Esame scritto di Geometria 2

5 settembre 2013

Esercizio 1. *Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo reale tridimensionale dotato del riferimento cartesiano standard (x, y, z). Sia $P(k) = (2k-1, 4, 1) \in \mathbb{E}^3$ e sia r la retta di equazioni*

$$r : \begin{cases} x - z + 2 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

1. *Determinare un'equazione cartesiana del piano $\pi(k)$ passante per $P(k)$ e perpendicolare a r.*
2. *Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determini il punto $P(k)$ di minima distanza da r.*
3. *Siano $k = 1$, $P = P(1)$ e $Q = (-1, 2, 1) \in r$. Si determini l'angolo convesso formato da r e dalla retta passante per P e Q.*

Esercizio 2. *Sia $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ il piano proiettivo complesso dotato del riferimento proiettivo standard $[x_0, x_1, x_2]$. Consideriamo la quadrica $\mathcal{C}(k)$ definita come*

$$\mathcal{C}(k) : \; x_0^2 + 2kx_0x_1 + (k^2-1)x_1^2 + 2x_1x_2 - (4k+1)x_2^2 = 0$$

1. *Al variare di $k \in \mathbb{C}$ si determini la forma canonica $\mathcal{D}(k)$ di $\mathcal{C}(k)$.*
2. *Nei casi in cui $\mathcal{C}(k)$ sia degenere si scrivano le rette in cui si decompone.*
3. *Al variare di $k \in \mathbb{C}$ si determini una proiettività $T_k : \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ tale che $T(\mathcal{C}(k)) = \mathcal{D}(k)$.*

Esercizio 3. *Sia $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ lo spazio euclideo reale. Si consideri la famiglia*

$$\tau = \{X \subset \mathbb{R} : X = \emptyset \text{ oppure } \mathbb{R} \backslash X \text{ è compatto in } (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)\}.$$

1. *Si dimostri che τ è una topologia su $\mathbb{R}$.*
2. *Si dica se $(\mathbb{R}, \tau)$ è connesso, compatto, T_1 o T_2.*
3. *Si dimostri che ogni funzione continua $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ è costante.*

Esercizio 4. *Sia $\mathbb{R}$ lo spazio reale con la topologia euclidea e sia $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ il sottoinsieme dei numeri razionali.*

1. *Si consideri su $\mathbb{R}$ la seguente relazione di equivalenza.*

   $$x \sim_1 y \text{ se e solo se } x = y \text{ oppure } x - y \in \mathbb{Q}.$$

   Si dimostri che lo spazio quoziente $X = \mathbb{R}/\sim_1$ ha la topologia banale.

2. *Si consideri su $\mathbb{R}$ la seguente relazione di equivalenza.*

   $$x \sim_2 y \text{ se e solo se } x = y \text{ oppure } x, y \in \mathbb{Q}.$$

   Si dica se lo spazio quoziente $Y = \mathbb{R}/\sim_2$ è compatto, T_0, T_1 o T_2.

Soluzioni

Soluzione esercizio 1.

1. Troviamo un vettore v direzionale per r. Dato che $S = (0, 2, 2) \in r$ e $Q = (-1, 2, 1) \in r$ possiamo prendere $v = S - Q = (1, 0, 1)$. I piani perpendicolari a r hanno equazione
$$x + z + d = 0$$
con $d \in \mathbb{R}$. Imponendo il passaggio per $P(k)$ otteniamo
$$\pi(k): \quad x + z - 2k = 0.$$

2. Il punto di intersezione fra r e $\pi(k)$ è $Q(k) = (k - 1, 2, k + 1)$. La distanza $d(k)$ fra r e $\pi(k)$ è quindi
$$\begin{aligned} d(k) = d(P(k), Q(k)) &= \sqrt{(2k - 1 - k + 1)^2 + (4 - 2)^2 + (1 - k - 1)^2} \\ &= \sqrt{2k^2 + 4}. \end{aligned}$$
Il minimo per $d(k)$ è dunque 2 e si ottiene per $k = 0$, cioè per il punto $P(0) = (-1, 4, 1)$.

3. Chiamiamo s la retta passante per P e Q. Un vettore direzionale per s è $w = (2, 2, 0)$. L'angolo richiesto è quindi
$$\alpha = \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}\right) = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{2 \cdot 8}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

$\square$

Soluzione esercizio 2.

1. Nel proiettivo complesso la classe di ogni quadrica è determinata dal rango della matrice associata
$$A(k) = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & k^2 - 1 & 1 \\ 0 & 1 & -(4k + 1) \end{pmatrix}.$$
Abbiamo $\det A(k) = 4k$. Se $k = 0$ allora $\mathrm{rk}A(0) = 2$ e dunque la sua forma canonica è
$$\mathcal{D}(0): \quad x_0^2 + x_1^2 = 0.$$
Se $k \neq 0$ allora $A(k)$ ha rango $\mathrm{rk}(A(k)) = 3$ e quindi la sua forma canonica è
$$\mathcal{D}(k): \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

2. La conica $\mathcal{C}(k)$ è degenere per $k = 0$ e abbiamo

$$\begin{aligned} C(k) : x_0^2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 &= x_0^2 - (x_1 + x_2)^2 \\ &= (x_0 - x_1 - x_2)(x_0 + x_1 + x_2). \end{aligned}$$

