Intersezioni

Raccontare la matematica

Marco Andreatta

La forma delle cose

L'alfabeto della geometria

il Mulino

a Silvia,
che ha dato forma ai miei sogni

ISBN 978-88-15-28009-1

I lettori che desiderano informarsi sui libri e sull'insieme delle attività della Società editrice il Mulino possono consultare il sito Internet: **www.mulino.it**

Redazione e produzione: Edimill srl - www.edimill.it

Indice

Introduzione

Geometria è una parola che viene dal greco, γεομετρια, e significa «misura della terra». Con questo termine si indica una disciplina antica, un sistema di pensiero filosofico tra i più studiati e sofisticati, in grado di fornire interpretazioni del mondo che abitiamo, assieme a tecniche per realizzare le nostre aspettative e i nostri desideri, sviluppatosi attraverso un processo evolutivo che caratterizza la specie umana nei suoi rapporti con lo spazio.

Oggi la geometria è una scienza organizzata in più sottosettori, con molteplici temi di ricerca e problemi aperti, correlata in forme diverse alle altre scienze, con numerose applicazioni nel mondo tecnico e produttivo. Ogni scuola, università o centro di ricerca nel mondo ha un settore, didattico o di ricerca, dedicato alla geometria.

Una storia cominciata oltre tremila anni fa nella quale ritroviamo le caratteristiche dello sviluppo evolutivo del pensiero scientifico, fatto di progressive estensioni del campo di ricerca, con il continuo miglioramento delle tecniche di indagine, contrassegnato da momenti di vere e proprie rivoluzioni del pensiero. Storia corale costruita con il contributo di una moltitudine di scienziati spesso sconosciuti, caratterizzata dall'opera di alcuni grandi maestri che con fantasia e intelligenza ne hanno determinato lo sviluppo. Alcuni tra i più grandi scienziati contemporanei lavorano in questo settore di ricerca e le loro scoperte sono considerate tra le più originali e feconde dell'attuale panorama scientifico.

In questa «presentazione minima» ho voluto tener conto dello sviluppo storico della geometria: ho scelto di narrare alcuni aspetti, a mio avviso fondamentali, attraverso risultati ottenuti da grandi geometri, in una prospettiva temporale, partendo da Talete e concludendo con Grigorij Perelman. Quando possibile ho cercato anche di riportare fedelmente le parole dei protagonisti di questa impresa nel campo della conoscenza. La matematica è anche un linguaggio, quello della scienza; la formulazione di nuove teorie o di nuovi risultati non può essere «neutrale»: riflette il gusto e la sensibilità scientifica del proponente e quasi sempre determina lo sviluppo futuro.

Questa prospettiva non deve però trarre in inganno il lettore e fargli pensare che ciò che legge ha solo una valenza storica. Le teorie descritte sono particolarmente «robuste» e, se applicate al campo a cui fanno riferimento, sono oggi assolutamente valide, nelle stesse forme e negli stessi modi in cui sono state create. La geometria euclidea, ad esempio, che riguarda il piano ordinario e gli oggetti in esso definiti, oggi è esattamente uguale a quella descritta negli *Elementi* da Euclide.

Questo tipo di approccio è probabilmente inevitabile per presentare un sapere antico che, come detto sopra, si è sviluppato ampliando via via gli ambiti di ricerca e affinando le tecniche.

Le pagine del primo capitolo vogliono dare un quadro generale del contenuto del libro assieme ad alcune chiavi di lettura di tipo filosofico o epistemologico.

Il libro si sviluppa quindi attraverso altri tre capitoli, iniziando con concetti più di base e risultati ad essi collegati, proseguendo via via con idee più complesse fino ad arrivare ad alcuni tra i più importanti risultati della geometria dei giorni nostri. Nel secondo capitolo si parla di curve e di come con queste grandi matematici abbiano costruito teorie che sono alla base della geometria. Nel terzo si studiano le superfici e alcuni teoremi sorprendenti che le descrivono; questi hanno influenzato e caratterizzato enormemente la storia del progresso umano. Nell'ultimo capitolo si parla di varietà, gli oggetti geometrici a più dimensioni, che comprendono anche curve e superfici. Un concetto estremamente versatile con il quale la geometria ha potuto affrontare tanti problemi provenienti da altre discipline scientifiche. Alcune delle teorie e dei teoremi proposti hanno già trovato importanti applicazioni; per altri, come spesso succede in matematica, le applicazioni verranno tra qualche decennio, in forme e modi che oggi non immaginiamo ma che appariranno del tutto naturali.

Un sentito ringraziamento ai colleghi Claudio Fontanari, Gianluca Occhetta e Roberto Pignatelli, per le tante discussioni scientifiche e per l'attenta rilettura di alcune parti del libro.

I

Lo spazio, un problema filosofico

La genesi, la geometria greca

Da dove cominciare dunque per parlare di teorie geometriche? Egizi e Babilonesi usavano concetti geometrici non rudimentali. Nella tavoletta d'argilla del periodo paleo-babilonese 1800-1600 a.C. (fig. 1.1), ad esempio, vediamo raffigurato un quadrato di lato 30 e le sue diagonali.

In scrittura cuneiforme e col sistema sessagesimale si possono leggere i numeri 1,414213 e 42,42639, ottime approssimazioni di $\sqrt{2}$ e di $30 \cdot \sqrt{2}$. Sono la misura delle diagonali del quadrato di lato 1 e del quadrato di lato 30; lo si vede con un calcolo che necessita della conoscenza del Teorema di Pitagora, almeno in qualche forma particolare.

FIG. 1.1.

I primi a sviluppare in modo organico la geometria sono i filosofi greci; sono loro che elaborano un pensiero matematico deducendolo da risultati stabiliti in precedenza, risalendo a pochi principi fondativi, in qualche modo evidenti, chiamati *assiomi* o *postulati*. Talete di Mileto (625-547 a.C.) è in questo senso forse la figura più emblematica, costantemente alla ricerca di un *principio primo da cui partire*. Nei manuali di filosofia leggiamo che pose l'*acqua* come elemento primo da cui tutto prende vita. In quelli di geometria si dice che abbia preso come punto di partenza il concetto di *retta*, su cui per altro si fonda il suo famoso Teorema sulla conservazione del rapporto dei segmenti tagliati su una retta qualsiasi da due rette parallele fissate. Hegel afferma che

> [...] il suo pensiero segna l'inizio della filosofia, perché in essa si manifesta la coscienza che l'essenza, la verità, ciò che solo è in sé e per sé, è una sola cosa. Si manifesta il distacco dal dato della percezione sensibile; l'uomo si ritrae da ciò che è immediatamente.

Per questo, come riporta Platone con ironia, si attira i rimproveri di una serva tracia, che lo vede cadere in un pozzo mentre osserva, naso verso il cielo, gli astri:

> conosce quel che succede nel cielo senza preoccuparsi di quel che avviene davanti e sotto i piedi.

Talete, assieme a Democrito e Platone, sono certamente i primi pensatori che potremmo definire *idealisti*, che pongono alla base del loro pensare il mondo delle idee, dalla parola greca ιδεα, che significa «schema o figura geometrica». Con loro nasce il dualismo tra empirismo e idealismo che dà origine ad accesi dibattiti su quale sia la natura della conoscenza; in molti si sono posti e si pongono questa domanda anche per la geometria. Certamente la geometria poggia sull'esperienza dell'uomo che si muove nello spazio: nasce quindi come scienza sperimentale. I risultati raggiunti hanno poi innumerevoli applicazioni tecnologiche di natura pratica. Nel mezzo può capitare, come a Talete secondo Hegel, di manifestare distacco dal dato della percezione sensibile, ritrarsi da ciò che è immediatamente; ma questo o quell'atteggiamento dipende molto dalla formazione culturale e dalla sensibilità del singolo individuo.

Sin dalle origini un approccio troppo idealista alla geometria ha avuto molti critici: ad esempio, sofisti ed empiristi, appoggiati anche da Aristotele, contestavano, in quanto privi di significato, concetti primitivi quali la linea senza spessore, la tangente in un solo punto e non in un tratto. Sesto Empirico (II sec.), della corrente degli scettici, rigettò addirittura la disciplina *in toto* in un libro dal titolo *Adversus geometras*.

In generale la tendenza ideale a una forte astrazione di concetti e metodi ha portato pensatori della comunità allargata dei filosofi a non apprezzare, e magari a non comprendere, la portata delle scoperte della geometria. Per questo il suo inquadramento come sistema filosofico ha sempre avuto fasi controverse e contrapposte, alle quali accenneremo nel seguito.

Un convinto sostenitore della geometria e del suo modo di argomentare fu sicuramente Platone, vissuto prevalentemente ad Atene nel periodo 427-347 a.C.

Si racconta che sulla porta di ingresso dell'Accademia egli fece scrivere la frase seguente: αγεωμετρητος μηδεις εισιτω, «non entri chi non conosce la geometria». Qui si applica il gioco linguistico, permesso dalla lingua greca, di far precedere

Fig. 1.2.

la lettera alpha (α) a una parola, facendole con questo acquisire un significato di privazione o negazione: senza geometria non si accede alla conoscenza.

Questa frase ha avuto grande influenza sulla cultura moderna, da Niccolò Copernico (che la usò come motto nel frontespizio del *De revolutionibus orbium coelestium*) all'American Mathematical Society che l'ha inserita nel suo logo (fig. 1.2).

Oggi ha validità forse maggiore e ancor più la si apprezza, a mio avviso, affiancandola all'osservazione contenuta nel titolo del famoso libro del fisico Eugene P. Wigner *L'irragionevole efficacia della matematica* (dunque anche della geometria) *nelle scienze naturali*.

Non vi è disciplina scientifica contemporanea che possa prescindere dalla geometria. I risultati della fisica dell'universo così come della fisica delle particelle, ad esempio, si formulano attraverso complessi modelli geometrici. La biologia molecolare, e più in generale la scienza della vita, interpreta strutture come il DNA e il genoma nelle loro forme geometriche elicoidali. La comprensione della loro posizione spaziale permette di creare e controllare variazioni delle stesse che danno luogo a importanti applicazioni.

Nell'affermare l'importanza della geometria in una buona educazione Platone sicuramente pensava anche ad attività non strettamente scientifiche. In particolare alla capacità innovativa e rivoluzionaria della geometria nel campo dell'arte, una costante nella storia. La prospettiva nel campo pittorico è una delle conquiste del Rinascimento italiano; oggi, assieme ad altre teorie geometriche come la topologia, rivoluziona il mondo dell'architettura; si pensi ad architetti come Renzo Piano o a Zaha Hadid, che hanno costruito alcuni edifici basandosi su teoremi di geometria.

Platone, per bocca di Socrate nel *Menone*, dialogando sulla possibilità di insegnare la virtù, dà una bella definizione di cosa sia la scienza e quanto essa sia importante:

> Anche le opinioni vere, finché restano, sono cose belle, capaci di realizzare tutto il bene possibile; solo che non acconsentono a rimanere per lungo tempo, e fuggono via dall'anima umana, per cui non hanno un gran significato, a meno che non s'incatenino con un ragionamento fondato sulla causalità. Ma proprio in questo, compagno Menone, consiste l'anamnesi, quella reminiscenza su cui sopra abbiamo convenuto. Se collegate, esse dapprima divengono *scienza* e, quindi, cognizioni stabili. Ecco perché la scienza vale più della retta opinione: la differenza tra scienza e retta opinione sta, appunto, nel collegamento.

Dunque, la scienza è un *ragionamento fondato sulla causalità*, che, proprio per questo, diviene conoscenza stabile e ha maggior valore della retta opinione.

Nel rispondere al petulante Menone, Socrate poi aggiunge:

> Ma poiché tu, per essere libero, non ti dai cura alcuna di dominar te stesso, e ti prepari anzi a comandare me e comandi, ti asseconderò: non c'è altro da fare! Dobbiamo dunque, sembra, esaminare la «qualità» di una cosa di cui non sappiamo ancora quello «che» essa sia. Se non altro, addolcisci almeno un poco il tuo dominio su di me, e

concedimi di esaminare per ipotesi se la virtù sia insegnabile, o cosa sia. E quando dico «per ipotesi», intendo ipotesi nell'uso che spesso ne fanno gli studiosi di geometria, quando qualcuno li interroga, per esempio a proposito di una figura, se questa figura triangolare possa essere iscritta in determinato cerchio, la risposta sarebbe: «Non so ancora se questa figura abbia questa proprietà, ma credo sia di qualche vantaggio alla questione fare un'ipotesi di tal genere: se quest'area è tale per cui, costruendo lungo la sua linea data, manca di una superficie simile a quella che sia stata costruita, il risultato è, a mio avviso, di un certo tipo, di un altro tipo se è impossibile che si verifichino queste situazioni. Voglio dunque per ipotesi dirti ciò che accade riguardo all'iscrizione di quest'area nel cerchio, se sia o meno possibile». E così faremo anche noi riguardo alla virtù, dato che non sappiamo né cosa essa sia né quale sia, esaminiamo per ipotesi questa stessa cosa, se possa o meno essere insegnata, dicendo così: se la virtù è di una certa natura tra le cose che riguardano l'anima, sarebbe insegnabile o non insegnabile?

La scienza esamina la qualità di una cosa a condizione che prima si siano poste alcune ipotesi sulle quali, come fanno i geometri, si conviene in anticipo.

In altre parole, se si vuole uscire dalle semplici opinioni si deve creare una teoria che agisca in due passi: per prima cosa si elenca una lista di *ipotesi*, sulle quali assieme conveniamo. Quindi, attraverso ragionamenti logici deduttivi fondati sulla causalità, si costruisce una conoscenza scientifica. Il *metodo logico-deduttivo* è una delle grandi intuizioni della filosofia greca che caratterizza la storia del pensiero e lo sviluppo della scienza fino ai giorni nostri.

Il metodo delineato da Platone nel *Menone* trova pieno compimento negli *Elementi*, uno dei libri più letti e influenti della storia del pensiero umano. Qui il matematico Euclide (circa 325-265 a.C.), redige una *summa* del pensiero greco nel campo dell'algebra e della geometria, raccogliendo i risultati di Talete, Pitagora, Eudosso e altri.

