# Esame scritto di Geometria 2

24 luglio 2013

**Esercizio 1.** *Sia* $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ *lo spazio proiettivo complesso tridimensionale dotato del riferimento proiettivo standard* $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. *Siano* $r(k), s(k)$ *le rette di equazioni*

$$r(k): \begin{cases} x_0 + kx_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad s(k): \begin{cases} (k-1)x_0 - x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 - x_3 = 0 \end{cases}$$

1. *Si determinino i valori di* $k \in \mathbb{C}$ *per cui* $r(k)$ *ed* $s(k)$ *sono complanari. Per tali valori di* $k$ *si scrivano le equazioni cartesiane di un piano che contiene* $r(k)$ *ed* $s(k)$ *e si trovi il punto di intersezione fra* $r(k)$ *ed* $s(k)$.

2. *Sia* $P = [1, 1, 1, 0]$. *Per i valori di* $k \in \mathbb{C}$ *tali che* $r(k)$ *e* $s(k)$ *sono sghembe si determini la retta* $t(k)$ *passante per* $P$ *ed incidente a* $r(k)$ *e* $s(k)$.

**Esercizio 2.** *Sia* $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ *lo spazio affine reale tridimensionale dotato del riferimento affine standard* $(x, y, z)$. *Consideriamo la quadrica* $\mathcal{C}(k)$ *definita come*

$$\mathcal{C}(k): \; x^2 + (k-1)y^2 - 2kxz + 2x + 2y - 1 = 0.$$

1. *Al variare di* $k \in \mathbb{R}$ *si determini il tipo affine della quadrica* $\mathcal{C}(k)$.

2. *Nel caso* $k = 2$ *si determini una affinità* $T : \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ *tale che* $T(\mathcal{C}(2)) = \mathcal{D}(2)$.

**Esercizio 3.** *Sia* $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *il sottospazio dei numeri razionali con la topologia euclidea indotta* $\tau_\varepsilon$. *Sia* $\infty$ *un punto formale* ($\infty \notin X$) *e si ponga* $X^* = X \cup \{\infty\}$. *Si consideri su* $X^*$ *la seguente famiglia*

$$\tau^* = \{U \subset \mathbb{Q} \subset X^* : U \in \tau_\varepsilon\} \cup \{U \subset X^* : (X^* \backslash U) \text{ è un sottoinsime compatto di } X\}.$$

1. *Si dimostri che* $\tau^*$ *è una topologia.*

2. *Si dimostri che* $(X^*, \tau^*)$ *è compatto, connesso e* $T_1$.

3. *Sia* $f : \mathbb{R} \to X^*$ *una mappa continua tale che* $\infty \notin f(\mathbb{R})$. *Si dimostri che* $f$ *è costante.*

**Esercizio 4.** *In* $\mathbb{R}^2$ *dotato della topologia euclidea si consideri il seguente insieme:*

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4, x \neq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2\}.$$

1. *Si determinino chiusura, interno, derivato e frontiera di* $X$.

2. *Si determinino le componenti connesse di* $X$, $\bar{X}$ *e* $\mathring{X}$.

3. *Si dica se* $X$ *e* $\bar{X}$ *sono omeomorfi.*

# Soluzioni

*Soluzione esercizio 1.*

1. Le rette $r(k)$ e $s(k)$ sono complanari se e solo se sono incidenti, cioè se e solo se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ k-1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -(k^2+1) = 0$$

da cui $k = \pm i$ sono i valori richiesti. Sia $P(k)$ l'intersezione fra $r(k)$ ed $s(k)$. Abbiamo

$$P(\pm i) : \begin{cases} x_0 \pm i x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ (\pm i - 1)x_0 - x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 - x_3 = 0. \end{cases}$$

e quindi $P(i) = [1, i, 1, 1]$ e $P(-i) = [1, -i, 1, 1]$.

