcolare l'area del triangolo ABD che è uguale a (definiamo $E(2,0)$):

$$\text{Area}(ABD) = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{BE}}{2} = \frac{|-1-1| \cdot |2-1|}{2} = 1.$$

(iii) La conica $\mathscr{C}$ è associata alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 3 \\ -3\sqrt{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

e chiamiamo A_0 la sottomatrice

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Allora $|A_0| = 1 - 9 = -8 < 0$, mentre

$$|A| = -4(1-9) + \sqrt{2}(-\sqrt{2} + 9\sqrt{2}) - 3\sqrt{2}(-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) = 32 + 16 = 48 \neq 0,$$

allora $\mathscr{C}$ rappresenta un'iperbole non degenere. Per trovare un'isometria che porti $\mathscr{C}$ in forma canonica, iniziamo innanzitutto a diagonalizzare la matrice A_0 e troviamo una base ortonormale diagonalizzante per essa. Il polinomio caratteristico di A_0 è $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda+2)(\lambda-4)$, quindi i due autovalori sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 4$. L'autovettore relativo a $\lambda_1 = -2$ sarà quindi dato dal sistema

$$\begin{cases} 3x + 3y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases} \qquad x = -y,$$

allora $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Analogamente per $\lambda_2 = 4$, abbiamo il sistema

$$\begin{cases} -3x + 3y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \qquad x = y,$$

allora $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Normalizzando i due vettori otteniamo la matrice che rappresenta la rotazione che permette l'eliminazione del termine misto in xy nell'equazione di $\mathscr{C}$:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

che corrisponde alla trasformazione

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x' + y') \end{cases}$$

e applicandola a $\mathscr{C}$ otteniamo che l'equazione della conica dopo la rotazione diventa

$$\mathscr{C}' : x'^2 - 2y'^2 - 2x' + 4y' + 2 = 0.$$

Per eliminare i termini in x' e y' possiamo fare un completamento dei quadrati:

$$\begin{aligned} x'^2 - 2x' + 1 - 2(y'^2 - 2y' + 1) + 3 &= 0 \\ (x'-1)^2 - 2(y'-1)^2 + 3 &= 0, \end{aligned}$$

quindi l'isometria adatta ad eliminare i termini di primo grado è

$$\begin{cases} x'' = x' - 1 \\ y'' = y' - 1 \end{cases}$$

che porta la conica in

$$\mathscr{C}'' : x''^2 - 2y''^2 + 3 = 0,$$

infine per ottenere la forma canonica dobbiamo invertire il valore della x'' con quello della y'' attraverso una simmetria rispetto la bisettrice

$$\begin{cases} x''' = y'' \\ y''' = x'' \end{cases}$$

così che la forma canonica sia

$$\begin{aligned} \mathscr{C}''' : \quad & 2x'''^2 - y'''^2 = 3 \\ & \frac{2}{3}x'''^2 - \frac{1}{3}y'''^2 = 1 \\ & \frac{x'''^2}{\frac{3}{2}} - \frac{y'''^2}{3} = 1. \end{aligned}$$

Per trovare l'isometria che porta $\mathscr{C}$ in $\mathscr{C}'''$, basta comporre le isometrie trovate, ottenendo che

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x''' + y''' + 2) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x''' - y''') \end{cases}$$

Soluzione dell'esercizio 4

Iniziamo calcolando le derivate di f in cerca di punti singolari affini

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x^3 - 6x^2 + 2 = (x-1)^2(2x+1) \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 4y^3 - 4y = 4y(y^2 - 1) \end{aligned}$$

e quindi i punti candidati ad essere singolari sono $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (1, -1)$, $P_3 = (1, 1)$, $P_4 = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $P_5 = \left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ e $P_6 = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. Sostituendo otteniamo che gli unici punti appartenenti alla curva sono P_2 e P_3, che quindi sono gli unici punti singolari affini. Per calcolare la molteplicità d'intersezione di P_2 e le sue tangenti principali consideriamo il polinomio

$$f(x+1, y-1) = x^4 + 2x^3 + y^4 - 4y^3 + 4y^2$$

dal quale otteniamo che P_2 è un punto doppio e che la tangente principale è data da $y = -1$. Calcoliamo la molteplicità d'intersezione tra la retta e la curva in P_2 cercando la molteplicità della soluzione $t = 0$ nel polinomio

$$f(t+1, -1) = t^4 + 2t^3$$

dal quale otteniamo che la molteplicità d'intersezione in P_2 è 3 (quindi P_2 è una cuspide) e che l'altra intersezione tra la retta e la curva è data da $t = -2$ che corrisponde a $R_1 = (-1, -1)$.

Per calcolare la molteplicità d'intersezione di P_3 e le sue tangenti principali consideriamo il polinomio

$$f(x+1, y+1) = x^4 + 2x^3 + y^4 + 4y^3 + 4y^2$$

dal quale otteniamo che P_3 è un punto doppio e che la tangente principale è data da $y = 1$. Calcoliamo la molteplicità d'intersezione tra la retta e la curva in P_3 cercando la molteplicità della soluzione $t = 0$ nel polinomio

$$f(t+1, 1) = t^4 + 2t^3$$

dal quale otteniamo che la molteplicità d'intersezione in P_3 è 3 (quindi P_3 è una cuspide) e che l'altra intersezione tra la retta e la curva è data da $t = -2$ che corrisponde a $R_2 = (-1, 1)$.
Calcoliamo la chiusura proiettiva della curva

$$\overline{\mathcal{C}} = F(x_0, x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2x_0x_1^3 - 2x_0^2x_2^2 + 2x_0^3x_1 = 0$$