Un vero manifesto programmatico che inizia fornendo nozioni di base, chiare e non contraddittorie, sotto forma di *definizioni* e *postulati*. Tra queste la definizione di punto, retta, cerchio e angolo, delle quali parleremo diffusamente nel secondo capitolo, e che oggi, a distanza di oltre duemila anni, vengono enunciate nella stessa identica forma.

Successivamente Euclide formula una serie di *nozioni comuni* a cui attenersi nell'uso della logica deduttiva. Ad esempio, il fatto che due cose entrambe uguali a una terza sono uguali tra loro, o che il tutto è più grande di una parte.

Prosegue quindi, con un lavoro impegnativo e sofisticato, dimostrando proposizioni e teoremi e ricavando di conseguenza l'intero corpo della geometria euclidea.

Quest'opera ha rappresentato lo standard massimo per qualità di ragionamento e rigore in matematica per oltre duemila anni. Ed è bene osservare come molti filosofi e scienziati, compreso qualche matematico, non siano a volte stati in grado di capirla; per non parlare dei molti studenti che ancor oggi trovano la geometria euclidea insegnata a scuola del tutto ostica.

Nel XIX secolo però anche gli *Elementi* cominciarono a dare segni di vetustà: vengono sottoposti a critiche fondate, nascono proposte di revisione in linea con le esigenze e i nuovi risultati della scienza moderna.

Tra le osservazioni più significative vi è quella che Euclide fa spesso uso di assunzioni «sperimen-

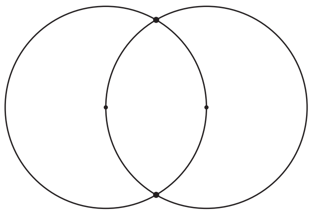


Fig. 1.3.

talmente» plausibili, spesso visibilmente ovvie attraverso un disegno, ma senza inserirle nei postulati. In altri termini assume delle ipotesi che sembrano vere ma non le dichiara ufficialmente.

Ad esempio, proprio nella prima proposizione degli *Elementi*, nella quale si costruisce un triangolo equilatero con dato lato, Euclide assume che due cerchi per cui ogni centro sia sulla circonferenza dell'altro si debbano intersecare. Osservando la figura 1.3 si è indotti a pensare che questo sia ovvio.

Solo nel XIX secolo si nota che questo fatto non segue dalle ipotesi iniziali e dovrebbe quindi essere aggiunto ad esse. Questo porta il matematico tedesco David Hilbert, a cavallo tra '800 e '900, a intraprendere una revisione completa della geometria euclidea, costruendola non più su assiomi derivanti dall'esperienza ma piuttosto su assiomi più astratti come quelli che descrivono i *numeri reali*. In quell'epoca viene costruita una teoria assiomatica di questi numeri, che contengono oltre ai razionali anche gli irrazionali, ovvero numeri non esprimibili nella forma p/q, con p e q interi. In questa teoria i numeri reali sono un insieme completo, ovvero senza buchi, in grado di rappresentare la lunghezza di ogni segmento e anche i punti di intersezione fra due cerchi. La rifondazione di Hilbert rimane comunque all'interno del metodo tracciato da Platone ed Euclide, dichiarando prima le (nuove) ipotesi e poi ragionando a partire da esse, attraverso meccanismi di causalità logici.

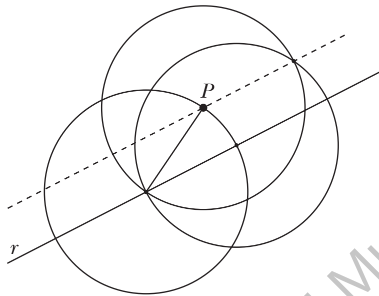


FIG. 1.4.

Un'altra famosa assunzione che Euclide non inserì tra le ipotesi è quella che data una retta e un punto esterno si possa costruire una retta passante per quel punto e parallela alla retta di partenza. Nella proposizione 31 del primo libro degli *Elementi* egli mostra di fatto come costruire questa retta utilizzando una riga e un compasso: Euclide fornisce quindi un'evidenza sperimentale, basata su strumenti di uso comune. Si noti però che in realtà egli non ricava questo fatto logicamente dalle ipotesi precedenti.

La figura 1.4 mostra come costruire una parallela passante per un punto esterno con l'uso di una riga e di un compasso.

Un postulato a riguardo però Euclide lo inserisce: è il famoso quinto postulato, che assicura che questa retta parallela è unica. In molti per anni hanno creduto che questo postulato fosse inutile, ovvero che potesse essere dedotto dai precedenti.

Si dovrà anche in questo caso aspettare il XIX secolo per capire che cosa non funzionasse e come porvi rimedio. In particolare si scopre che la geometria descritta da Euclide negli *Elementi* non è l'unica possibile. Esiste una geometria, detta *sferica*, che possiede un sistema di assiomi e definizioni uguali a quelli di Euclide, ma nella quale la proposizione 31 è falsa, dove cioè *non ci sono rette parallele*. Inoltre, se il quinto postulato viene omesso, quel che rimane è ancora un sistema coerente che realizza una nuova geometria, detta *iperbolica*, nella quale *per ogni punto esterno a una retta passano infinite parallele.* Parleremo di questo nel terzo capitolo.

La lettura degli *Elementi* è un'esperienza piacevole e a volte elettrizzante; gli obiettivi di sobrietà e semplicità che guidano l'azione degli studiosi di geometria però non inducono a una prosa aulica o celebrativa. Tra l'altro non troviamo quasi mai delle spiegazioni sulla genesi e l'ispirazione dei risultati ottenuti. La questione di come nascono i teoremi matematici, in particolare quelli di geometria, di come si arriva alla loro formulazione e quindi alla loro dimostrazione è largamente inevasa negli *Elementi.*

Sono questioni che ricorrono spesso nelle discussioni tra matematici, nella loro corrispondenza o nelle autobiografie, tra cui segnalo quella recentissima di Cédric Villani, medaglia Fields nel 2010 (per chi non lo sapesse, la Fields Medal è un premio assegnato a scienziati nel campo della matematica ogni quattro anni in occasione del convegno plenario dell'Unione matematica internazionale. I destinatari della medaglia, almeno due e al massimo quattro, sono matematici di età inferiore ai 40 anni che si sono distinti per l'eccezionalità dei loro risultati scientifici e per l'apertura che possono dare a futuri sviluppi della ricerca. È considerato il più prestigioso riconoscimento che un matematico possa ricevere), dal titolo *Il teorema vivente.* Oggi tali questioni vengono anche studiate dagli scienziati della mente umana, gli scienziati cognitivi; a volte diventano persino il pretesto con cui costruire momenti di emozione in diversi film di successo, si pensi a *Proof – La prova* o *L'uomo che vide l'infinito* e anche ai più recenti *Diritto di contare* e *Gifted – Il dono del talento*.

Un grande matematico dell'antica Grecia, il siracusano Archimede, affronta più direttamente la questione. Assieme a Leonardo, Galileo, Einstein, è una delle figure simbolo del genio umano; un uomo in dialogo continuo tra il bisogno di conoscenza e la richiesta di soluzioni tecnologiche a tanti problemi concreti. Personaggio poliedrico, finissimo matematico e geometra, ma anche ingegnere e consulente politico del tiranno di Siracusa. La sua fine tragica – fu assassinato dai miliziani di Marcello dopo la presa della città – è una rappresentazione dell'ambivalenza umana tra la fertile capacità innovativa e costruttiva e la tendenza alla distruzione del diverso, di chi esce dagli schemi.

Un personaggio del calibro e con i variegati interessi di Archimede è naturale si ponga la questione su come e perché la mente possa addivenire a tali scoperte.

E l'acuto Plutarco nel descriverlo, oltre a esaltarne le virtù, si chiede implicitamente come egli possa essere così creativo:

> In tutta la geometria antica non è dato incontrare argomenti più difficili e profondi di quelli affrontati da Archimede, espressi in termini più semplici e puri. Alcuni studiosi attribuiscono questo portento alle doti congenite dell'uomo; altri ritengono che il fatto che ogni suo principio sembri raggiunto senza alcuna fatica o difficoltà, è dovuto alla straordinaria elaborazione con cui la ricavò. Per quanto uno cerchi, non potrebbe arrivare mai da solo alle dimostrazioni ch'egli dà; eppure appena le ha apprese da lui, ha la sensazione che sarebbe riuscito egli pure a trovarle, tanto è liscia e rapida la strada per cui conduce a ciò che vuole dimostrare.

Sul problema di come si formino i risultati in matematica Archimede redige un breve trattato, il *Metodo sui teoremi meccanici*. Ecco cosa scrive nella parte introduttiva:

> pensai che sarebbe stato opportuno annotare ed esporre per te nello stesso libro un certo metodo particolare mediante il quale sarai in grado di comprendere questioni matematiche per mezzo della meccanica. Sono convinto che esso non sia meno utile per trovare le dimostrazioni di questi stessi teoremi. Infatti alcune cose, che mi divennero chiare grazie al *metodo meccanico*, sono state in seguito dimostrate geometricamente, perché il loro studio con il metodo suddetto non fornisce una effettiva dimostrazione. Poiché è più facile fornire la dimostrazione quando abbiamo in precedenza acquisito, mediante il metodo, qualche conoscenza sulla questione, piuttosto che trovarla senza alcuna conoscenza precedente. Per questa ragione, nel caso dei teoremi che Eudosso scoprì per primo, cioè quelli sul cono e sulla piramide, per cui il cono è un terzo del cilindro e la piramide un terzo del prisma avente la stessa base e uguale altezza, una parte non piccola del merito deve essere data a Democrito, che fu il primo a stabilire la proprietà di questa figura, anche se senza dimostrazione. [...] Desidero dunque spiegare il metodo per iscritto [...] in parte perché sono persuaso che si dimostrerà molto utile per la matematica; infatti, suppongo che ci sarà nelle future generazioni, come nella presente, chi per mezzo del metodo descritto sarà in grado di trovare altri teoremi che non abbiamo ancora escogitato.

Il metodo meccanico di cui parla Archimede serve per misurare quantità come lunghezza, area o volume di oggetti dello spazio attraverso il confronto con altri oggetti per i quali le misure sono

Fig. 1.5.

note. Il confronto avviene anche cercando l'equilibrio su una bilancia a leva tra i due oggetti: la misura dei due oggetti risulta in proporzione opposta a quella della lunghezza dei rispettivi bracci della bilancia.

La figura 1.5 rappresenta un *exhibit*, esposto al MUSE di Trento in occasione di una mostra proprio su Archimede nel 2017, che dà un'idea di questo metodo, eguagliando l'area di un settore parabolico, ignota, con quella di un triangolo, ben nota.

Il famoso aneddoto a lui attribuito, «Datemi un punto d'appoggio e vi solleverò il mondo», ha sicuramente un fondamento in questo trattato.

Vedremo più in dettaglio nel terzo capitolo come egli abbia utilizzato questo metodo per calcolare il volume e la superficie della sfera, risultato che considererà il più importante della sua vita.

Archimede sostiene che questo metodo non fornisce un'effettiva dimostrazione ma solo l'idea di come debba essere il risultato. Una dimostrazione conclusiva, che chiama *geometrica*, la ottiene quindi con il metodo logico, deduttivo di Euclide. Più precisamente si rifà al metodo di esaustione di Eudosso, contenuto negli *Elementi*; sottolineando che Eudosso perfeziona con la logica le dimostrazioni ottenute da Democrito con metodi di tipo meccanico.

Ma perché mai Archimede introduce la bilancia a bracci uguali nel ragionamento matematico?

Nelle splendide *Lezioni americane* di Italo Calvino, il capitolo sull'*Esattezza* inizia raccontando che

> la precisione per gli antichi Egizi era simboleggiata da una piuma che serviva da peso sul piatto della bilancia dove si pesavano le anime. Quella piuma leggera aveva nome Maat, dea della bilancia. Il geroglifico di Maat indicava anche l'unità di lunghezza, i 33 centimetri del mattone unitario, e anche il tono fondamentale del flauto.

Queste notizie Calvino dice di averle imparate in una conferenza di Giorgio de Santillana.

Archimede, che da Siracusa attraverso una fitta corrispondenza collaborava con studiosi della biblioteca di Alessandria d'Egitto, sicuramente aveva familiarizzato con la cultura egizia. In particolare conosceva il geroglifico con le unità di misura, il culto dell'esattezza e il suo utilizzo nel pesare l'anima con una bilancia a bracci confrontandola con una piuma. Perché non immaginare che fosse dunque naturale per lui estendere questa tecnica da qualcosa di impalpabile come l'anima a qualcosa di molto più concreto come il segmento parabolico o le misure della sfera?

Galileo, Cartesio e Fermat, il superamento della classicità

Come ragiona la mente umana, in particolare nel campo della matematica? La domanda ha avuto molte risposte che hanno influenzato il pensiero in svariati ambiti. Il matematico francese René Descartes, in italiano Cartesio, fa precedere la sua grande opera, *La Géométrie*, da una prefazione intitolata *Discours de la méthode*.

Questo testo, introduttivo al complesso e rivoluzionario trattato sulla geometria, prende in esame quelle che sono, a giudizio di Cartesio, le *regole* basilari da seguire per creare una teoria matematica. Egli scrive:

> quando ero più giovane avevo studiato un poco, tra le parti della filosofia, la logica, e, delle matematiche, l'analisi geometrica e l'algebra, tre arti o scienze che sembrava dovessero contribuire in qualche modo al mio disegno. Ma esaminandole, mi accorsi che, per quanto riguarda la logica, i suoi sillogismi e la maggior parte dei suoi precetti servono, piuttosto che ad apprendere, a spiegare ad altri le cose che si sanno, o anche, come l'arte di Lullo, a parlare senza giudizio di quelle che si ignorano.

Cartesio evidentemente riprende il punto di vista di Archimede secondo il quale la logica, il ragionamento deduttivo, viene lasciato per ultimo, a spiegare cose che già si sanno.