Notiamo che $[0, 0, 1, 1] \in r(k)$ e $[0, 1, 1, 0] \in s(k)$ e quindi troviamo le equazioni dei piani richiesti calcolando

$$\det \begin{pmatrix} x_0, & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & \pm i & 1 & 1 \end{pmatrix} = \pm i x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

2. Assumiamo $k \neq \pm i$. Calcoliamo il piano $\pi(k)$ passante per $P$ e contenente $r(k)$. Il fascio dei piani contenenti $r(k)$ è dato da

$$\lambda(x_0 + kx_1) + \mu(x_2 - x_3) = 0$$

per $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Imponendo il passaggio per $P$ otteniamo

$$\pi(k) : \ (x_0 + kx_1) - (1 + k)(x_2 - x_3) = 0.$$

Il fascio dei piani contenenti $s(k)$ è dato da

$$\lambda((k-1)x_0 - x_1 + x_2) + \mu(x_0 - x_3) = 0$$

per $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$. Imponendo il passaggio per $P$ otteniamo

$$\pi(k):\ ((k-1)x_0-x_1+x_2)+(1-k)(x_0-x_3)=0.$$

La retta $t(k)$ è dunque

$$t(k):\begin{cases} x_0+kx_1-(1+k)(x_2-x_3)=0\\ -x_1+x_2-(1-k)x_3=0.\end{cases}$$

Notiamo che $t(k)\cap r(k)=[-k^2,k,1,1]$ e $t(k)\cap s(k)=[1,k^2+k+1,k^2+2,1]$.

□

*Soluzione esercizio 2.*

1. Consideriamo le matrici associate a $\mathcal{C}(k)$

$$A(k)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -k\\ 1 & 0 & k-1 & 0\\ 0 & -k & 0 & 0\end{pmatrix}\quad A_0(k)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k\\ 0 & k-1 & 0\\ -k & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Notiamo che $\det A(k)=k^3$ e $\det A_0(k)=k^2(1-k)$. Inoltre il polinomio caratteristico di $A_0(k)$ è

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -k\\ 0 & k-1-\lambda & 0\\ -k & 0 & -\lambda\end{pmatrix}=-(\lambda^2-\lambda-k^2)(\lambda-k+1).$$

Siano $\lambda_1,\lambda_2$ gli autovalori che vengono dal fattore di grado 2 e $\lambda_3=k-1$ il terzo autovalore. Abbiamo i seguenti casi.

- Se $k=0$ la quadrica è degenere, $\mathrm{rk}A(0)=3$ e $\det A_0(0)=0$, da cui deduciamo che $\mathcal{C}(0)$ è un cilindro.
- Se $k=1$ allora $\det A(1)>0$ e $\det A_0(1)=0$, quindi $\mathcal{C}(1)$ è un paraboloide iperbolico.
- Se $k>1$ allora $\det A(k)>0$, $\lambda_3>0$ e gli autovalori di $A_0(k)$ sono discordi, dunque $\mathcal{C}(k)$ è un iperboloide iperbolico.

- Se $0 < k < 1$ allora $\det A(k) > 0$, $\lambda_3 < 0$ e gli autovalori di $A_0(k)$ sono discordi, da cui evinciamo che $\mathcal{C}(k)$ è un ellissoide a punti reali.
- Se $k < 0$ allora $\det A(k) < 0$ e gli autovalori di $A_0(k)$ sono discordi e quindi $\mathcal{C}(k)$ è un ellissoide a punti non reali.

2. Applichiamo il metodo del completamento dei quadrati.

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 - 4xz + 2x + 2y - 1\\
=&(x - 2z + 1)^2 - 4z^2 + 4z - 1 + y^2 + 2y - 1\\
=&(x - 2z + 1)^2 + (y + 1)^2 - 1 - (2z - 1)^2 + 1 - 2.
\end{aligned}$$

