Geometria 2

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in matematica
A.A. 2010/2011

18 gennaio 2012

Si svolgano i seguenti esercizi.

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}^3$ il 3–spazio euclideo ordinario dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z). Definiamo la retta affine r di $\mathbb{R}^3$ ponendo

$$r : \begin{cases} x - y - z = -2 \\ 3x + y - z = 0. \end{cases}$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Si determini un sistema di equazioni parametriche per la retta affine r' di $\mathbb{R}^3$ passante per $P(6, -1, 0)$, incidente a r e ad essa perpendicolare.

(2) Si determini un'equazione cartesiana del piano affine π di $\mathbb{R}^3$ perpendicolare a r e contenente r'.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ il 3–spazio affine reale numerico dotato del riferimento affine standard di coordinate (x, y, z). Per ogni $k \in \mathbb{R}$, definiamo la quadrica $\mathcal{Q}_k$ di $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ ponendo

$$\mathcal{Q}(k) : x^2 + (k^2 + 1)y^2 + z^2 + 2xy - 2x + 1 = 0.$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Si dimostri che, per ogni $k \in \mathbb{R}$, la quadrica $\mathcal{Q}(k)$ è nondegenere.

(2) Si determini la forma canonica di $\mathcal{Q}(k)$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Sia τ la topologia su $\mathbb{R}$ definita da $\tau = \{(-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$.

(1) Si dica, motivando la risposta, se $(\mathbb{R}, \tau)$ è compatto.

(2) Si dica, motivando la risposta, se $(\mathbb{R}, \tau)$ è di Hausdorff.

(3) Si dica, motivando la risposta, se $(\mathbb{R}, \tau)$ è connesso.

(4) Si provi che una funzione suriettiva $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ è un omeomorfismo se e solo se è strettamente monotona crescente.

Esercizio 4. Si dica, motivando la risposta, quali tra i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono tra loro omeomorfi e quali no.

$$\begin{aligned} H &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} \\ K &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ e } y \geq 0\} \\ L &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\} \end{aligned}$$

Soluzioni

Esercizio 1.

1. Calcoliamo un sistema di equazioni parametriche per r:

$$\begin{cases} x - y - z = -2 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - y - z = -2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} z = 3 - 2y \\ x = 1 - y \end{cases},$$

$$Sol = \{(1 - y, y, 3 - 2y)^t \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\}.$$

Dunque si ha

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Una direzione di r è data da $v := (-1, 1, -2)$. Osserviamo che $P \notin r$, in quanto le coordinate di P non soddisfano le equazioni cartesiane di r stessa. In tal modo, esiste un unico punto $Q \in r$ tale che $\overrightarrow{PQ}$ è perpendicolare a v. Se Q ha coordinate $(1 - t, t, 3 - 2t)$, allora

$$\overrightarrow{PQ} = (1 - t, t, 3 - 2t) - (6, -1, 0) = (-5 - t, t + 1, 3 - 2t)$$

e quindi

$$\overrightarrow{PQ} \perp v \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \langle \overrightarrow{PQ}, v \rangle = 5 + t + t + 1 - 6 + 4t = 6t \quad \Leftrightarrow \quad t = 0.$$

Segue che Q ha coordinate $(1, 0, 3)$. Poiché r' è la retta passante per P e Q, vale

$$r' : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 6 - 5t \\ -1 + t \\ 3t \end{pmatrix}$$

ovvero

$$r' : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 5t \\ -1 + t \\ 3t \end{pmatrix}$$

2. Una normale a π è v. Inoltre π passa per P. Consideriamo il fascio di piani affini di $\mathbb{R}^3$ avente v come normale:

$$\{-x + y - 2z = k\}_{k \in \mathbb{R}}$$

Imponiamo il passaggio da P:

$$-6 - 1 = k \quad \Leftrightarrow \quad k = -7.$$

Dunque un'equazione cartesiana di π è $-x + y - 2z = -7$.

Nota: Un modo alternativo di risolvere questo esercizio è quello di calcolare prima π, poi intersecare π con r ottenendo Q e poi calcolare una parametrizzazione di r.

Esercizio 2.

1. Sia $k \in \mathbb{R}$. La matrice associata alla conica $\mathcal{Q}(k)$ è data da

$$A(k) := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A(k) = -1 \neq 0$, ogni $\mathcal{Q}(k)$ è non degenere.

2. Sia $k \in \mathbb{R}$. Denotiamo con $A_0(k)$ la sottomatrice $A(k)(2,3,4|2,3,4)$ di $A(k)$, cioè

$$A_0(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A_0(k) = k^2$, si ha che $\det A_0(k) = 0$ se e soltanto se $k = 0$. Distinguiamo i casi $k = 0$ e $k \neq 0$.