Così quindi prosegue:

> Per quanto mi riguarda poi la geometria degli antichi e l'algebra dei moderni, oltre al fatto che si riferiscono solo a oggetti molto astratti e che non sembrano avere

nessuna utilità, la prima è sempre così strettamente unita alla considerazione delle figure, che non può esercitare l'intelletto senza una gran fatica per l'immaginazione; e nell'altra ci si è resi schiavi di certe regole e formule tanto da farla diventare un'arte confusa e oscura che impaccia l'ingegno invece che una scienza che l'accresce. Perciò pensai che fosse necessario cercare un altro metodo che, raccogliendo i pregi di queste tre, fosse immune dai loro difetti. [...] così, in luogo del gran numero di regole di cui si compone la logica, ritenni che mi sarebbero bastate le quattro seguenti, purché prendessi la ferma e costante decisione di non mancare neppure una volta di osservarle.

Ecco dunque quelle che, in scritti precedenti, aveva chiamato *regulae ad directionem ingenii*.

Nella prima si suggerisce

di non accogliere nulla come vero che non conoscessi con evidenza essere tale: di evitare cioè accuratamente la precipitazione e la prevenzione, e di non comprendere nei miei giudizi nulla che non si presentasse alla mia mente con tale chiarezza e distinzione da non aver alcun motivo per metterlo in dubbio.

Qui si ritrova la filosofia degli assiomi e dei postulati di Euclide, dati per buoni come base di partenza. Per Cartesio l'evidenza non è necessariamente sperimentale ma nasce anche dall'esigenza di chiarezza e distinzione della mente umana; primato della mente che sta alla base anche del famoso *cogito ergo sum*.

La seconda regola consiste nel

dividere ognuna delle difficoltà sotto esame nel maggior numero di parti possibile, e per quanto fosse necessario per un'adeguata soluzione.

Cartesio propone di esaminare un qualcosa non nella sua totalità, altrimenti ci si perde nella complessità, ma dividendolo in parti che possano essere facilmente comprese.

Anche questo passaggio ha richiami a metodologie classiche, come le teorie atomistiche dei presocratici e la teoria delle sezioni coniche nella geometria di Apollonio di Perga. Oggi questa regola è fondamentale per la geometria che analizza e classifica i suoi oggetti attraverso parti indivisibili e descrivibili; faremo qualche esempio nel quarto capitolo.

La terza regola riguarda l'analisi di ritorno, dalle parti al tutto:

> condurre ordinatamente i miei pensieri cominciando dalle cose più semplici e più facili a conoscersi, per salire a poco a poco, come per gradi, sino alla conoscenza delle più complesse; supponendo altresì un ordine tra quelle che non si precedono naturalmente l'un l'altra.

Questa è la parte più complessa, che si realizza solo dopo aver ben compreso e ordinato in difficoltà le due precedenti.

E per ben operare in questa terza parte Cartesio, nella quarta regola, dice di imparare dai geometri, o in generale dai matematici:

> di fare in tutti i casi enumerazioni tanto perfette e rassegne tanto complete, da essere sicuro di non omettere nulla. Quelle lunghe catene di ragionamenti, tutti semplici e facili, di cui sogliono servirsi i geometri per arrivare alle più difficili dimostrazioni [...] e considerando che di tutti coloro che hanno finora cercato le verità nelle scienze solo i matematici han potuto trovare qualche dimostrazione, e cioè delle ragioni certe ed evidenti, non

dubitavo che avrei dovuto incominciare dalle stesse cose prese in esame da loro; anche se non speravo di ricavarne nessun'altra utilità se non quella di abituare la mia mente a nutrirsi di verità e a non contentarsi di false ragioni.

Qui si precisa quella che viene definita dallo stesso Cartesio come *mathesis universalis*, una scienza generale, basata sulla matematica, «che si propone di spiegare tutto ciò che può essere indagato riguardo all'ordine e la misura, senza riferimento ad alcuna materia speciale». Egli sembra proporre che queste regole si possono estendere metodologicamente a tutto il pensiero umano, non solo scientifico. Che ciò possa avere successo in discipline diverse dalla matematica è una questione che è stata dibattuta negli anni da molti filosofi.

Funziona però egregiamente in geometria: nella *Géométrie* infatti Cartesio trova un modo per unificare geometria e algebra, che

per tenerle a mente, o per abbracciarne parecchie in una volta, dovevo esprimerle con cifre, le più compendiose che fosse possibile; con questo mezzo avrei preso tutto il meglio dell'analisi geometrica e dell'algebra, e avrei corretto con l'aiuto dell'una tutti i difetti dell'altra.

Si tratta dell'atto di nascita della geometria analitica, che associa il concetto algebrico di equazione al concetto geometrico di curva, che presenterò in dettaglio nel secondo capitolo.

Ciò rappresenta una svolta rivoluzionaria, tra l'altro in opposizione alla filosofia di Aristotele, che vedeva una netta distinzione, un muro, tra aritmetica e geometria. Questi, negli *Analytica posteriora* (I 7 75a 38-39), scrive: «nelle dimostrazioni non è lecito passare da un genere a un altro. Ad esempio non è lecito dimostrare verità geometriche tramite l'aritmetica».

Lo studio delle opere di Euclide e Cartesio, ed eventualmente anche di Archimede, esaurisce ampiamente la formazione in geometria di buona parte della popolazione istruita, anche a livello universitario. Nelle scuole medie e nei primi anni delle superiori in quasi tutto il mondo si studia la geometria di Euclide e di Archimede. Negli ultimi anni delle superiori e all'università si studia invece la geometria analitica di Cartesio, molto spesso senza fornire una soluzione di continuità, facendo così dimenticare agli studenti quanto imparato in precedenza con Euclide.

Trovo curioso che questa impostazione sia immutabile da decenni e che non sia mai stata messa in atto un'evoluzione nella prassi didattica in modo da permettere la presentazione di teorie geometriche più moderne.

Il metodo delle coordinate e delle equazioni di Cartesio, che avvia uno sviluppo moderno della geometria, è stato possibile non solo grazie al felice progresso dell'algebra del secolo precedente, ma anche al nascere di un nuovo modo di pensare alla scienza introdotto da Galileo Galilei. Questi nasce una trentina d'anni prima di Cartesio, che sicuramente lo lesse e lo studiò, e ne ebbe grande stima e rispetto. Cartesio in verità, per carattere, tendeva a non avere buone opinioni dei colleghi, a eccezione forse di Galileo che comunque considerava «non abbastanza sistematico».

Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze (1638) di Galileo Galilei è l'opera che dà il via in quel secolo al nuovo metodo scientifico, caratterizzato dalla fusione tra linguaggio matematico e indagine filosofica. Si assiste a una rinnovata e più profonda compenetrazione fra i concetti astratti della matematica e il procedere analogico e discorsivo della filosofia naturale che nella geometria trova lo strumento adatto per creare e descrivere le nuove teorie. Si sviluppa in particolare una nuova disciplina, non più solamente speculativa e allo stesso tempo non ancora puramente deduttiva, che darà origine alla fisica moderna.

I *Discorsi* rappresentano la realizzazione di un indirizzo di ricerca che Galileo aveva delineato fin dai primi studi sul moto dei gravi, coniugando quanto ancora resta di vitale nella metodologia aristotelica con l'indagine matematica dei fenomeni fisici proposta anni addietro da Archimede.

Il brano che esprime con maggiore efficacia il punto di vista galileiano, il più noto e ricordato, è quello famosissimo del *Saggiatore*:

> La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri sono triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Il collegamento con il pensiero di Platone e con la sua esortazione a studiare la geometria è evidente; certamente con un vigore nuovo e con attenzione ai problemi naturali del tempo.

Alle stesse conclusioni approda qualche secolo dopo anche Albert Einstein che, ben consapevole di avere costruito nella sua mente una filosofia naturale rivoluzionaria, incontra non poche difficoltà a esplicitarla come teoria scientifica. Dirà di aver provato la frustrante sensazione della mancanza delle parole per esprimersi. Seguendo i consigli di Platone e Galileo, con l'aiuto del collega matematico Marcel Grossmann, pazientemente e con fatica, nel 1912 studia gli ultimi sviluppi della geometria. Con questi riesce finalmente a formulare la sua Teoria della relatività generale, che oggi viene annoverata tra le così dette teorie geometriche (ne parlerò nel quarto capitolo).

L'avvento del «calculus»

La rivoluzione scientifica promossa da Galileo e Cartesio si diffonde rapidamente e diviene ben presto il nuovo paradigma della ricerca. Fioriscono nuove idee in altre scienze e numerose applicazioni. Ci si accorge però che il nuovo metodo ha bisogno di maggiori capacità di calcolo; per questo, pochi decenni dopo, un folto numero di scienziati rivoluzionari, tra i quali Christiaan Huygens, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e numerosi membri della famiglia Bernoulli, danno inizio a quella disciplina matematica che dapprima prende il nome di *calculus* e oggi viene chiamata *analisi matematica*. Il *calculus* nasce per computare lunghezze, aree o volumi di oggetti geometrici nel piano o nello spazio. Vuole essere una scorciatoia rispetto al metodo meccanico e di esaustione di Archimede; Huygens al riguardo scrive:

i matematici non avranno mai abbastanza tempo per leggere tutte le scoperte della geometria, una quantità in crescita continua giorno dopo giorno che sembra diventare enorme in quest'era scientifica, se esse continueranno a venir presentate nelle forme rigorose degli antichi.

Ben presto ci si accorge che con esso si possono provare nuovi e sorprendenti risultati. Si rivela, ad esempio, particolarmente adatto per lo studio delle tangenti e della curvatura di curve o superfici, concetti naturali e intuitivi che, grazie a questo nuovo metodo, diverranno sempre più centrali in geometria. Permette anche di affrontare quelli che oggi vengono definiti *problemi variazionali* o *di minimo*: ad esempio, calcolare il percorso più corto, di lunghezza minima, tra due punti su una superficie, detto *geodetico*. O quello che una massa soggetta a forze esterne percorre nel periodo di tempo più breve: la traiettoria *brachistocrona*.

Un'interessante esperienza, per un lettore curioso e coraggioso, è quella di andare a sfogliare alcuni testi originali di Newton disponibili nella biblioteca digitale dell'Università di Cambridge: https://cudl.lib.cam.ac.uk/collections/newton/.

Scoprirà che l'ingegnosa elaborazione teorica dei nuovi strumenti di calcolo poggia in gran parte su costruzioni di geometria euclidea, non sempre elementari. Che l'invenzione dell'analisi matematica si basa sulla straordinaria abilità di Newton nell'utilizzare la geometria di Euclide.

L'approccio di Leibniz è più astratto, teso non solo alla ricerca della soluzione di problemi di geometria ma anche alla ricerca di «un metodo generale con il quale tutte le verità della ragione siano ridotte ad un calcolo, [...] *quo facto calculemus*». Ritroviamo qui l'utopia di Cartesio e della sua *mathesis univer-*

salis, l'idea che ogni disputa razionale possa essere risolta con un ragionamento matematico. In questo alcuni leggono i germi della futura teoria dell'informazione, o informatica, il primo accenno a una macchina di Turing. Un'utopia che si scontrerà con i Teoremi di incompletezza e indecidibilità di Gödel.

Una base assiomatica soddisfacentemente chiara e coerente per il *calculus* si raggiunge solo alla fine dell'800, con la formalizzazione matematica dell'insieme dei numeri reali, a cui abbiamo accennato sopra, e con il concetto di limite. Con questo si compie un lungo processo iniziato da Archimede: molti risultati in geometria, con l'uso dell'analisi matematica, oggi possono avere una dimostrazione logicamente non contraddittoria e non attaccabile. Ai giorni nostri il volume della sfera e in generale le «misure» degli oggetti nello spazio, si calcolano con un integrale in più variabili.

Nell'*Analysis situs* Leibniz introduce inoltre un nuovo modo di pensare alla geometria, modo che, dopo un lungo e profondo processo di maturazione, è alla base della teoria geometrica contemporanea. Egli si interroga sulla natura ontologica ed epistemologica della geometria e propone di considerarla non come una teoria delle figure ma come una *scienza dello spazio*. Leibniz apre una nuova prospettiva nella quale gli oggetti della geometria non sono solo le figure o le quantità continue, come nella tradizione greca, ma anche lo spazio stesso.

Più precisamente Leibniz considera lo spazio come una struttura e, con una famosa definizione, lo descrive come un *ordine di situazioni*, dove per situazione si intende una relazione (geometrica) tra oggetti. La definizione viene da lui utilizzata nella disputa con Newton, che considera lo spazio come qualcosa di assoluto, non strutturato.

Tra gli oggetti nello spazio possiamo considerare molte figure, ad esempio le rette, i cerchi, ma anche e soprattutto i punti. In questo approccio astratto il punto non è altro che un oggetto concepito come correlato ad altri attraverso una relazione di situazione. Questa relazione può essere caratterizzata, ad esempio, attraverso una distanza: in questo caso due insiemi di punti hanno la stessa situazione reciproca se e solo se hanno la stessa distanza tra loro. Questa definizione di spazio come un ordine di situazioni determinate dalla distanza è probabilmente la prima definizione *naïf* del moderno concetto di spazio metrico, o *struttura metrica*, che verrà introdotta sistematicamente da Riemann nell'800.

Il testo originale di Leibniz e molti approfondimenti si trovano nel recente libro di Vincenzo De Risi *Leibniz on the Parallel Postulate and the Foundations of Geometry*, il quale fa anche notare come queste innovative considerazioni epistemologiche non siano poi state effettivamente applicate dal filosofo matematico nella prassi geometrica, a significare che probabilmente non le aveva comprese fino in fondo.

In particolare, in uno dei tentativi di prova del postulato delle parallele Leibniz osserva che, per il *principio di ragion sufficiente*, non essendoci alcuna ragione valida per supporre che lo spazio non sia uniforme, questo lo deve essere per forza. Egli suppone cioè che non vi siano nello spazio particolari ordini di situazioni, particolari proprietà metriche. Nel linguaggio sviluppato successivamente da Riemann, descritto nel quarto capitolo, Leibniz assume che lo spazio sia piatto, ovvero senza curvatura.