Possiamo dunque definire la affinità

$$T : (x, y, z) \mapsto (X, Y, Z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 2z + 1, y + 1, 2z - 1)$$

così che $T(\mathcal{C}(2)) = \mathcal{D}(2)$, dove

$$\mathcal{D}(2) : \quad X^2 + Y^2 - Z^2 = 1.$$

$\square$

*Soluzione esercizio 3.*

1. Chiaramente $\emptyset$ e $X^*$ sono elementi di $\tau^*$.

   Sia $\sigma$ la famiglia degli insiemi compatti di $(\mathbb{Q}, \tau_\varepsilon)$. Siano $\{U_i\}_{i\in I}$ elementi di $\tau^*$. Dividiamo $I$ in due insiemi $I_1$ ed $I_2$ tali che per ogni $i \in I_1$ abbiamo che $U_i \in \tau$ e per ogni $j \in I_2$, $X^*\backslash U_j \in \sigma$. Allora posto $V_1 = \cup_{i\in I_1} U_i$ e $V_2 = \cup_{j\in I_2} U_j$, abbiamo che $V_1 \in \tau_\varepsilon$ (in quanto $\tau_\varepsilon$ è una topologia) e $X^*\backslash V_2 \in \sigma$ in quanto $X^*\backslash V_2 = \cap_{j\in I_2}(X^*\backslash U_j)$ è intersezione di compatti di $X$ e dunque compatto in $X$.

   Se $V_2 = \emptyset$ allora $\cup U_i = V_1 \in \tau_\varepsilon$. Se $V_2 \neq \emptyset$ allora $X^*\backslash(V_1 \cup V_2) = (X^*\backslash V_1) \cap (X^*\backslash V_2) \in \sigma$.

   Supponiamo ora che $I$ sia finito. Per induzione possiamo assumere che $I = \{1, 2\}$. Se $U_1, U_2 \in \tau_\varepsilon$, allora e $U_1 \cap U_2 \in \tau_\varepsilon \subset \tau$. Se $X^*\backslash U_1 \in \sigma$ e $X^*\backslash U_2 \in \sigma$, allora $X^*\backslash(U_1 \cap U_2) = (X^*\backslash U_1) \cup (X^*\backslash U_2)$ è unione di compatti in $(X, \tau_\varepsilon)$ e dunque compatto. Possiamo quindi assumere, per simmetria, che $X^*\backslash U_1 \in \sigma$ e $U_1 \in \tau_\varepsilon$. Allora $U_1 \cap U_2 \in \tau_\varepsilon$.

2. Sia $X^* = U_1 \cup U_2$ con $U_1, U_2$ aperti disgiunti, tale che $\infty \in U_1$. Allora $X^* \backslash U_1 = U_2$ è un aperto compatto di $\mathbb{Q}$, cioè $U_2 = \emptyset$.

   Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $X^*$. Sia $k \in I$ tale che $\infty \in U_k$; allora $X^* \backslash U_k$ è compatto in $(X, \tau_\varepsilon)$ e $\{U_i \cap (X^* \backslash U_k)\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di $X^* \backslash U_k$, possiamo dunque estrarne un sottoricoprimento finito e poi ottenere un sottoricoprimento finito di $X^*$.

   E' facile controllare che ogni punto di $X^*$ è chiuso e quindi $X^*$ è $T_1$.

3. Dato che in $X^* \backslash \{\infty\}$ ogni punto è una componente connessa, l'immagine di $f$ (che è un sottoinsieme di $X^* \backslash \{\infty\}$ per ipotesi) non può che essere un punto.

$\square$

*Soluzione esercizio 4.* 1. Abbiamo

$$\bar{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2\},$$

$$\overset{\circ}{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4, x \neq 0\},$$

$$D(X) = \bar{X}$$

e

$$\partial X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, y^2 < 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2\}.$$

2. $X$ e $\bar{X}$ sono chiaramente connessi, mentre $\overset{\circ}{X}$ si decompone in due componenti connesse nel seguente modo

$$\overset{\circ}{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4, x < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4, x > 0\}.$$

3. $X$ e $\bar{X}$ non sono omeomorfi in quanto il punto $(0, 2)$ disconnette $X$ in quattro componenti connesse, mentre non esiste nessun punto che disconnette $\bar{X}$ in quattro componenti.

$\square$