Geometria A modulo 2
Esercizi svolti in classe
A.A. 2023/2024

Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2023/2024

Esercizi svolti - 26/27 marzo 2024

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo tridimensionale di origine O, dotato della base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e del prodotto scalare standard. Si considerino le seguenti quadruple di punti:

$$A = (1, 2, -1), \qquad B = (2, -1, -1), \qquad C = (0, 0, -1), \qquad M = (3, 1, -1)$$
$$A' = (1, 1, 1), \qquad B' = (1, 1, -1), \qquad C' = (1, 0, 0) \qquad M' = (1, 0, -2).$$

Sia $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ un'affinità tale che $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ e $f(C) = C'$.

(1) Si argomenti se si può verificare $f(M) = M'$;
(2) Si supponga che $f(O) = O$. Trovare l'espressione di f nel riferimento fissato;
(3) Sia P il baricentro del triangolo di vertici A, B e C e sia $P' = f(P)$. Calcolare la distanza del punto P' dalla retta passante per A e B.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo tridimensionale di origine O rispetto al prodotto scalare standard, dotato della base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$. Si considerino le rette in $\mathbb{E}^3$ in forma parametrica:

$$r_k : \begin{cases} x = k^2 + t \\ y = 2 + (k-2)t \\ z = 5 + 2(k-1)t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x = 4 + u \\ y = 2u \\ z = 1 + 6u \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(1) Studiare la posizione reciproca di r_k e s;
(2) Fissato $k = 1$, trovare l'equazione cartesiana della retta r perpendicolare a r_1 e s;
(3) Dimostrare che non esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che le rette r_k e s formano un angolo $\theta = \pi/3$[1];

Esercizio 3. Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo tridimensionale di origine O, dotato della base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$ e del prodotto scalare standard. Si considerino i due piani in $\mathbb{E}^3$ di equazioni:

$$\pi : \quad x + y - 1 = 0$$
$$\pi' : \quad x - y + z + 1 = 0$$

e il punto $P = (1, 2, 1) \in \mathbb{E}^3$.

(1) Si calcoli la distanza del punto P dai piani π e π';
(2) Si discuta l'esistenza di una isometria $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ tale che $f(\pi) = \pi'$ e $f(P) = P$;
(3) Si calcoli la distanza del punto P dalla retta $r = \pi \cap \pi'$.

[1] Si ricordi che $\cos(\pi/3) = 1/2$.

Soluzione 1. (1) Si osservi che M giace sul piano passante per A, B e C. Inoltre, $M = C + (A-C) + (B-C)$. Scriviamo l'affinità f come $f(P) = \varphi(P-C) + C'$, dove $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la parte lineare, unicamente determinata da f e da C. Allora:

$$\begin{aligned} f(M) &= \varphi((A-C)+(B-C)) + C' = \varphi(A-C) + \varphi(B-C) + C' \\ &= (A'-C') + (B'-C') + C' = (1,2,0). \end{aligned}$$

La risposta è dunque negativa.

(2) Scriviamo $f(P) = \varphi(P-C) + C'$. Dobbiamo trovare la mappa lineare φ associata a f, unicamente determinata da f e da C. Poiché i punti A, B, C e O sono affinemente indipendenti, possiamo determinare φ in maniera unica usando il teorema della determinazione di un'applicazione lineare rispetto alla base $\mathcal{B} = \{A-C, B-C, O-C\}$ e alla sua base immagine $\mathcal{B}' = \{A'-C', B'-C', O-C'\}$. Sia $\mathcal{M}$ la matrice associata a φ nella base canonica. Scriviamo:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}^3.$$

Dalla relazione $\varphi(O-C) = \mathcal{M}(0,0,1)^T = (-1,0,0)^T = O - C'$ si ottiene che:

$$c_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le relazioni $\varphi(A-C) = A'-C'$ e $\varphi(B-C) = B'-C'$ implicano che:

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 &= (0,1,1)^T, \\ 2c_1 - c_2 &= (0,1,-1)^T, \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{aligned} 5c_1 = (0,3,-1)^T &\rightsquigarrow c_1 = \left(0, \frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right)^T, \\ c_2 = 2c_1 + (0,-1,1)^T &\rightsquigarrow c_2 = \left(0, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)^T. \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

e quindi:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} + (1,0,0) = \left(-z, \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y, -\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}y\right).$$

(3) Il punto P' è il baricentro del triangolo di vertici A', B' e C', dunque:

$$P' = \left(1, \frac{2}{3}, 0\right).$$

Voglio trovare la distanza tra P' e la retta r per i punti A e B. Considero il piano π passante per P' e contenente r e fisso su di esso il punto A' come origine. Trovo una base ortonormale $\mathcal{O} = \{v_1, v_2\}$ della giacitura di π, in modo tale $v_1 = (B-A)/\|B-A\|$. Poiché la giacitura di π è generata da $\{B-A, P'-A\}$, tramite il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt trovo il vettore:

$$\begin{aligned}
u_2 &= (P' - A) - \frac{\langle P' - A, B - A\rangle}{\|B - A\|^2}(B - A) \\
&= \left(0, -\frac{4}{3}, 1\right)^T - \frac{\langle \left(0, -\frac{4}{3}, 1\right)^T, (1, -3, 0)^T \rangle}{10}(1, -3, 0)^T \\
&= \left(0, -\frac{4}{3}, 1\right)^T - \left(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}, 0\right)^T \\
&= \left(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{15}, 1\right)^T.
\end{aligned}$$

Calcoliamo la norma di u_2:

$$\|u_2\| = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{4}{25\cdot 9} + 1} = \sqrt{\frac{36+4+225}{25\cdot 9}} = \frac{\sqrt{265}}{15} = \frac{\sqrt{5\cdot 53}}{15}.$$

e definisco $v_2 = u_2/\|u_2\|$. Poiché $\mathcal{O}$ è una base ortonormale, la distanza tra P' e r è data da:

$$\begin{aligned}
\langle P' - A, v_2\rangle &= \frac{1}{\|u_2\|}\langle \left(0, -\frac{4}{3}, 1\right)^T, \left(-\frac{2}{5}, -\frac{2}{15}, 1\right)^T \rangle \\
&= \frac{15}{\sqrt{5\cdot 53}}\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{15} + 1\right) = \frac{1}{\sqrt{5\cdot 53}}\left(\frac{8}{3} + 15\right) \\
&= \frac{53}{\sqrt{53}}\cdot\frac{1}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{53}{5}}
\end{aligned}$$

(3) (soluzione alternativa) Come prima, il punto P' è il baricentro del triangolo di vertici A', B' e C', dunque:

$$P' = \left(1, \frac{2}{3}, 0\right).$$

Il baricentro P' giace sul piano $x = 1$, mentre il segmento per A e B giace sul piano $z = -1$. Questi due piani sono ortogonali, e la proiezione del punto P' sul piano $z = -1$ è data dal punto $P'' = \left(1, \frac{2}{3}, -1\right)$. Una volta conosciuta la distanza di P'' dal segmento di estremi A e B, possiamo usare il teorema di Pitagora e concludere. Sia dunque:

$$Q(\lambda) = A + \lambda(B - A) = (1 + \lambda, 2 - 3\lambda, -1)$$

un punto della retta per A e B e:

$$Q'(\mu) = P'' + \mu(B - A)^{\perp} = \left(1 + 3\mu, \frac{2}{3} + \mu, -1\right)$$

un punto della retta passante per P'' e ortogonale al segmento di estremi A e B che giace nel piano $z = -1$. Il punto di intersezione tra queste due rette è dato da una soluzione dell'equazione:

$$Q(\lambda') = Q'(\mu') \iff \begin{cases} \lambda' = 3\mu' \\ 2 - 3\lambda' = \frac{2}{3} + \mu' \end{cases},$$

da cui si ottiene $\mu' = \lambda'/3 = 2/15$. La distanza tra P'' e $Q'(\mu')$ è esattamente la distanza tra P'' e il segmento di estremi A e B, ed è data da:

$$\|P'' - Q'(\mu')\| = \left\|\mu'(3,1,0)^T\right\| = |\mu'|\left\|(3,1,0)^T\right\| = \frac{2}{15}\sqrt{10}.$$