Potremmo dire che egli intravede la possibilità di strutturare geometricamente lo spazio ma poi ritiene che non vi siano ragioni sufficienti per farlo. Le ragioni le impone Riemann, osservando che probabilmente sono determinate dalle forze che agiscono nello spazio; nella Teoria della relatività generale, Einstein assume che in presenza di una massa lo spazio acquista una curvatura (si veda il quarto capitolo).

La geometria diventa moderna

Le osservazioni filosofiche di Leibniz vengono sviluppate matematicamente da Gauss nella Teoria delle superfici, che discuto nel terzo capitolo, e poi nell'opera fondazionale di Riemann, che tratterò nel quarto capitolo. Siamo nell'800, il secolo in cui si assiste a un netto progresso in tutti i campi dello scibile umano, si supera lo spirito e l'impostazione classica e si afferma una visione moderna che tuttora persiste in molte discipline.

Un'idea della rivoluzione avvenuta si ha confrontando le parole usate da Immanuel Kant nella *Critica della ragion pura* con quelle di Bernhard Riemann nella dissertazione *Sulle ipotesi che stanno a fondamento della geometria*.

Scrive Kant:

> Lo spazio non è un concetto che si deriva dalla esperienza esterna [...] la rappresentazione dello spazio deve già esistere come «fondamento» (*a priori*). Di conseguenza la rappresentazione dello spazio non può essere acquisita dalla relazione con fenomeni esterni attraverso l'esperienza.

E pochi anni dopo Riemann:

> Nasce quindi il problema del trovare il dato più semplice dal quale dedurre le relazioni metriche dello spazio […] il sistema più importante è quello concepito a fondamenta della geometria da Euclide. Questo dato è, come tutti i dati, non necessario, ma solo di certezza empirica, è una ipotesi.

Quella di Riemann è considerata una delle più importanti opere in matematica, paragonabile per portata ai contemporanei lavori di Marx in ambito sociale ed economico o a quelli di Darwin nel campo della biologia e della scienza della vita. Mentre i progressi di queste ultime discipline sono presto diventati di uso comune in tanti settori, quelli delle teorie matematiche, anche geometriche, hanno avuto diffusione e applicazione quasi solo nell'ambito delle scienze più pure, senza diventare cultura diffusa. Ciò è dovuto all'eccesiva astrazione necessaria per progredire nel campo della matematica. Lo spostare l'interesse dalle figure dell'usuale spazio tridimensionale alla natura ontologica dello spazio stesso, portando in particolare a pensare strutture ontologiche diverse tra loro, permette certamente ai ricercatori opportunamente preparati di superare i confini spaziali delle proprie discipline ma, per dirla con le parole di Platone su Talete, non aiuta a preoccuparci «di quel che avviene davanti e sotto i piedi».

Tante nuove teorie si sviluppano e si affermano sul finire dell'800 in un'Europa che ha completato la formazione dei suoi Stati nazionali e comincia a crearsi come entità sovranazionale. Probabilmente sono proprio queste nuove teorie e le loro ideologie alla base del processo di unificazione europea, ancora in atto e in discussione. Anche la geometria dà il suo contributo: a questo proposito mi piace segnalare il lavoro di tre matematici, legati alla loro nazione di appartenenza, ma al tempo stesso partecipi della creazione di una cultura comune, sia attraverso scambi scientifici sia attraverso aspri confronti: l'italiano Eugenio Beltrami, il tedesco Felix Klein e il francese Henri Poincaré.

All'origine dello scambio-confronto sta il lavoro di Beltrami, professore a Pavia e nel 1899 anche senatore del neocostituito Regno d'Italia. Egli incontra, a Pisa e poi a Gottinga, Riemann e inizia uno studio approfondito del suo lavoro assieme al collega e amico Felice Casorati. I due afferrano l'enorme portata innovativa dell'opera di Riemann ma al tempo stesso avvertono la complessità che sotto si cela. Beltrami scrive un *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* e nell'introduzione afferma:

> in questi ultimi tempi il pubblico matematico ha incominciato ad occuparsi di alcuni nuovi concetti i quali sembrano destinati, in caso che prevalgano, a mutare profondamente tutto l'ordito della classica geometria.

Nel suo saggio Beltrami parte da alcune righe della dissertazione di Riemann, le amplia dandone un'interpretazione che permette di introdurre il primo vero modello di geometria iperbolica, una geometria non euclidea, per la quale non vale il postulato delle parallele (nel quarto capitolo analizzo questa costruzione in maggior dettaglio).

Beltrami trascorre alcuni periodi di ricerca a Gottinga, anche dopo la morte di Riemann, e dialoga di geometria con Felix Klein. Quest'ultimo, in un ben noto lavoro, ripropone la costruzione di un modello di geometria iperbolica esattamente identico a quello contenuto in una sezione del lavoro di Beltrami, scritto in italiano, senza minimamente citarlo.

Contemporaneamente Poincaré costruisce un modello iperbolico, diverso da quello di Klein, ma anche questo identico a un modello contenuto nel saggio di Beltrami.

Senza mai esplicitamente citare Beltrami e il suo lavoro, i due iniziano una *querelle* sull'effettiva paternità di questa scoperta, in seguito alla quale Klein, vittima di un esaurimento nervoso, si ritira dalla matematica attiva.

Il ruolo di Beltrami come vero padre di questi modelli è stato recentemente evidenziato dal matematico statunitense John Milnor, vincitore tra l'altro della Fields Medal nel 1962.

Possiamo dunque dire che la scoperta delle geometrie non euclidee è tutta europea – nel senso che oggi si attribuisce alla parola *Europa* – anche se non proprio cristallina nelle attribuzioni. Nel quarto capitolo espongo alcune delle idee di Klein e Poincaré, due matematici molto prolifici le cui opere hanno determinato il progresso della geometria fino ai giorni nostri, con un forte impatto sulla cultura contemporanea.

Nel 1902 Poincaré, a margine dei suoi ragionamenti sulle novità introdotte da Riemann e sulle diverse teorie geometriche che da queste sarebbero potute nascere, scrive un celebre commento: «una geometria non può essere più vera di un'altra, può essere solo più conveniente».

Su questo inciampa Benedetto Croce che, capendo poco di matematica, sentenzia:

le scienze naturali e le discipline matematiche, di buona grazia, hanno ceduto alla filosofia il privilegio della verità, ed esse rassegnatamente, o addirittura sorridendo, confessano che i loro concetti sono concetti di comodo e di pratica utilità, che non hanno niente a vedere con la meditazione del vero.

Il pensiero e l'operato di Croce, come è ben noto, ostacola lo sviluppo e l'insegnamento della cultura scientifica in Italia. In particolare la sua incomprensione, che si risolve poi in antipatia, verso il pensiero matematico e geometrico lo porta a scontrarsi ripetutamente con il matematico e filosofo Federigo Enriques. Quest'ultimo, in qualità di presidente della Società italiana di filosofia, organizza a Bologna nel 1911 il IV Convegno internazionale di filosofia al quale invita tra l'altro filosofi del rango di Bergson, Einstein e Poincaré. Croce, tra gli invitati al convegno, criticò ferocemente Enriques per aver dato troppo spazio alla scienza. La polemica continuò per parecchi anni, supportata anche dal discepolo di Croce, il filosofo e ministro dell'Istruzione Giovanni Gentile, e portò alla sconfitta (temporanea) delle interessanti e moderne idee di Enriques sulla riforma della scuola e dell'università a favore della ben nota riforma Gentile.

A conclusione di questo capitolo introduttivo segnalo al lettore le voci dell'*Enciclopedia Italiana* sui concetti di curva e superficie. Sono redatte in gran parte da Enriques e rappresentano, a mio avviso, uno splendido esempio di divulgazione scientifica di alto livello. Riguardo alle idee che stanno alla base della geometria, di cui abbiamo parlato all'inizio e tanto parleremo nel corso del libro, Enriques scrive:

in ultima analisi, quando tentiamo di derivare dall'esperienza fisica i postulati della linea [o di altre idee geometriche, *N.d.A.*], dobbiamo tener conto, non tanto dei dati di fatto dell'esperienza stessa, quanto delle esigenze semplificatrici della nostra mente, che in essi si rispecchiano.

Con questa frase invito il lettore del libro a interrogarsi sulla questione se davvero, in ultima analisi, l'approccio umano verso la comprensione dello spazio sia volto a *semplificare* le innumerevoli diversità e complessità offerte dal mondo naturale. A introdurre idee e concetti «semplici» (ma non necessariamente elementari), che permettono una visione unitaria di tanti fenomeni e la possibilità di classificare in un numero finito di casi l'infinita molteplicità delle forme della natura.

L'osservazione di Enriques credo possa applicarsi anche alla questione di come elaboriamo nella nostra mente il gusto estetico, di come arriviamo alla decisione che qualcosa è bello. Spesso, se non sempre, una cosa piace se è semplice e immediata e se permette inoltre di evocare forme e strutture complesse. Non sorprende dunque se tanti studiosi della geometria attribuiscano alle scoperte una particolare bellezza; e proseguano nelle ricerche al solo scopo dichiarato di renderle ancora più belle.

Molti matematici paragonano la ricerca matematica a un'escursione in montagna. Recentemente la matematica iraniana Maryam Mirzakhani in un'intervista ha dichiarato:

Sono una pensatrice lenta, che prende un problema apparentemente insolubile e lo doma con la perseveranza, osservandolo da punti di vista diversi e nuovi. [...] Il momento più bello è quello della scoperta, la sensazione di essere arrivata in cima a una vetta e di godersi un panorama inviolato. Ma per la maggior parte del tempo fare matematica per me è come una lunga escursione, senza un sentiero tracciato né un traguardo visibile. […] Spesso gli studenti prendono in antipatia equazioni e figure geometriche senza nemmeno provare a farsi sedurre. La bellezza della matematica si mostra solo a chi la insegue con la pazienza. […] Devi ignorare i frutti facili da cogliere, quelli nella parte bassa dell'albero.

Mirzakhani è la prima donna, e l'unica al momento, che abbia ricevuto la medaglia Fields, nel 2014.

Nello stesso periodo in cui Enriques scopriva il magico mondo delle superfici algebriche (si veda il quarto capitolo), una guida alpina della mia terra, Bruno Detassis, conquistava nuove cime nelle Dolomiti di Brenta, aprendo *vie lungo le pareti* che oggi portano ancora il suo nome. Oltre duecento vie tra cui la famosa Via delle Guide, sul Crozzon di Brenta, e la Pala del Rifugio, sulle Pale di San Martino, quest'ultima in collaborazione con Ettore Castiglioni.

Detassis, secondo quanto raccontato dai suoi allievi arrampicatori, sosteneva che per scalare fossero sì necessarie una buona preparazione fisica e una gran passione, ma soprattutto un'ottima mente. Per spiegare il suo modo di scegliere il percorso su una parete usava spesso il seguente aforisma: «cercare il facile nel difficile». La stessa impostazione di Enriques!

Mi auguro che i capitoli di questo libro siano una piacevole guida delle vie disegnate lungo le pareti della geometria da famosi matematici che, nel corso di oltre duemila anni, hanno ricercato tracciati «facili nel difficile». Spero possano essere d'aiuto per percorrerle con passione e piacere.

II

Curve

In principio era il punto

L'origine di tutto è il punto; così la pensa anche Euclide che inizia gli *Elementi* proprio con la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1. Un punto è ciò che non ha parti.

Il punto, l'oggetto geometrico più semplice, è posto al principio della trattazione come monade inziale, ciò da cui partire per costruire tutta la geometria.

La specifica *ciò che non ha parti*, ovvero che non è ulteriormente suddivisibile, diventa però anche un'ipotesi fondazionale per il metodo logico-deduttivo. In base a questo metodo siamo abituati, da Euclide in poi, a prendere oggetti complessi e studiarli scomponendoli in parti più semplici; è procedimento tipico e probabilmente caratteristico della nostra specie umana.

Nella definizione si postula che oltre il punto non si può scendere, non è ulteriormente semplificabile.

Ciò non toglie, come vedremo nel seguito, che nel processo di riduzione al punto ci possiamo portare appresso delle specifiche dell'oggetto più complesso, che arricchiranno il punto di proprietà fondamentali per la teoria che stiamo considerando.

Questo «accordo logico» di partenza è presente in quasi ogni teoria conoscitiva umana. Si pensi ad esempio alla moderna teoria del Big Bang con la quale la fisica cerca di spiegare la nascita e lo sviluppo del nostro universo. In essa si postula un inizio in cui tutto è concentrato in un punto; in frazioni infinitesime di secondi questo punto esplode e dà origine al *Tutto*. Anche in questa teoria, del punto iniziale e dei primi infinitesimi di secondo nulla si può dire.

Qualcosa di più riescono a dire, con il linguaggio dell'arte, poeti e scrittori, come ad esempio Italo Calvino nel racconto *Tutto in un punto*, il quarto della *Cosmicomiche*:

> In principio Qfwfq stava concentrato in un punto insieme a tutte le altre persone esistenti. Non proprio insieme, bensì sovrapposti: ogni punto di una persona coincideva con gli altri punti di tutte le altre persone. Questa situazione non favoriva la socializzazione: alla fine ci si riduceva solo al «buongiorno» e «buonasera» e si avevano amicizie solo con un numero ristretto di persone. Tra le persone si poteva individuare la signora Ph(i)Nko, ricordata molto bene da Qfwfq per la sua bellezza e la sua simpatia. Un giorno la bella signora Ph(i)Nko disse: «Ragazzi, avessi un po' di spazio, come mi piacerebbe farvi le tagliatelle!». Tutti notarono il movimento delle sue braccia e lo spazio che occupavano. In quel momento il punto, contenente tutti, si espanse, catapultò tutti ai quattro angoli dell'universo e dissolse la signora in luce e calore. Proprio lei che in un impeto d'amore generale aveva dato il via al tempo, allo spazio, all'universo e alla gravitazione universale.

