Esame scritto di Geometria 2

8 gennaio 2014

Esercizio 1. *Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo tridimensionale reale dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z). Siano $P = (1, 2, 3)$ e $Q = (1, 0, 1)$ punti di $\mathbb{E}^3$ e sia $\pi(k)$ il piano di equazione*

$$x - kz + 2 = 0.$$

1. *Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si determini l'equazione cartesiana del piano passante per P e parallelo a $\pi(k)$.*
2. *Sia r la retta passante per P e Q. Si determini il valore di k per cui r e $\pi(k)$ sono paralleli.*
3. *Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si determini, in equazioni cartesiane, la retta $r(k)$ passante per Q e perpendicolare a $\pi(k)$.*

Esercizio 2. *Sia $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ lo spazio proiettivo complesso tridimensionale dotato del riferimento proiettivo standard $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Consideriamo la quadrica $\mathcal{C}(k)$ definita come*

$$\mathcal{C}(k): \ x_0^2 + 2kx_0x_1 + (k^2 - 1)x_1^2 + 2x_1x_3 + 2(k - 1)x_2x_3 - x_3^2 = 0.$$

1. *Al variare di $k \in \mathbb{C}$ si determini la forma canonica $\mathcal{D}(k)$ di $\mathcal{C}(k)$.*
2. *Al variare di $k \in \mathbb{C}$ si determini una proiettività $T_k : \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ tale che $T_k(\mathcal{C}(k)) = \mathcal{D}(k)$.*

Esercizio 3. *Su $\mathbb{R}$ (con la topologia euclidea) si consideri la seguente relazione d'equivalenza.*

$$x \sim y \text{ se } y = 2^n x \text{ per qualche } n \in \mathbb{Z} \ .$$

Sia $X = \mathbb{R}/\sim$ lo spazio quoziente.

1. *Si dica se X è connesso, compatto, di Hausdorff.*
2. *Si consideri la stessa relazione su $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ e sia Y il nuovo spazio quoziente. Si dica se Y è connesso e se è compatto.*

Esercizio 4. *Per ogni intero positivo n si consideri la circonferenza*

$$C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - \frac{1}{n})^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$$

e sia $X = \cup_{n=1}^{+\infty} C_n$ l'unione di tali circonferenze dotato della topologia indotta da $\mathbb{R}^2$.

Su $\mathbb{R}$ si consideri la relazione di equivalenza data da $x \sim y$ se e solo se $x = y$ oppure $x, y \in \mathbb{Z}$. Sia $Y = \mathbb{R}/\sim$.

1. *Si dica se X è compatto, connesso, di Hausdorff.*
2. *X e Y sono omeomorfi?*

Soluzioni

Soluzione esercizio 1.

1. Due piani in $\mathbb{E}^3$ sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura. Quindi per ogni $k \in \mathbb{R}$ abbiamo un fascio di piani paralleli a $\pi(k)$
$$\tau(k,t) : x - kz + t = 0$$
dipendenti dal parametro $t \in \mathbb{R}$. La condizione $P \in \tau(k,t)$ si traduce in
$$1 - 3k - 2 + t = 0.$$
Dunque per ogni $k \in \mathbb{R}$ il piano passante per P e parallelo a $\pi(k)$ ha equazione
$$x - kz + 3k - 1 = 0.$$

2. Un vettore direzione della retta r è dato da $v = \overline{QP} = (0, 2, 2)$, mentre la direzione ortogonale al piano $\pi(k)$ è data dal vettore $n(k) = (1, 0, -k)$.

   La retta r ed il piano $\pi(k)$ sono paralleli se e solo se
$$0 = \langle v, n(k) \rangle = -2k,$$
da cui $k = 0$.

3. La direzione ortogonale al piano $\pi(k)$ è data dal vettore $n(k) = (1, 0, -k)$ e dunque la retta $r(k)$ è data parametricamente da $(t + 1, 0, -kt + 1)$. In equazioni cartesiane otteniamo
$$r(k) : \begin{cases} kx + z - k - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$\square$

Soluzione esercizio 2.