Il teorema di Pitagora ci dice che la distanza tra P' e il segmento per A e B è data da:

$$\sqrt{\|P' - P''\|^2 + \|P'' - Q'(\mu')\|^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{225} \cdot 10} = \sqrt{1 + \frac{8}{45}} = \sqrt{\frac{53}{45}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{53}{5}}.$$

$\square$

Soluzione 2. (1) Abbiamo tre casi:

(a) r_k e s sono parallele. Questo succede se e solo se:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & k-2 & 2k-2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 1$$

e questo accade se e solo se:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & k-2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \ \wedge\ \det\begin{pmatrix} 1 & 2k-2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = 0 \ \wedge\ \det\begin{pmatrix} k-2 & 2k-2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = 0$$

quindi si ha che $k = 4$ è l'unico caso in cui r_k e s sono parallele. Sono anche distinte. Infatti, il punto $P = (16, 2, 5)$ appartiene a r_4 ma $P \notin s$;

(b) r_k e s si intersecano. Questo accade se e solo se esistono $t, u \in \mathbb{R}$ tali che:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} k^2 + t = 4 + u \\ 2 + (k-2)t = 2u \\ 5 + 2(k-1)t = 1 + 6u \end{cases}
&\iff \begin{cases} t = u + (4 - k^2) \\ (k-2)t = 2u - 2 \\ 5 + 2(k-1)t = 1 + 6u \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} (4-k)t = 2(5-k^2) \rightsquigarrow t = 2 \cdot \frac{5-k^2}{4-k} \\ u = \frac{k-2}{2}t + 1 \rightsquigarrow u = 1 + \frac{5-k^2}{4-k} \cdot (k-2) \\ 5 + 2(k-1)t = 1 + 6u \end{cases} \\
&\iff 5 + 4 \cdot \frac{k-1}{4-k} \cdot (5-k^2) = 1 + 6 + 6 \cdot \frac{5-k^2}{4-k} \cdot (k-2) \\
&\iff 5(4-k) + 4(k-1)(5-k^2) = 7(4-k) + 6(5-k^2)(k-2) \\
&\iff (4k - 4 - 6k + 12)(5-k^2) = 2(4-k) \\
&\iff 2(4-k)(5-k^2) = 2(4-k) \\
&\iff 5 - k^2 = 1 \iff k = \pm 2
\end{aligned}$$

dove abbiamo escluso (dividendo per $4-k$) il caso $k=4$ in quanto abbiamo visto sopra che per quel valore le rette sono parallele e distinte;

(c) r_k e s sono sghembe se solo se non sono parallele o incidenti, ossia $k \notin \{-2, 2, 4\}$.

(2) Abbiamo visto che nel caso $k=1$ le rette sono sghembe. La direzione della retta ortogonale è data dal prodotto vettoriale della direzione v_1 di r_1 e v di s, ossia $n = v_1 \times v = (-6, -6, 3)^T$. Sia ora π il piano che contiene la retta r_1 e la direzione ortogonale a r_1 e s. L'ortogonale di π ha direzione data dal prodotto vettoriale tra la direzione di r_1 e n, cioè $v_1 \times n = -3(1, 1, 4)^T$, quindi avrà equazione:

$$\pi: \quad x + y + 4z = q$$

e il valore di q è determinato dal passaggio di un qualunque punto di r_1 per π. In particolare, per ogni $t \in \mathbb{R}$, deve valere:

$$1 + t + 2 - t + 4 \cdot 5 = q = 23$$

e quindi:

$$\pi: \quad x + y + 4z = 23.$$

Stesso discorso per la retta s: sia π' il piano contenente la retta s e di giacitura data dalla direzione di s e dal vettore n ortogonale ad r_1 e s. L'ortogonale di π' ha direzione data dal prodotto vettoriale della direzione di s con n, ossia $v \times n = 6(7, -13/2, 1)^T$. In definitiva, π' avrà equazione:

$$\pi': \quad 7x - \frac{13}{2}y + z = q$$

e il valore di q è determinato dal passaggio di un qualunque punto di s per π'. In particolare, per ogni $u \in \mathbb{R}$, deve valere:

$$7(4+u) - \frac{13}{2} \cdot 2u + 1 + 6u = q = 29$$

e quindi:

$$\pi': \quad 7x - \frac{13}{2}y + z = 29.$$

Infine, la retta r perpendicolare a r_1 e s è data da $r = \pi \cap \pi'$, e dunque ha equazione cartesiana:

$$r: \quad \begin{cases} x + y + 4z = 23 \\ 7x - \frac{13}{2}y + z = 29 \end{cases} .$$

(3) Sia θ_k l'angolo formato dalle rette r_k e s, le quali hanno hanno direzione v_k e v. Si ricordi che:

$$\begin{aligned} \cos\theta_k = \frac{\langle v_k, v \rangle}{\|v_k\|\|v\|} &= \frac{\langle (1, k-2, 2k-2)^T, (1, 2, 6)^T \rangle}{\sqrt{1 + (k-2)^2 + 4(k-1)^2} \cdot \sqrt{1 + 4 + 36}} \\ &= \frac{1 + 2(k-2) + 12(k-1)}{\sqrt{1 + (k-2)^2 + 4(k-1)^2} \cdot \sqrt{41}}. \end{aligned}$$

Abbiamo visto che le rette r_k e s si intersecano se e solo se $k = \pm 2$. Vediamo se, in questi casi, si può verificare che $\theta_k = \pi/3$, cioè $\cos\theta_k = 1/2$.

- $k = 2$:

$$\cos\theta_2 = \frac{1 + 12(2-1)}{\sqrt{1 + 4(2-1)^2} \cdot \sqrt{41}} = \frac{13}{\sqrt{205}} > \frac{13}{\sqrt{4 \cdot 169}} = \frac{1}{2}.$$

- $k=-2$:
$$\cos\theta_{-2} = \frac{1+2(-2-2)+12(-2-1)}{\sqrt{1+(-2-2)^2+4(-2-1)^2}\cdot\sqrt{41}} < 0 < \frac{1}{2}.$$

Pertanto, in nessun caso le due rette si intersecano in un angolo di $\pi/3$.

$\square$

Soluzione 3. (1) Si ricordi che la distanza del punto $P=(p_1,p_2,\dots,p_n)\in\mathbb{A}^n$ dall'iperpiano $a_1x_1+\cdots+a_nx_n+b=0$ è data dalla formula:
$$\frac{|a_1p_1+\cdots+a_np_n+b|}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}.$$
Nel nostro caso, si ottiene:
$$\begin{aligned} d(P,\pi) &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2},\\ d(P,\pi') &= \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

(2) Se tale f esistesse, allora preserverebbe le distanze tra il punto P e i due piani π e π'. Pertanto, si avrebbe:
$$d(P,\pi') = d(f(P),f(\pi)) = d(P,\pi),$$
ma ciò è assurdo per il punto precedente.

(3) La giacitura del fascio di piani perpendicolare alla retta r è generata dai vettori $(1,1,0)^T$ e $(1,-1,1)^T$. Sia dunque:
$$Q_{\lambda\mu} = P + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = (1+\lambda+\mu, 2+\lambda-\mu, 1+\mu)$$
un punto del piano ortogonale a r passante per P. Imponiamo il passaggio per la retta r:
$$\begin{cases}(1+\lambda+\mu)+(2+\lambda-\mu)-1=0\\(1+\lambda+\mu)-(2+\lambda-\mu)+(1+\mu)+1=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=-1\\3\mu+1=0\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda=-1\\\mu=-\frac{1}{3}\end{cases}$$
da cui si ottiene che:
$$d(P,r) = \left\|(-1,-1,0)^T + \left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)^T\right\| = \left\|\left(-\frac{4}{3},-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)^T\right\| = \sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

$\square$