In questo bel brano Calvino fa capire che, pur non essendo ulteriormente riducibile, il punto contiene informazioni che sono frutto di una storia futura, di concetti che si svilupperanno successivamente, e che, nel processo di conoscenza, dovremo considerare.

Nel punto Calvino mette parole come socializzazione, movimento, luce, calore… e pure le tagliatelle!

Tanta geometria moderna si occupa di punti, o meglio di *punti grassi* (*fat points*) o *schemi zero-dimensionali,* con cui si intende punti che incorporano caratteristiche e qualità di oggetti più complessi. Per ora consideriamo il punto come nella definizione di Euclide, qualcosa da cui partire ma di cui non dire altro. Nel seguito, studiando oggetti geometrici più sofisticati, potrà venire utile parlare della natura dei loro punti, in particolare di alcuni più significativi.

Di nuovo in Grecia, l'origine delle cose

Le curve sono argomento di studio geometrico molto antico e centrale in tutta la storia del pensiero. Nell'uso comune curva significa linea non retta; nell'evoluzione del linguaggio matematico, che tende sempre a eliminare le eccezioni affermando una veduta di continuità, la parola *curva* è divenuta sinonimo di linea, e la retta è un caso particolare di linea.

Nell'antica Grecia, in particolare nella scuola di Pitagora (fondata nel 540 a.C.) a Metaponto, la curva si pensava costituita di punti-monadi, corpiccioli elementari di piccola estensione; a quel tempo la conoscenza era di tipo empirico, non ancora «razionalizzata» o resa astratta.

In parallelo, nella vicina scuola di Elea, ora in provincia di Napoli, Parmenide e Zenone studiavano concetti geometrici da un punto di vista sempre più ideale, sostenendo che il punto è senza estensione, la linea non si ottiene sommando dei punti ed è pura lunghezza senza larghezza, la superficie non ha spessore, e così via.

Come ci raccontano i manuali di filosofia la direzione razionalista e astratta viene criticata e osteggiata dai sofisti, come Protagora d'Abdera. Questi sosteneva, ad esempio, che le vere linee hanno una certa larghezza e differiscono dal concetto dei matematici. Il cerchio deve avere non un punto, ma un piccolo tratto in comune con la tangente, come si evince empiricamente osservando una ruota che insiste per un piccolo tratto sul fondo stradale.

Aristotele fa spesso sue le osservazioni critiche dei sofisti; e si arriva in seguito a prese di posizione estreme come quella di Sesto Empirico, della corrente degli scettici, che scrive addirittura un libro dal titolo *Adversus geometras*.

Nel frattempo i filosofi razionalisti, come Democrito e Platone, si ispirano sempre più alla matematica e alla geometria, sostenendo la realtà degli intellegibili o delle idee; la parola greca ιδεα (idea) significa originariamente «schema o figura matematica».

Lo svilupparsi, a fianco della visione empirica, di una visione più razionale o ideale avviene in contemporanea a un altro grande mutamento culturale. Il sapere, discusso e tramandato per via orale (*epos*), comincia a essere scritto (*logos*) e a poter essere quindi conservato e scambiato attraverso papiri. L'affiancarsi del *logos* all'*epos*, simbolicamente fatto iniziare con

Omero, trova in Platone, Archimede, Euclide e altri una perfetta realizzazione.

Gli *Elementi* di Euclide, assieme al *Metodo* di Archimede o alle *Coniche* di Apollonio, sono i primi esempi di formalizzazione scritta di un metodo che consiste nel prendere alcuni concetti fondamentali, insiti in qualche modo nella mente umana, magari attraverso l'esperienza, e di formalizzarli in maniera astratta e *a priori* attraverso poche definizioni e postulati, chiari e non contraddittori. La seconda definizione degli *Elementi* è quella di curva, o linea.

DEFINIZIONE 2. Una linea è lunghezza senza larghezza.

Poco oltre troviamo un'altra definizione di linea.

DEFINIZIONE 5. Una superficie è ciò che ha lunghezza e larghezza.

DEFINIZIONE 6. Gli estremi di una superficie sono linee.

Notiamo qui una dicotomia spesso presente in geometria: la linea può essere descritta in sé o come parte di un altro oggetto.

Tra le curve Euclide approfondisce subito il concetto di (linea) retta, con una definizione e due postulati.

DEFINIZIONE 4. Una linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti.

POSTULATO 1. Tracciare una retta da un punto a un altro punto.

POSTULATO 2. Prolungare senza soluzione di continuità una retta limitata in una retta.

Le definizioni 2 e 4 assieme ai postulati 1 e 2 definiscono in maniera precisa la retta. Il punto di vista di Euclide, che è poi ancora quello della geometria contemporanea, può essere così riassunto: ognuno di noi ha un'idea di cosa sia una linea retta, ma per discutere e sviluppare una conoscenza comune formalizziamo quattro caratteristiche che questa retta deve avere e su queste tutti concordiamo senza ambiguità.

A distanza di oltre duemila anni, l'approccio alla geometria è identico: un libro di testo per le scuole primarie scritto dal collega Herbert Clemens, assieme al figlio, *Geometry for the Classroom*, inizia con la definizione di retta come oggetto caratterizzato dalle seguenti proprietà:

i) Si estende all'infinito in due direzioni (postulato 1).

ii) Dati due punti distinti esiste una e una sola retta per i due punti (postulato 2).

iii) Dati due punti su una retta il cammino più breve per andare da un punto all'altro è dato dalla retta stessa (la retta è una geodetica) (definizione 4).

iv) Se togliamo un punto da una retta rimangono due pezzi separati (definizione 2).

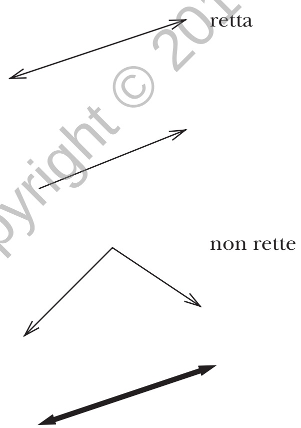


Fig. 2.1.

Dunque, con una scelta leggermente diversa delle parole, troviamo gli stessi concetti di Euclide.

Grazie a queste quattro proprietà tutti riescono a distinguere una retta senza ambiguità: lo vediamo con l'aiuto della figura 2.1. La prima immagine rappresenta una retta (il simbolo di freccia sta a dire che la linea prosegue all'infinito). Ma le altre tre no: la prima di queste ha un inizio, è una semiretta. Nella terza è evidente come tra alcuni punti il cammino più breve non sia quello disegnato dalla curva. Nella quarta se si toglie un punto non rimangono due pezzi separati (la curva disegnata ha spessore).

Alle quattro caratteristiche della retta Euclide ne aggiunge una quinta, il famoso quinto postulato sulle rette parallele. Per formularlo sono necessarie alcune definizioni che prendiamo, non proprio letteralmente, dagli *Elementi*.

DEFINIZIONE 8. Angolo piano è l'inclinazione reciproca di due rette incidenti in un punto detto vertice.

DEFINIZIONE 9. Se le due rette che comprendono l'angolo vengono a coincidere l'angolo si dice piatto e la sua misura è π (misura in radianti; si può anche scegliere la misura in gradi, ovvero 180 gradi).

Angoli più piccoli hanno misure in proporzione; ad esempio abbiamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 10. Quando una retta innalzata su un'altra retta forma angoli adiacenti uguali fra loro ciascun angolo formato si dirà retto con misura $\pi/2$ (90 gradi) (fig. 2.2).

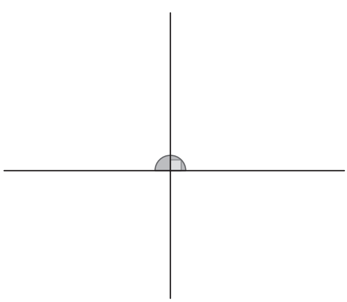


FIG. 2.2.

Con la definizione di angolo retto possiamo quindi scrivere:

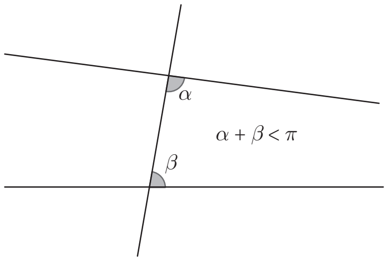


FIG. 2.3.

POSTULATO 5. E che, qualora una retta che incide su due rette faccia minori di due retti gli angoli all'interno e dalla stessa parte, le due rette prolungate illimitatamente incidano dalla parte in cui sono gli angoli minori dei due retti (fig. 2.3).

Questo postulato è equivalente al seguente: data una retta e un punto esterno ad essa, esiste una sola retta passante per questo punto e parallela alla retta di partenza.

Per quasi duemila anni molti matematici e filosofi hanno cercato di provare che questo postulato fosse in qualche modo deducibile, con la logica, dai precedenti. Alla fine dell'800 ci si rese conto che il quinto postulato è indipendente e non derivabile, la sua assunzione è parte integrante della geometria euclidea. La sua negazione, o meglio una sua diversa formulazione, porta alla creazione delle geometrie non euclidee, che tratteremo nel secondo capitolo.

Definizioni e postulati sono il tentativo di mettere su carta, in maniera semplice e non contraddittoria, le idee, le forme geometriche di Platone, presenti in qualche modo *a priori* nella mente umana. Descrivere queste forme fondamentali, anche solo attraverso poche proprietà, garantisce loro un'esistenza ideale e permette a noi di costruire una scienza universalmente accettata, che modellizza la realtà e la interpreta.

Teorema di Pitagora, si entra nel mondo delle idee

A partire dal concetto di retta, o meglio ancora dalle sue quattro proprietà caratteristiche, con deduzioni logiche possiamo ora cominciare a fare della geometria; a formulare e provare proposizioni e teoremi. Prendiamo ad esempio il più famoso dei teoremi della geometria, il Teorema di Pitagora.

Per introdurlo abbiamo bisogna di qualche preliminare che deriviamo dal concetto di retta. Una *semiretta* è data da un punto su una retta, detto *vertice*, e da una delle due parti in cui la retta viene divisa dal punto; un *segmento* è il luogo dei punti di una retta compresi tra due punti, detti *vertici*; un *triangolo* è dato da tre segmenti tali che ogni vertice di un segmento è vertice di uno e uno solo degli altri.

I segmenti possono essere confrontati sovrapponendoli; in particolare, attraverso la scelta di un pezzo predeterminato come unità di misura, si giunge a una misura degli stessi. Ad esempio, un segmento ha lunghezza 3 metri se il segmento unità di misura del metro, determinato dall'Ufficio internazionale dei pesi e delle misure di Sèvres, può essere sovrapposto tre volte, senza intersezioni e senza scarti, sul segmento di partenza.

Teorema di Pitagora. Dato un triangolo con un angolo retto, siano a e b le lunghezze dei segmenti che ge-

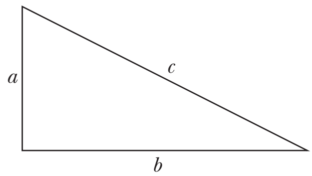


FIG. 2.4.

nerano l'angolo retto (cateti) e c la lunghezza del segmento opposto ad esso (ipotenusa) (fig. 2.4).

Vale la seguente identità:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

In altre parole, la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti del triangolo è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa.

È sicuramente il teorema più famoso della storia della geometria; un risultato che gli ingegneri usano frequentemente, dal tempo dei Babilonesi e degli Egizi. Conosciuto da tutti sin dalle scuole medie, stupisce comunque sempre per l'originalità e direi anche per la stravaganza dell'enunciato; a chi mai è venuta in mente una tale relazione? Probabilmente è stato notato che la relazione valeva per qualche triangolo particolare, ad esempio sulla tavoletta babilonese rappresentata nel primo capitolo. La fantasia, combinata a una buona audacia, ha permesso a Pitagora di razionalizzare l'esperienza e di dimostrare l'enunciato per ogni triangolo rettangolo.

Così facendo però ci si avventura pericolosamente verso cose che l'uomo del tempo non riesce a gestire. Tra queste il fatto che la diagonale di un quadrato di lato unitario ha lunghezza radice quadrata di 2: questo è un numero non razionale, ovvero non esprimibile come multiplo o frazione dell'unità di misura, che i pitagorici chiamavano *non commensurabile.*

Esistono oggi decine di prove di questo teorema, le prime probabilmente ottenute con semplici mani-

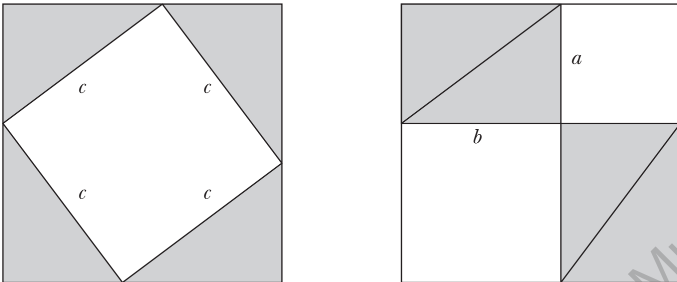


FIG. 2.5.

polazioni sulle aree, forse arrangiando piastrelle su un pavimento. La figura 2.5 ne fornisce, in quest'ottica, una abbastanza semplice che andiamo a spiegare.

Si prendono due quadrati uguali di lato $a + b$ e a entrambi si tolgono quattro triangoli rettangoli uguali con cateti a e b, evidenziandoli in grigio, ma in due modi diversi. I quadrati iniziali hanno la stessa area, a entrambi vengono tolti gli stessi quattro triangoli, la parte bianca restante deve quindi avere la stessa area.

L'area del quadrato bianco della figura a sinistra, che è il quadrato costruito sull'ipotenusa, ha dunque la stessa area della somma dei due quadrati bianchi della figura a destra, che sono i due quadrati costruiti sui cateti.