dalla quale otteniamo che i punti all'infinito sono dati da quelli tali che $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + ix_2^2)(x_1^2 - ix_2^2) = (x_1 + \sqrt{i}x_2)(x_1 - \sqrt{i}x_2)(x_1 + i\sqrt{i}x_2)(x_1 - i\sqrt{i}x_2) = 0$ e quindi sono dati da $Q_1 = [0, -\sqrt{i}, 1]$, $Q_2 = [0, \sqrt{i}, 1]$, $Q_3 = [0, -i\sqrt{i}, 1]$ e $Q_4 = [0, i\sqrt{i}, 1]$. Visto che la retta x_0 ha quattro intersezioni con la quartica abbiamo dal teorema di Bézout che questi devono essere tutti punti semplici. Per trovare gli asintoti calcoliamo le derivate di $F(x_0, x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_0} &= -2x_1^3 - 4x_0x_2^2 + 6x_0^2x_1 \\
\frac{\partial F}{\partial x_1} &= 4x_1^3 - 6x_1^2x_0 + 2x_0^3 \\
\frac{\partial F}{\partial x_2} &= 4x_2^3 - 4x_2x_0^2
\end{aligned}$$

dal quale troviamo che le tangenti in Q_1, Q_2 e Q_3 sono rispettivamente

$$\begin{aligned}
R_1 :& -2i\sqrt{i}x_0 + 4i\sqrt{i}x_1 + 4x_2 = 0 \\
R_2 :& 2i\sqrt{i}x_0 - 4i\sqrt{i}x_1 + 4x_2 = 0 \\
R_3 :& -2\sqrt{i}x_0 + 4\sqrt{i}x_1 + 4x_2 = 0 \\
R_4 :& 2\sqrt{i}x_0 - 4\sqrt{i}x_1 + 4x_2 = 0
\end{aligned}$$

e quindi abbiamo che gli asintonti della curva sono dati dalle rette in questione deomogenizzate rispetto a x_0 e quindi sono $r_1 : -i\sqrt{i} + 2i\sqrt{i}x + 2y = 0$, $r_2 : i\sqrt{i} - 2i\sqrt{i}x + 2y = 0$, $r_3 : -\sqrt{i} + 2\sqrt{i}x + 2y = 0$ e $r_4 : \sqrt{i} - 2\sqrt{i}x + 2y = 0$.

Soluzione dell'esercizio 5
La topologia τ è composta, oltre che da X e dall'insieme vuoto, di tutti e soli gli insiemi del tipo $(0, \delta)$ con $\delta \in (0, 1]$. Questo vuol dire che ogni aperto di X è anche un aperto di (I, τ_e) dove τ_e è la topologia indotta da quella euclidea su I. Siamo quindi di fronte a due topologie confrontabili con quella di X che è più debole. Tra le varie conseguenze di questo fatto, abbiamo che ogni funzione $f : [0, 1] \to I$ (stiamo munendo $[0, 1]$ della topologia euclidea) che è continua per la topologia euclidea è continua con τ. In particolare, siccome (I, τ_e) è connesso per archi, anche X lo è. Lo stesso vale per la connessione.

Mostriamo che X è T_0. Siano a, b due punti distinti di X. Se $a = 0$ allora ogni intorno di b diverso da X non contiene a. Se entrambi sono diversi da 0 posso assumere $a < b$: l'insieme $(0, (a + b)/2)$ è un aperto in X che contiene a ma non b. Abbiamo mostrato che per ogni coppia di punti esiste un aperto che contiene uno dei due ma non l'altro: questa è la definizione di spazio topologico T_0.

X è compatto infatti se $\{U_j\}_{j \in J}$ è una collezione di aperti di X che copre X allora esiste almeno un $\bar{j} \in J$ tale che $0 \in U_{\bar{j}}$. Ma l'unico aperto di X che contiene 0 è X quindi ogni ricoprimento aperto contiene X. Un sottoricoprimento finito è quindi $\{U_{\bar{j}}\} = \{X\}$.

Mostrare che $P = \{3/4\}$ non è chiuso è semplice infatti il suo complementare non è aperto. Questo basta per concludere che X non è T_1 (e di conseguenza nemmeno di Hausdorff). Siccome gli aperti non banali sono tutti e soli gli insiemi del tipo $(0, \delta)$, i chiusi in X diversi da X e dal vuoto sono del tipo

$$\{0\} \cup [\delta, 1)$$

con $\delta \in (0, 1]$ e $\{0\}$. I chiusi di Y sono della stessa forma con $\delta \in (1/2, 1]$. Di conseguenza la chiusura di P in Y è $\overline{P} = \{0\} \cup [3/4, 1)$.

Il punto $Q = \{0\}$ è chiuso in X infatti il suo complementare è $(0, 1)$ che è un aperto. Di conseguenza Q è anche un chiuso in Y infatti $Q = Q \cap Y$ (tutti i chiusi di Y sono di questo tipo).

Si consideri l'arco $f : [0, 1] \to Y$ tale che $f(0) = 0$ e $f(t) = 1/2 + t/4$ (si ha quindi $f(1) = 3/4$). Mostriamo che f è un arco continuo in Y. Definiamo, per comodità, $U_\delta = (1/2, \delta)$ con $\delta \in (1/2, 1]$ e $U_0 = Y$. Questi sono tutti e soli gli aperti non vuoti di Y. Si ha

$$f^{-1}(U_\delta) = \begin{cases} \text{se } \delta = 0 & f^{-1}(Y) = [0, 1] \\ \text{se } \delta < 3/4 & (0, 4\delta - 2) \\ \text{se } \delta \geq 3/4 & (0, 1] \end{cases}$$

quindi la controimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di $[0, 1]$ con la topologia indotta da quella euclidea: f è un arco continuo in Y che collega 0 e $3/4$.

Soluzione dell'esercizio 6
Si veda la soluzione dell'Esercizio 4.