1. Nel proiettivo complesso la classe di ogni quadrica è determinata dal rango della matrice associata
$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 0 \\ k & k^2 - 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k - 1 \\ 0 & 1 & k - 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det A = (k-1)^2$ concludiamo che per $k \neq 1$ la quadrica $\mathcal{C}(k)$ ha rango 4 e dunque la sua forma canonica è

$$\mathcal{D}(k): \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Per $k = 1$ abbiamo invece $\mathrm{rk}A = 2$, da cui la forma canonica

$$\mathcal{D}(1): \quad x_0^2 + x_1^2 = 0.$$

2. Distinguiamo i due casi $k \neq 1$ e $k = 1$, e applichiamo il metodo del completamento dei quadrati.

   - Se $k \neq 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(k):\ & x_0^2 + 2kx_0x_1 + (k^2-1)x_1^2 + 2x_1x_3 + 2(k-1)x_2x_3 - x_3^2 \\ =&(x_0+kx_1)^2 - x_1^2 + 2x_1x_3 + 2(k-1)x_2x_3 - x_3^2 \\ =&(x_0+kx_1)^2 - (x_1-x_3)^2 + \frac{(k-1)}{2}(x_2+x_3)^2 - \frac{(k-1)}{2}(x_2-x_3)^2.\end{aligned}$$

     Possiamo dunque definire la proiettività

$$\begin{aligned}T_k : [x_0,&x_1,x_2,x_3] \mapsto [X_0,X_1,X_2,X_3] \\ &= \left[x_0+kx_1, i(x_1-x_3), \sqrt{\frac{(k-1)}{2}}(x_2+x_3), \sqrt{\frac{-(k-1)}{2}}(x_2-x_3)\right]\end{aligned}$$

     così che $T_k(\mathcal{C}(k)) = \mathcal{D}(k)$, dove

$$\mathcal{D}(1) = X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2.$$

   - Se $k = 1$,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(1):\ & x_0^2 + 2x_0x_1 + 2x_1x_3 - x_3^2 \\ =&(x_0+x_1)^2 - x_1^2 + 2x_1x_3 - x_3^2 \\ =&(x_0+x_1)^2 - (x_1-x_3)^2,\end{aligned}$$

     per cui possiamo definire

$$T_1 : [x_0,x_1,x_2,x_3] \mapsto [X_0,X_1,X_2,X_3] = [x_0+x_1, i(x_1-x_3), x_2, x_3]$$

     così che $T_1(\mathcal{C}(1)) = \mathcal{D}(1)$, dove

$$\mathcal{D}(1) = X_0^2 + X_1^2.$$

$\square$

Soluzione esercizio 3.

1. X è connesso perché quoziente di connesso. Sia $\pi : \mathbb{R} \to X$ la mappa quoziente.

   Dimostriamo che l'unico intorno di $\pi(0)$ è tutto X. Sia U un intorno di $\pi(0)$, allora $\pi^{-1}(U)$ è un intorno di 0 e dunque contiene una palla aperta $B(0,r)$. Ma per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $y \in B(0,r)$ tale che $x \sim y$ e quindi $U = X$. Da questo segue immediatamente che X è compatto e non è di Hausdorff.

2. Sia $\phi : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to Y$ la mappa quoziente. $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}^-$ sono aperti saturi non vuoti e disgiunti e quindi Y non è connesso.

   Chiaramente $Y = \phi([-2,-1] \cup [1,2])$ e dunque Y è compatto in quanto immagine di compatto.

$\square$

Soluzione esercizio 4.

1. X è di Hausdorff in quanto è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Inoltre è connesso perché è unione di connessi (le circonferenze C_n) con un punto in comune (l'origine di $\mathbb{R}^2$).

   Dimostriamo che X è compatto. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Allora esiste $k \in I$ tale che $(0,0) \in U_k$. Essendo U_k aperto, esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che tutte le circonferenze di raggio minore di $1/h$ sono contenute in U_k. Le restanti circonferenze sono un numero finito e dunque la loro unione è un compatto (chiuso e limitato). Possiamo così ottenere un sottoricoprimento finito.

2. X e Y non sono omeomorfi, dato che X è compatto ed Y non lo è. Dobbiamo dimostrare che Y non è compatto. Prendiamo come ricoprimento aperto la famiglia $\{\pi(U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ dove $U_0 = (-1,1)$ e $U_n = (n, n+1) \cup (-(n+1), -n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. E' immediato vedere che non basta un numero finito di U_n per ricoprire Y.

$\square$