Credo sia bene fare un'osservazione: la prova si poggia su alcune assunzioni geometriche, in particolare sulla definizione di quadrato e sulla possibilità di costruirlo. Un quadrato è un quadrilatero con i lati uguali e con quattro angoli interni retti. L'esistenza e la costruibilità del quadrato non sono assolutamente ovvie, anzi si può dimostrare che sono equivalenti al quinto postulato di Euclide sulle parallele. Questo fatto fu notato e utilizzato dal matematico italiano Giovanni Girolamo Saccheri (1677-1733). In altre parole, il Teorema di Pitagora è un risultato che possiamo dimostrare se valgono i quattro assiomi di retta e il quinto postulato, ovvero quella che oggi chiamiamo geometria euclidea. Noteremo più avanti che il teorema è falso nelle geometrie non euclidee.

Una curva tira l'altra

Negli *Elementi* troviamo la descrizione di tante curve, a cominciare dalla circonferenza, così definita.

DEFINIZIONE 15. Cerchio è una figura piana compresa da una sola linea, tutte le rette che incidono sulla quale, condotte da un solo punto tra quelli che sono posti all'interno della figura, sono uguali tra loro.

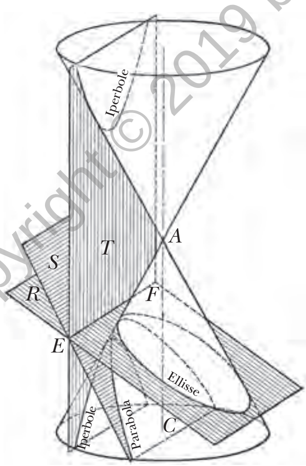


FIG. 2.6.

Apollonio di Perga dedica un intero trattato alle curve che si ottengono come intersezione di un cono con un piano. Le chiama per questo (*sezioni*) *coniche* e le distingue con i nomi di *ellisse*, *parabola* o *iperbole*, a seconda della posizione del piano che taglia il cono, come nella figura 2.6.

Nell'antica Grecia si studiavano curve speciali, utili per risolvere problemi matematici. Le coniche sono state studiate da Menecmo (380-320 a.C.) per risolvere il problema della duplicazione del cubo, ovvero individuare il lato di un cubo avente volume doppio di un cubo dato. Egli diede una semplice soluzione come intersezione di una parabola con un'iperbole. Con l'uso della geometria analitica, che introdurremo tra poco, si vede facilmente che $\sqrt[3]{2}$ si ottiene come intersezione tra la parabola $y = 1/2\ x^2$ e l'iperbole $xy = 1$.

Si racconta che Menecmo, alla richiesta di Alessandro Magno di fornirgli un metodo facile per capire la geometria, abbia risposto: «per viaggiare da un luogo all'altro ci sono strade per il re e strade per il popolo, ma in geometria c'è un'unica strada per tutti».

La duplicazione del cubo e la trisezione dell'angolo sono due dei famosi problemi di Delo per la cui soluzione il matematico Diocle (240-180 a.C.) costruisce la curva cissoide e Nicomede la concoide. Per la quadratura del cerchio, Ippia (443-393 a.C.) e Dinostrato (390-320 a.C.) studiano la quadratrice, e Archimede (287-212 a.C.) la spirale. Le figure 2.7 e 2.8, che rappresentano le due curve, sono state prese dal

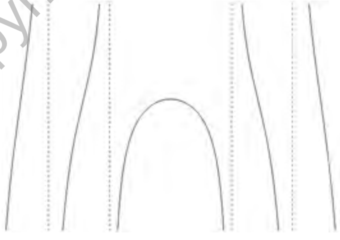


FIG. 2.7.

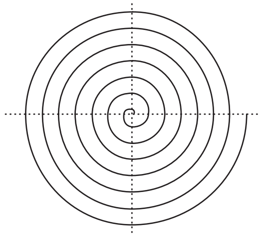


FIG. 2.8.

sito web dell'Università di St Andrew: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Curves.html.

Come costruire una curva

La definizione e lo studio di oggetti geometrici astratti pone la questione della loro reale esistenza; abbiamo già accennato alla posizione critica al riguardo della scuola dei sofisti.

Approfondiamo questo problema chiedendoci, ad esempio, se esiste davvero un cerchio e come possiamo eventualmente costruirlo. Una ruota, il profilo della luna piena e tanto altro si avvicinano all'idea di cerchio, ma lo sono davvero? Per quanto riguarda la sua costruzione Euclide dribbla il problema postulandola.

POSTULATO 3. Descrivere un cerchio con dati centro e raggio.

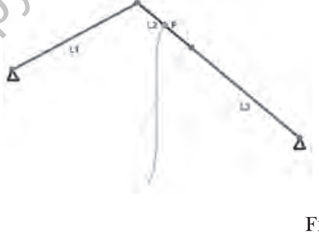
Raffaello nella *Scuola di Atene* raffigura Euclide nell'atto di disegnare un cerchio con l'aiuto di un compasso, ovvero uno strumento articolato che tiene fissa la distanza tra due punti.

In verità gli storici della scienza sostengono che il vero compasso sia un'invenzione araba successiva a Euclide; un meccanismo più rudimentale, con un filo inestensibile o una sbarra di metallo, fissati a un estremo e facendo muovere l'altro, era sicuramente noto ai Greci.

Si dice che Giotto avesse stupito il suo maestro Cimabue disegnando cerchi perfetti a mano libera; un suggerimento su come potrebbe averlo fatto lo troviamo in un divertente video su YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=zR3wbEudD1I.

L'esistenza di una linea retta per due punti veniva anche ipotizzata da Euclide nel primo postulato. In questo caso il problema della costruzione è per molti versi più delicato. Molti suggeriranno di usare una riga, ovvero un pezzo di materiale tagliato lungo una linea retta: ma come faccio a costruire una riga? Ci si chiede quindi se è possibile costruire un compasso per rette, ovvero un meccanismo articolato fatto di barre rigide incernierate tra loro alle estremità ed eventualmente al piano, dove un'estremità si muova liberamente lungo una linea retta.

Un primo tentativo in questa direzione viene compiuto addirittura da James Watt (1736-1819), l'inventore della macchina a vapore. Egli inserisce nel brevetto anche la descrizione di un meccanismo articolato a tre barre, noto ora come parallelogramma di Watt, nel quale il punto mobile centrale è vincolato a muoversi approssimativamente in linea retta. L'immagine sulla sinistra della figura 2.9 illustra il meccanismo di Watt. Sulla destra è raffigurata un'applicazione che, nelle sospensioni automobilistiche, esclude movimenti laterali indesiderati durante le oscillazioni verticali dell'assale del veicolo.



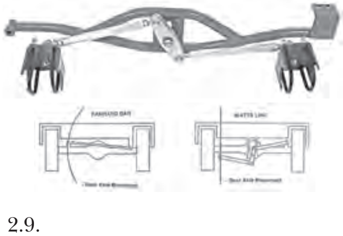


Fig. 2.9.

Scrive Watt al riguardo:

> Ho intravisto il modo di far muovere un pistone su e giù perpendicolarmente solo fissandolo a un pezzo di ferro sulla trave, senza catene né guide perpendicolari [...], è uno dei più geniali e semplici congegni meccanici che io abbia inventato.

Questo meccanismo non genera un vero movimento rettilineo e, in verità, nemmeno Watt ha mai sostenuto che lo facesse; esso genera una curva speciale, detta «lemniscata di Watt».

Il primo vero meccanismo che disegna una retta fu creato da un ufficiale francese, Charles-Nicolas Peaucellier (1832-1913). Si tratta di un parallelogramma articolato con sette barre, raffigurato nella figura 2.10. Le barre del quadrilatero *AQBP* sono tutte uguali tra loro e così anche le barre *OA* e *OB*. Il punto *O* è fissato al piano mentre il punto *P* è vincolato a muoversi lungo una circonferenza passante per *O* (incernierandolo su una barra fissata all'altra estremità).

La costruzione si basa su una trasformazione del piano che inverte i punti rispetto a un cerchio, e che manda tutti i cerchi passanti per il centro del cerchio inversore in rette.

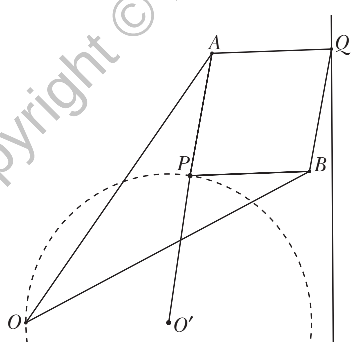


Fig. 2.10.

Cartesio si pone il problema generale di trovare un compasso meccanico, formato da più barre articolate tra loro, per disegnare una qualunque curva piana. Il problema è stato risolto positivamente nel 1876 da Kempe nell'articolo *On a General Method of Describing Plane Curves of the n-th Degree by Linkwork*. Egli dimostra, in maniera abbastanza semplice, che ogni curva *algebrica* piana può essere disegnata con un meccanismo articolato (*linkwork* in inglese); la definizione di curva algebrica è di Cartesio e la discuteremo tra poco.

Questo risultato ha numerose applicazioni che sono temi di ricerca centrale oggi in ingegneria meccanica. Consideriamo come esempio il seguente problema: dati nove punti nel piano si può provare che esiste un meccanismo a quattro barre che disegna una curva passante per questi punti; se i punti sono più di nove il problema potrebbe non ammettere soluzioni. Per decenni molti ingegneri hanno studiato come, dati i nove punti, si possa trovare la curva (o le curve) passante per essi e il meccanismo che la genera. Alla fine del secolo scorso la General Motors finanziava queste ricerche per produrre dei tergicristalli ottimali; nel 1992 Andrew J. Sommese e altri dimostrarono che dati nove punti (in posizione generica) ci sono al più 1.442 possibilità; più recentemente, nel 2010, una nuova ricerca ha ridotto le possibilità a 64!

Possiamo dunque convenire sul fatto che sia possibile costruire una retta per due punti e un cerchio di dato raggio e centro con una riga e un compasso. I matematici dell'antica Grecia cercavano di utilizzare questi due strumenti per risolvere altri problemi; più precisamente cercavano di *costruire con riga e compasso* punti e figure nel piano che fossero soluzioni di problemi geometrici. Con questo metodo bisecavano un angolo (ovvero trovavano un angolo di ampiezza la metà di un angolo dato), costruivano triangoli equilateri, trovavano la radice quadrata di una lunghezza

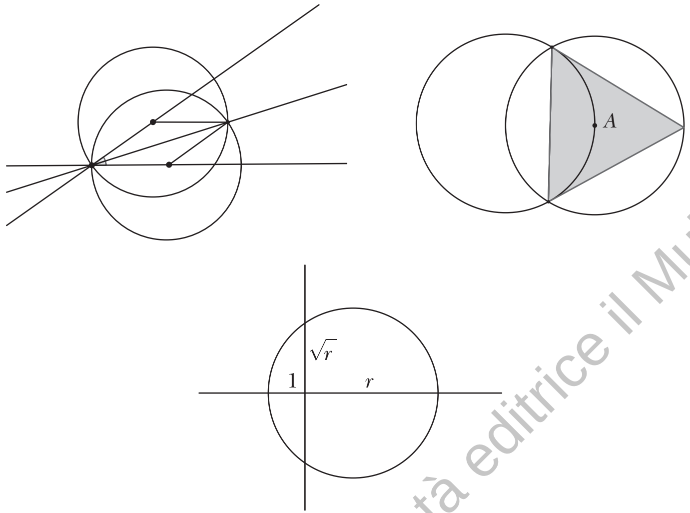


Fig. 2.11.

e tanto altro. Sono esercizi che impariamo a fare a scuola (la fig. 2.11 ne rappresenta tre esempi).

Inspiegabilmente per l'epoca, la costruzione con riga e compasso non riusciva a risolvere alcuni problemi leggermente più generali, i famosi problemi di Delo. Tra questi la trisezione di un angolo, la costruzione della radice cubica di un numero, la costruzione di un poligono regolare con sette lati e anche la quadratura del cerchio (ovvero costruire un poligono di area π). Il problema della costruzione della radice cubica del numero 2 si racconta sia nato dalla richiesta dell'oracolo di Apollo, nel tempio di Delo, di costruire un altare di forma cubica doppio rispetto a quello esistente.

Questi problemi non possono venire risolti con riga e compasso; questo fatto segue da una teoria algebrica molto profonda, creata due millenni dopo, da Évariste Galois (1811-1832), che lega la ricerca di radici di polinomi alla Teoria dei gruppi.

Poco prima di Galois il matematico italiano Lorenzo Mascheroni (1750-1800), nel libro *La geometria del compasso*, provò che tutte le costruzioni con riga e compasso si possono ottenere con il solo compasso. Mascheroni, collega all'Università di Pavia di Spallanzani e di Volta, fu un fervente ammiratore di Napoleone. Il teorema che afferma che «i baricentri dei triangoli equilateri costruiti esternamente sui lati di un triangolo qualunque formano un triangolo equilatero» è attribuito a Napoleone, sebbene molti storici propendano per credere che sia stato effettivamente dimostrato da Mascheroni o dal matematico franco-torinese Giuseppe Luigi Lagrangia (Lagrange).

Cartesio e la «Géométrie»

Nel '600 due grandi matematici francesi, René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665), rivoluzionano la teoria dello studio delle curve e, di conseguenza, quello della geometria. Non è facile attribuire la paternità delle tante scoperte e dei nuovi metodi all'uno o all'altro; su questo furono essi stessi protagonisti di una disputa feroce, descritta in tanti libri di storia della matematica.

In una nota lettera del 1619 al collega fisico, filosofo e medico olandese Isaac Beeckman, Cartesio scrive:

> così, io spero di dimostrare che, nella quantità continua, alcuni problemi possono venire risolti con le sole linee rette o circolari; che altri non possono essere risolti se non

con altre linee curve, ma che nascono da un movimento unico e, quindi, possono essere tracciate per mezzo di nuovi compassi, che ritengo non meno certi e geometrici del compasso ordinario con cui si tracciano i cerchi; che altri, infine, non possono essere risolti se non per mezzo di linee curve generate da movimenti differenti non subordinati reciprocamente fra di loro; linee che, come la quadratrice, assai nota, sono soltanto immaginarie. Ritengo che non possa essere immaginato nulla che non possa venire risolto mediante curve di questo tipo; spero, però, di dimostrare quali problemi possano venire risolti in questo o in quel modo e non in un altro: così, in geometria quasi nulla rimarrà da scoprire. Si tratta, certo, di un'opera infinita, e non di una sola persona; un'opera tanto incredibile quanto ambiziosa. Nell'oscuro caos di questa scienza ho scorto però un non so quale lume, grazie al quale ritengo si possano dissipare le tenebre più dense.