Supponiamo $k \neq 0$.
Completiamo successivamente i quadrati relativi a x e a y nell'equazione di $\mathcal{Q}(k)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x^2} + (k^2+1)y^2 + z^2 + \mathbf{2xy} - \mathbf{2x} + \mathbf{1} &= (\mathbf{x}+\mathbf{y}-\mathbf{1})^{\mathbf{2}} - \mathbf{y^2} + \mathbf{2y} + (k^2+1)y^2 + z^2 = \\ &= (x+y-1)^2 + \mathbf{k^2y^2} + z^2 + \mathbf{2y} = \\ &= (x+y-1)^2 + \left(\mathbf{ky} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k}}\right)^{\mathbf{2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k^2}} + z^2 = \\ &= (x+y-1)^2 + \left(ky + \frac{1}{k}\right)^2 + z^2 - \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Vale

$$\mathcal{Q}(k): \ (x+y-1)^2 + \left(ky + \frac{1}{k}\right)^2 + z^2 - \frac{1}{k^2} = 0$$

e quindi moltiplicando ambo i membri per k^2, otteniamo:

$$\mathcal{Q}(k): \ (kx+ky-k)^2 + (k^2y+1)^2 + (kz)^2 = 1$$

Eseguiamo il cambiamento di variabili $x_1 := kx + ky - k$, $x_2 := k^2y + 1$, $x_3 := kz$, ottenendo la forma canonica di $\mathcal{Q}(k)$ (vedi Sernesi p.368):

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Quest'ultimo passaggio corrisponde a definire l'affinità $T : \mathbb{A}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ ponendo

$$T(x,y,z) := (kx+ky-k, \ k^2y+1, \ kz)$$

ed osservare che $T(\mathcal{Q}(k)) : \; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Studiamo infine $\mathcal{Q}(0)$.

Completiamo il quadrato relativo a x nell'equazione di $\mathcal{Q}(0)$:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2x + 1 = (x + y - 1)^2 + z^2 - (-2y).$$

Eseguendo il cambiamento di variabili $x_1 := x+y-1$, $x_2 := z$, $x_3 := -2y$, otteniamo la forma canonica di $\mathcal{Q}(0)$ (vedi Sernesi p.368):

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0.$$

Esercizio 3.

1. $(\mathbb{R}, \tau)$ non è compatto: l'unione degli aperti $(-\infty, n)$ per $n \in \mathbb{N}$ dà tutto $\mathbb{R}$ ma un insieme finito di questi aperti, essendo una semiretta, non può ricoprire $\mathbb{R}$.

2. $(\mathbb{R}, \tau)$ non è di Hausdorff: due qualunque aperti non vuoti del tipo $(-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R}$, hanno intersezione non vuota.

3. $(\mathbb{R}, \tau)$ è connesso: due qualunque aperti non vuoti del tipo $(-\infty, a)$, con $a \in \mathbb{R}$, hanno intersezione non vuota.

4. Supponiamo che $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ sia strettamente monotona crescente, allora per ogni $a \in \mathbb{R}$, detto b tale che $f(b) = a$ si ha che $f^{-1}(-\infty.a) = (-\infty, b)$. Infatti se $x \in (-\infty, b)$, dato che f è monotona, allora $f(x) < f(b) = a$ e quindi $f(x) \in (-\infty, a))$, D'altra parte se $x \in f^{-1}(-\infty.a)$ allora $f(x) < a = f(b)$ da cui per la monotonia di f segue che $x < b$ ossia $x \in (-\infty, b)$. Detto in altri termini f è continua. Dato che f è suriettiva e strettamente monotona crescente, è invertibile e anche la sua inversa risulta strettamente monotona crescente e quindi, per quanto visto sopra, anche l'inversa risulta essere continua.

   Viceversa, supponiamo che f sia un omeomorfismo, allora f è iniettiva. Proviamo che è monotona crescente. Se non lo fosse esisterebbero $a < b$ tali che $f(b) < f(a)$. Preso m tale che $f(b) < m < f(a)$, ad esempio $m = (f(a) + f(b))/2$ si avrebbe che $b \in f^{-1}(-\infty, m)$ che, per la continuità di f, sarebbe una semiretta e quindi anche $a \in f^{-1}(-\infty, m)$, dato che $a < b$. D'altra parte $f(a) > m$ e quindi $a \notin f^{-1}(-\infty, m)$, che è assurdo.

Esercizio 4. H e K sono omeomorfi, un omeomorfismo è dato ad esempio da

$$K \longrightarrow H$$

$$(x, y) \longmapsto (log(x), y)$$

la cui inversa È data da

$$H \longrightarrow K$$

$$(x, y) \longmapsto (e^x, y).$$

L non è omeomorfo ad H poiché $L \setminus \{0\}$ non è connesso dato che

$$L \setminus \{0\} = L \cap \{(x, y) \mid x + y > 0\} \cup L \cap \{(x, y) \mid x + y < 0\}$$

mentre si può provare che$H \setminus \{p\}$ è connesso per ogni $p \in H$. Per farlo basta provare che $H \setminus \{p\}$ è connesso per archi, analizzando separatamente i casi in cui $p \in \{y = 0\}$ e $p \in \{y > 0\}$