3. Applichiamo il metodo del completamento dei quadrati.

- Se $k \neq 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(k) : \ & x_0^2 + 2kx_0x_1 + (k^2 - 1)x_1^2 + 2x_1x_2 - (4k + 1)x_2^2 \\ &= (x_0 + kx_1)^2 - k^2x_1^2 + (k^2 - 1)x_1^2 + 2x_1x_2 - (4k + 1)x_2^2 \\ &= (x_0 + kx_1)^2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - (4k + 1)x_2^2 \\ &= (x_0 + kx_1)^2 - (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 - (4k + 1)x_2^2 \\ &= (x_0 + kx_1)^2 - (x_1 + x_2)^2 - 4kx_2^2. \end{aligned}$$

  Possiamo dunque definire la proiettività

$$T_k : [x_0, x_1, x_2] \mapsto [X_0, X_1, X_2] = [x_0 + kx_1, i(x_1 + x_2), \sqrt{-4k}x_2]$$

  così che $T_k(\mathcal{C}(k)) = \mathcal{D}(k)$, dove

$$\mathcal{D}(k) : \quad X_0^2 + X_1^2 + X_2^2.$$

- Se $k = 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(0) : \ & x_0^2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 \\ &= x_0^2 - (x_1 - x_2)^2 \end{aligned}$$

  per cui possiamo definire

$$T_0 : [x_0, x_1, x_2] \mapsto [X_0, X_1, X_2] = [x_0, i(x_1 - x_2), x_2]$$

  così che $T_0(\mathcal{C}(0)) = \mathcal{D}(0)$, dove

$$\mathcal{D}(1) : \quad X_0^2 + X_1^2.$$

$\square$

Soluzione esercizio 3.

1. Chiaramente $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono elementi di τ.

   Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ una famiglia di elementi di τ. Allora $\cup U_i \in \tau$ in quanto $\mathbb{R}\setminus \cup U_i = \cap(\mathbb{R}\setminus U_i)$ è intersezione di compatti e dunque compatto. Se I è finito allora $\mathbb{R}\setminus \cap U_i = \cup(\mathbb{R}\setminus U_i)$ è compatto, in quanto unione finita di compatti, e dunque $\cap U_i \in \tau$.

2. Cominciamo col notare che due aperti non vuoti di $(\mathbb{R}, \tau)$ si intersecano sempre. Supponiamo per assurdo che esistano $U_1, U_2 \in \tau$ aperti disgiunti non vuoti. Allora $\mathbb{R} = (\mathbb{R}\setminus U_1)\cup(\mathbb{R}\setminus U_2)$, che non è possibile, in quanto $\mathbb{R}\setminus U_1$ e $\mathbb{R}\setminus U_2$ sono compatti di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ e quindi limitati. Questo implica immediatamente che $(\mathbb{R}, \tau)$ è connesso e che non è Hausdorff.

   Mostriamo che $(\mathbb{R}, \tau)$ è T_1. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ punti distinti. Allora $\mathbb{R}\setminus\{x\}$ è un aperto che contiene y, ma non x. Analogamente per $\mathbb{R}\setminus\{y\}$ e quindi $(\mathbb{R}, \tau)$ è T_1.

   Dimostriamo infine che $(\mathbb{R}, \tau)$ è compatto. Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un ricoprimento aperto di $\mathbb{R}$. Sia $k \in I$. Allora $\mathbb{R}\setminus U_k$ è compatto in $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ e ogni U_i è aperto per $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$, dunque possiamo ricoprire $\mathbb{R}\setminus U_k$ con un numero finito di U_i e quindi possiamo ottenere un sottoricoprimento finito.

3. Supponiamo per assurdo che f non sia costante e siano x, y due punti distinti nell'immagine di f. Siano U_x, U_y intorni aperti disgiunti rispettivamente di x e y. Allora $f^{-1}(U_x)$ e $f^{-1}(U_y)$ sono aperti disgiunti di $(\mathbb{R}, \tau)$, assurdo per quanto detto sopra.

□

Soluzione esercizio 4.

1. Sia $\pi_1 : \mathbb{R} \to X$ la mappa quoziente e sia U un aperto non vuoto di X. Dato che $\pi_1^{-1}(U)$ è un aperto di $\mathbb{R}$, esiste un intervallo aperto $I = (a, b) \subset \pi_1^{-1}(U)$. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste quindi un numero razionale q tale che $x - q \in I$ (basta prendere $q \in (x - b, x - a)$). Da ciò segue che $U = X$.

2. Sia $\pi_2 : \mathbb{R} \to Y$ la mappa quoziente. Dimostriamo che Y non è compatto. Sia $x \in \mathbb{R}$ irrazionale e per ogni $i \in \mathbb{N}$ consideriamo gli insiemi $U_i = \mathbb{R}\setminus\{x+i, x+i+1, \ldots\}$. Allora, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $\pi_2(U_i)$ è un aperto di

Y (in quanto $\pi_2^{-1}(\pi_2(U_i)) = U_i$). Quindi $\{\pi_2(U_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto di Y da cui non possiamo estrarre nessun sottoricoprimento finito.

Y è T_0, infatti siano x, y punti distinti di Y tali che $x \neq \pi(q)$, dove $q \in \mathbb{Q}$. Allora $Y \backslash \{x\}$ è un aperto di Y che contiene y. Del resto Y non è T_1, in quanto l'intersezione di ogni coppia di aperti non vuoti di Y contiene $\pi_2(q)$ dove $q \in \mathbb{Q}$. Quindi non è neppure T_2.

$\square$