Cartesio dunque, nel solco della tradizione greca, vuole risolvere problemi matematici con l'uso delle curve, dividendoli in tre classi. La prima è quella dei problemi risolubili con riga e compasso. La seconda, la più interessante, raccoglie tutti i problemi che possono essere risolti da curve tracciabili con un singolo moto, o alternativamente con l'uso di *nuovi compassi*; chiama queste curve *ammissibili o geometriche*. Nella terza classe mette i problemi che non stanno nelle prime due e chiama queste curve *immaginarie o meccaniche*, tra cui la quadratrice e la spirale.

Cartesio dedica molto tempo alla costruzione effettiva di nuovi compassi; tra questi il *trisettore*, che disegna una curva che triseca un angolo (vedi fig. 2.12).

Iniziamo con l'introdurre quello che oggi chiamiamo *sistema di riferimento (o di assi) cartesiano* e le *coordinate cartesiane*. Preso un piano si consideri su di

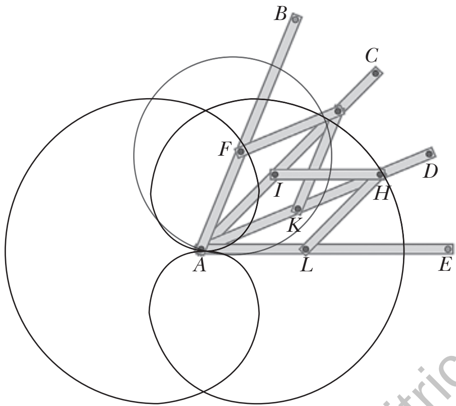


FIG. 2.12.

esso una copia di rette r e r' intersecantesi perpendicolarmente in un punto 0. Ad ogni punto P del piano associamo quindi una coppia di numeri (x, y), le coordinate cartesiane del punto in questo sistema di riferimento. (Specificamente la x corrisponde alla distanza del punto di intersezione di r con la retta per P perpendicolare a r da 0. La y corrisponde alla distanza del punto di intersezione di r' con la retta per P perpendicolare a r' da 0.)

Il lume individuato da Cartesio è l'idea di pensare una curva nel piano attraverso un'equazione, dando origine con questo a quella che oggi viene definita *geometria analitica* o *geometria algebrica*. Leggiamo il brano della *Géométrie* (Libro II, p. 19) in cui introduce questo concetto.

Potrei ora dare diversi modi per tracciare o concepire delle linee curve, ogni curva più complessa che le precedenti, ma penso che il modo migliore per raggrupparle e classificarle in ordine tutte assieme sia riconoscendo il fatto che tutti i punti di queste curve che noi chiamiamo geometriche [...] devono avere una relazione con tutti i punti di una retta, che deve essere espressa per mezzo di una singola equazione.

Nelle righe successive, più precisamente, Cartesio propone che una curva nel piano sia determinata, fissato un sistema di riferimento, dai punti le cui coordinate cartesiane (x, y) soddisfano un'equazione $f(x, y) = 0$, dove $f(x, y)$ è una funzione nelle variabili x e y.

Ad esempio, l'equazione $3x - 2y + 6 = 0$ descrive una retta, mentre l'equazione $x^2 + y^2 - 1 = 0$ descrive un cerchio.

La funzione $f(x, y)$ si dice *equazione cartesiana* della curva. Se la funzione è un polinomio la curva viene detta *algebrica* e il grado del polinomio viene detto *grado o ordine della curva*.

Si osservi che quando Cartesio parla di funzioni intende sicuramente funzioni esprimibili come polinomi; inoltre le curve che chiamava in una prima fase geometriche, ovvero costruibili con i nuovi compassi, sono di fatto curve algebriche, come provato da Kempe nel teorema enunciato precedentemente.

Non tutte le funzioni sono polinomiali, si pensi ad esempio alla funzione esponenziale o alle funzioni trigonometriche; queste funzioni, dette anche trascendenti, nascono pochi anni dopo Cartesio nei lavori di Leibniz, Newton e tanti altri che creano il calcolo differenziale e integrale.

In questo paragrafo e in quello successivo considereremo curve definite da equazioni polinomiali.

In alcuni casi, attraverso opportuni passaggi algebrici, è possibile ricavare dall'equazione $f(x, y) = 0$

una delle due variabili come funzione rispetto all'altra. Ad esempio, da $3x - 2y + 6 = 0$ si ricava facilmente che $x = x(y) = 2/3y + 2$; e anche $y = y(x) = 3/2x + 3$. In questo caso si dirà che la curva è descritta come *grafico* (della variabile dipendente in funzione di quella che varia liberamente). La descrizione di una curva come grafico è molto utile, ma è possibile solo sotto certe condizioni di regolarità, studiate in un celebre risultato dal matematico italiano Ulisse Dini (1845-1918): la curva è un grafico in un intorno dei suoi punti non singolari, che definiremo tra breve.

La definizione di curva come luogo degli zeri di una funzione può essere ricondotta a quella greca di termine o bordo di una superficie.

Se invece si pensa a una curva come a un insieme di punti o monadi, equivalentemente a un punto in movimento, si descrive la curva come i punti del piano cartesiano le cui coordinate $(x(t), y(t))$ sono descritte da funzioni $x(t)$ e $y(t)$, al variare di un parametro continuo t. Queste equazioni si dicono *equazioni parametriche* della curva.

Le equazioni $x(t) = 2t + 2$, $y(t) = 3t$, ad esempio, sono le equazioni parametriche della retta data precedentemente in forma cartesiana $f(x, y) = 3x - 2y + 6 = 0$. Le equazioni $x(t) = \text{sen}(t)$, $y(t) = \cos(t)$ descrivono, al variare del parametro t, la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$; si noti che queste funzioni, dette trigonometriche, non sono polinomiali. È anche possibile trovare delle equazioni parametriche della circonferenza esprimibili come (quozienti) di polinomi (lo vedremo in un paragrafo successivo).

Nella *Geometria* Cartesio dimostra, tra tanti altri risultati, il fatto abbastanza stupefacente che le curve di grado 2 sono tutte e solo le coniche (con l'avvertenza di chiamare coniche degeneri anche le unioni di due rette). La geometria greca delle coniche si ingloba dunque in questa teoria più generale; lo studio delle coniche si riduce semplicemente allo studio dei polinomi in due variabili di grado 2.

Cartesio si avventura quindi nello studio delle curve di ordine superiore, riconsiderando con la sua definizione molti esempi classici e creandone di nuovi. Tra questi il *Folium* (foglia), la cui equazione cartesiana è $x^3 + y^3 = 3axy$, mentre quella parametrica è

$$x(t) = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}$$

Cartesio sbagliò a disegnare questa foglia, convinto che si ripetesse uguale nei quattro quadranti; probabilmente anche per la poca dimestichezza con i numeri negativi. Il primo a disegnare correttamente il *Folium*, come nella figura 2.13, fu Christiaan Huygens, di cui parleremo tra breve.

Il *Folium* di Cartesio è una curva di grado 3, una cubica, che presenta una novità rispetto alle curve di grado 1 (rette) e di grado 2 (coniche): ha un *punto singolare*. Vi sono tanti modi, ovviamente equivalenti, per definire cos'è una singolarità; per rimanere con gli strumenti e il metodo di Cartesio lo faremo utilizzando il concetto di retta tangente a una curva. Si noti che la

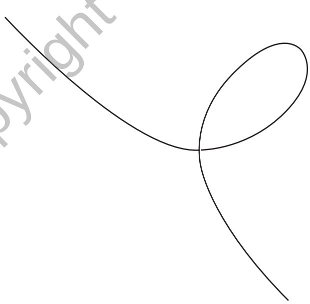


FIG. 2.13.

curva non può essere descritta come grafico in un intorno dell'origine delle coordinate. (Per una maggiore descrizione del *Folium* e altre curve introdotte da Cartesio e Fermat rimando ancora il lettore al sito web dell'Università di St Andrew: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Curves.html.)

Pensare alle curve come luogo di zeri di un'equazione introduce l'uso dell'algebra nello studio della geometria, chiarendo e risolvendo in maniera estremamente efficace e rigorosa molti problemi; tra questi la questione delle rette tangenti e dei punti singolari.

Questo rivoluzionario modo di affrontare la geometria si impone rapidamente e ha raggiunto oggi livelli di raffinatezza e astrazione sorprendenti che discuteremo nel quarto capitolo.

Le novità introdotte da Cartesio sono naturali conseguenze delle nuove tecniche algebriche per la ricerca delle radici di un polinomio, condotte con successo nel '500 da italiani quali Cardano, Tartaglia, Scipione Dal Ferro e Ferrari.

Un problema di tangenti

Il concetto di retta tangente a una curva in un suo punto è molto delicato e ricco di implicazioni matematiche. Cartesio a riguardo scriveva:

> [trovare la tangente a una curva è] il problema più utile e generale, non solo tra quelli che conosco, ma anche tra quelli che ho mai desiderato di conoscere in geometria.

Negli *Elementi* di Euclide troviamo la definizione di retta tangente a un cerchio; più precisamente la

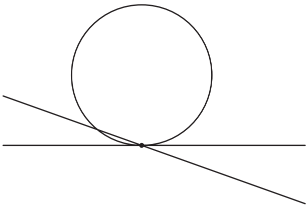


Fig. 2.14.

definizione 2 del Libro III recita: «si dice che è tangente ad un cerchio una retta, la quale raggiunge il cerchio e, prolungata, non lo taglia».

Si intende una retta che partendo da un punto esterno raggiunge, ovvero giunge a, un punto comune con il cerchio, e poi proseguendo non lo taglia ulteriormente, ovvero non giunge a un secondo punto comune. Si potrebbe anche dire che non esiste nessun'altra retta fra la tangente così definita e la circonferenza (fig. 2.14).

La definizione di Euclide per il cerchio può essere estesa a una curva algebrica nel piano, che non sia una retta: preso un suo punto sulla curva si considerano tutte le rette passanti per questo punto; la tangente, se esiste, è quella retta che ha solo quel punto in comune con la curva (almeno in un piccolo intorno). Cartesio in verità usa un metodo leggermente diverso, ovvero cerca una circonferenza che abbia in comune con la curva solo un punto e quindi definisce la retta tangente come la retta per il punto tangente alla circonferenza, riconducendosi dunque a Euclide.

Pensare alle curve in termini algebrici permette di porre il problema in un quadro generale e di trovare soluzioni molto precise. L'intuizione geometrica viene sostituita dal calcolo algebrico astratto che, se condotto con accuratezza, restituisce in maniera meccanica e precisa la soluzione. L'idea di fondo è quella che se una retta non incontra ulteriormente la curva la deve incontrare nel punto con maggiore *molteplicità*.

Il concetto di molteplicità algebro-geometrica è delicato e molto studiato; nel seguito cerchiamo di darne una prima idea. Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano che abbia l'origine nel punto della curva che vogliamo studiare, dunque $P = (0,0)$. La curva algebrica è definita come i punti le cui coordinate (x, y) soddisfano l'equazione $f(x, y) = 0$; supponiamo che f non sia lineare, ovvero che la curva non sia una retta. Le rette passanti per P sono le curve di equazione $sy - tx = 0$, per opportune costanti t, s.

I punti in comune tra la curva e la retta si ottengono come le soluzioni di entrambe le equazioni: $f(x, y) = 0$ e $sy - tx = 0$. Dalla seconda equazione ricaviamo la y, o la x, in funzione di x, o di y, e sostituiamo nell'equazione $f(x, y) = 0$. In un caso otteniamo un polinomio in x, che denoteremo con $p(x)$, che dipenderà anche da t, s; nell'altro un polinomio in y che denoteremo con $q(y)$. Il polinomio $p(x)$, rispettivamente $q(y)$, si annulla in 0 per ogni t, s, dato che sia la curva che le rette passano per $P = (0,0)$. Dunque $p(x)$ e $q(y)$ si possono scrivere nella forma $p(x) = x \cdot g(x)$ e $q(x) = y \cdot h(y)$, con $g(x)$ e $h(y)$ polinomi, che anche dipendono da t, s, ovvero dalla retta.

La cosa interessante è che per opportune rette uno o entrambi i polinomi g e h si annullano in 0. Se la retta per cui si annullano è unica allora il punto P si dice *non singolare o liscio o di molteplicità uno* e *la retta individuata è la tangente alla curva in P.*

Se la retta non è unica il punto si dice *singolare o di molteplicità maggiore a 1 o multiplo*; in questo caso si può far vedere che 0 è una radice di $g(x)$ e $h(y)$ per ogni retta e dunque che ogni retta interseca la curva con molteplicità maggiore di due.

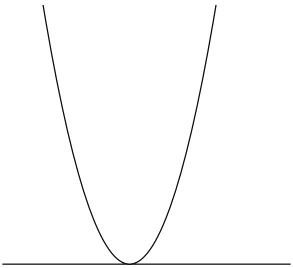


FIG. 2.15.

Anche nei punti singolari si può definire un concetto di retta tangente; intuitivamente sono le rette che incontrano la curva nel punto con molteplicità minima.

Consideriamo tre esempi, il primo di un punto liscio, i secondi di punti singolari.

La parabola data dall'equazione $y - x^2 = 0$ passa per il punto $P = (0,0)$, che è un punto liscio con tangente $y = 0$ (fig. 2.15).

Per provarlo cerchiamo i punti comuni tra le rette $y - tx = 0$ e la parabola: sostituendo nell'equazione della parabola il valore $y = tx$ otteniamo il polinomio $p_t(x) = x(t - x)$. Ma $g_t(x) = (t - x)$ si annulla in 0 se e solo se $t = 0$; dunque tutte le rette, eccetto la retta $y = 0$, intersecano la curva con molteplicità uno. Si noti che anche l'intersezione con la retta $x = 0$ ha molteplicità uno. Quindi il punto è liscio e la sua tangente è data dalla retta $y = 0$.

Il *Folium* di Cartesio, di equazione $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, ha in $P = (0,0)$ un punto singolare (fig. 2.16).

Sostituendo il valore $y = tx$ al posto della y nell'equazione cartesiana otteniamo il polinomio $p(x) = -3tax^2 + (1 + t^3)x^3 = x(3tax + (1 + t^3)x^2)$. Si osserva che 0 è una radice del polinomio $(3tax + (1 + t^3)x^2)$ per ogni valore di t. Quindi tutte le rette intersecano con molteplicità due: il punto $P = (0,0)$ è singolare. Il lettore interessato può dimostrare che le rette $y = 0$ e $x = 0$ sono le uniche due rette che incontrano il *Folium* con molteplicità tre e si possono quindi consi-

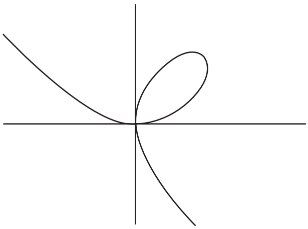


FIG. 2.16.

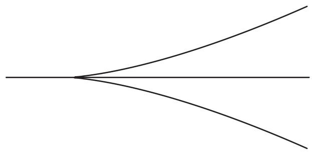


FIG. 2.17.

derare come tangenti; questo tipo di singolarità viene chiamata *nodo*.

Un altro esempio di punto singolare è dato dalla curva di equazione $y^2 - x^3 = 0$ (fig. 2.17).

Sostituendo il valore $y = tx$ nell'equazione otteniamo il polinomio $p(x) = t^2x^2 - x^3$. Ogni retta interseca la curva con molteplicità maggiore di due e quindi il punto $P = (0,0)$ è singolare. Per $t = 0$ il polinomio si annulla con molteplicità tre, dunque la retta $y = 0$ può essere considerata come retta tangente nel punto cuspidale. La retta $x = 0$ non è invece una retta tangente alla cuspide. Questo tipo di singolarità viene denominata *cuspide*.

Il *Folium* è un esempio cruciale nella storia del pensiero matematico sotto molti aspetti: Cartesio sfidò il suo avversario Pierre de Fermat nello studio delle sue tangenti. Fermat, che stava sviluppando un proprio metodo per la costruzione delle tangenti, accettò e vinse la sfida.

Il calcolo di Fermat poggiava su una sorta di gioco di prestigio, usato più tardi da Newton e altri: l'introduzione al principio di un elemento E molto piccolo, *infinitesimo*, la divisione per E, necessaria per semplificare, e quindi la cancellazione di E alla fine del processo, come fosse 0.

Prendiamo ad esempio ancora la parabola $y = x^2$. Per calcolare la pendenza della retta tangente in un qualunque suo punto (x, x^2) consideriamo la corda tra i due punti della parabola (x, x^2) e $(x + E, (x + E)^2)$. La pendenza della corda è data da

$$\frac{((x+E)^2 - x^2)}{(x+E) - x} = \frac{2xE + E^2}{E} = 2x + E$$

Cancellando E otteniamo che la pendenza della tangente in ogni punto (x, x^2) è data da $2x$, che conferma il nostro calcolo precedente in 0.

Il metodo si applica facilmente a tutte le curve di equazione $y = p(x)$, con $p(x)$ un polinomio: in questo caso il termine di grado più alto in x nel polinomio $p(x + E)$ viene cancellato da quello nel polinomio $p(x)$; gli altri termini possono quindi essere divisi per E. La cancellazione di tutti i termini con E, o meglio il mandare E al limite 0, fornisce la pendenza della tangente alla curva o, come si dirà in seguito, la *derivata di* $p(x)$ *in* x, denotata con $\dot{p}(x)$.

Questa procedura fece infuriare i filosofi dell'epoca, in particolare Thomas Hobbes, che pensavano si stesse affermando che $2x + E = 2x$, sebbene $E \neq 0$. In termini moderni oggi diciamo che $\lim_{E\to 0}(2x + E) = 2x$, ma il concetto di limite di una funzione nasce molto più tardi.

L'efficacia del metodo di Fermat portò a non dare troppo conto delle critiche, anche perché le speculazioni matematiche di Hobbes erano in generale sbagliate.

Sollecitato dalla sfida posta da Cartesio, Fermat nel 1638 estende il metodo anche a curve date da un'equazione generica $f(x, y) = 0$; per la generalità di questi suoi calcoli può essere senz'altro annoverato tra i fondatori del calcolo differenziale.

Abbiamo dunque definito i punti singolari di una curva algebrica piana. I matematici estendono questo concetto anche a oggetti geometrici più generali, come le curve nello spazio, oppure le superfici e le varietà di dimensione più alta, che vedremo nel seguito. Si scopre ben presto quanto sia affascinante e complesso studiare questa nuova idea geometrica, e quanto sia utile sia per lo sviluppo della matematica che per innumerevoli applicazioni in altri settori. Gradualmente prende vita una teoria denominata *Teoria delle singolarità*, detta anche *Teoria delle catastrofi*; nella metà del secolo scorso due grandi scuole si confrontano su questi temi, quella francese, diretta da René Thom, e quella russa, diretta da Vladimir Arnold.

Il primo obbiettivo di queste teorie è quello di capire bene le singolarità, ovvero di classificarle. Classificare gli oggetti di studio è un'attività che piace molto a specialisti di diverse discipline scientifiche e i matematici non sono da meno.

Ma cosa si intende per classificazione in questo caso? Significa attribuire caratteristiche numeriche ad ogni punto singolare e dividere le singolarità in classi definite da assegnati valori numerici a queste caratteristiche. Una classificazione è completa se si riesce a far entrare ogni singolarità all'interno di una classe e se è possibile descrivere in maniera esauriente ogni classe.

Prendiamo le singolarità delle curve algebriche piane che abbiamo appena definito. Potremmo dividere queste singolarità in classi a seconda della loro molteplicità, un numero che abbiamo definito per ogni punto della curva. I punti con molteplicità uno sono i punti lisci, non singolari. Si dimostra senza troppa difficoltà che un punto di molteplicità due può essere solo un nodo o una cuspide, in un opportuno sistema di coordinate.

Per proseguire si costruiscono esempi di singolarità di molteplicità tre e oltre, fin quando ci sembrano sufficienti per descrivere tutte le possibilità delle classi. La creazione di esempi è uno degli aspetti più creativi e innovativi della matematica; ed è anche piuttosto difficile, non come pensare a un asino che vola o a un angelo con ali e aureola. La fantasia deve rimanere dentro le regole del gioco, soddisfare alcune richieste e vincoli (in questo caso, ad esempio, avere una molteplicità fissata) e potersi esprimere in maniera chiara nel linguaggio universale e operativo della matematica.

Arnold, Thom e altri hanno classificato i punti singolari delle curve e delle superfici. La classificazione (di particolari classi) di singolarità in dimensioni superiori è tra i risultati più importanti della geometria contemporanea.

La Teoria delle catastrofi si pone un secondo obbiettivo molto ambizioso: studiare quando un punto singolare, di una curva o di un oggetto di dimensioni maggiori, determina, in parte o interamente, tutta la curva o l'oggetto che la contiene.

Siamo di fronte a un rovesciamento di prospettiva: non partiamo più dalla curva ma da un suo punto (speciale) e ci chiediamo se contiene in sé abbastanza informazioni per ricostruire la curva. Qui si manifesta la straordinaria capacità della matematica di «invertire» il ragionamento logico.

Il seguente esempio può dare un'idea di quanto detto. Supponiamo che una curva algebrica piana di grado *n*, con *n* intero positivo, abbia un punto singolare di molteplicità *n*; allora la curva è formata dall'unione di *n* rette per quel punto. Il lettore interessato può trovare la dimostrazione di questo nel libro di Edoardo Sernesi, *Geometria 1*, al capitolo 34.

L'idea che una singolarità, una catastrofe, possa determinare l'oggetto o il fenomeno che la contiene è ingegnosa e ricca di applicazioni in molti campi della scienza moderna. Si pensi ai cambi di stato nella chimica, alle estinzioni o alle mutazioni nei processi della vita, ai buchi neri nella fisica. Verso la metà del secolo scorso molti pensavano che tutto fosse riconducibile a «eventi» eccezionali o singolari; nasce in questo contesto la Teoria del caos, riassunta efficacemente da Edward Norton Lorenz (1917-2008), matematico e meteorologo, nel famoso titolo di una conferenza: *Può il batter d'ali di una farfalla in Brasile provocare un tornado in Texas?*

Galileo, un nuovo modo di porsi i problemi

Un altro protagonista d'eccezione del XVII secolo, secolo d'oro per la Teoria delle curve e più in generale per lo sviluppo della matematica, è senza dubbio Galileo Galilei (1564-1642). Assieme ai suoi allievi applica la Teoria delle curve a problemi di meccanica e più in generale di fisica. Il suo metodo rappresenta una continuità con Platone e con gli esploratori del mondo delle idee, ma ben più forte ora è l'affermazione che una teoria è valida scientificamente se e solo se la si può rappresentare con un modello matematico.

I testi di Galileo sono ricchi di esempi e di costruzioni di curve e hanno il merito di formulare chiaramente i problemi fisici e di abbozzare proposte risolutive basate su un ragionamento matematico. Invitano a leggere la natura con gli occhi del geometra, fanno capire che la complessità e l'astrattezza della matematica possono permettere all'uomo di uscire dagli ambiti del territorio che abita e di avventurarsi a esplorare l'universo.

Galileo non è così sistematico nello studio della geometria come il contemporaneo Cartesio, che pare lo ammirasse molto; il suo uso della geometria è classico e non utilizza il ponte con l'algebra. I problemi sul moto e la caduta dei gravi che si pone richiedono di fatto una matematica più complessa e astratta di quella che ha a disposizione, per questo molti suoi risultati sono incompleti o parziali. Gli manca soprattutto la potenza del calcolo differenziale (*calculus*), sviluppato da lì a poco da un folto gruppo di matematici tra i quali Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716).

Nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e ai movimenti locali,* pubblicati nel 1638, cinque anni dopo il famoso processo, così Galileo introduce la terza giornata:

> Diamo avvio a una nuovissima scienza intorno a un soggetto antichissimo. Nulla v'è, forse, in natura, di più antico del moto, e su di esso ci sono non pochi volumi, né di piccola mole, scritti dai filosofi; tuttavia tra le sue proprietà ne trova molte che, pur degne di essere conosciute, non sono mai state finora osservate, nonché dimostrate. Se ne rilevano alcune più immediate, come quella, ad esempio, che il moto naturale dei gravi discendenti accelera continuamente; però, secondo quale proporzione tale accelerazione avvenga, non è stato sin qui mostrato: nessuno, che io sappia, infatti, ha dimostrato che un mo-

bile discendente a partire dalla quiete percorre, in tempi eguali, spazi che ritengono tra di loro la medesima proporzione che hanno i numeri impari successivi *ab unitate*.

È stato osservato che i corpi lanciati, ovverossia i proietti, descrivono una linea curva di un qualche tipo; però, che essa sia una parabola, nessuno l'ha mostrato. Che sia così, lo dimostrerò insieme ad altre non poche cose, né meno degne di essere conosciute, e, ciò che ritengo ancor più importante, si apriranno le porte a una vastissima e importantissima scienza, della quale queste nostre ricerche costituiranno gli elementi; altri ingegni più acuti del mio ne penetreranno poi più ascosi recessi.

La consapevolezza della portata innovativa dei risultati si accompagna con la constatazione che gli strumenti a disposizione non sono abbastanza adeguati e dovranno essere sviluppati da «altri ingegni più acuti».

Tra i grandi principi della scienza moderna che Galileo enuncia nel testo vi è anche quello che un grave in caduta libera

accelera continuamente [...] e percorre, in tempi eguali, spazi che ritengono tra di loro la medesima proporzione che hanno i numeri impari successivi *ab unitate*.

Egli dimostra sperimentalmente che i corpi materiali in caduta libera nel vuoto (ovvero senza attrito) cadono con la stessa accelerazione, indipendentemente dalla massa, e che la legge oraria che descrive lo spazio percorso in funzione del tempo, partendo con velocità iniziale nulla, è data dalla famosa formula $x(t) = ct^2$, dove c è una costante. Si osservi che la somma dei primi $2n + 1$ numeri dispari è proprio n^2, proprietà nota anche ai matematici greci;

se dunque, come osserva Galileo, lo spazio percorso ad ogni intervallo di tempo si ottiene aggiungendo un numero dispari successivo la legge oraria deve dipendere dal quadrato del tempo.

Grazie a questo principio, dopo una lunga serie di osservazioni e proposizioni, Galileo formula il risultato seguente.

TEOREMA 22 E PROPOSIZIONE 36. Se in un cerchio, eretto sull'orizzonte, dal suo punto più basso si innalza un piano inclinato, il quale sottenda un arco non maggiore di un quadrante, e se dagli estremi di tale piano si conducono due altri piani inclinati a un qualsiasi punto dell'arco, la discesa lungo [il sistema di] questi due ultimi piani inclinati si compirà in minor tempo che lungo il solo primo piano inclinato, o che lungo uno soltanto di questi due ultimi piani, e precisamente l'inferiore.

Con riferimento alla figura 2.18, tratta sempre dallo stesso libro, il teorema dice che la discesa lungo i due piani *AD* e *DC* avviene in un tempo minore che lungo il piano *AC*, o del solo *DC*.

Da questo teorema, con un ragionamento contenuto in uno *Scolio* immediatamente successivo, deduce che «quanto più, con poligoni inscritti [poligonali iscritte] ci avviciniamo alla circonferenza, tanto più presto si compie il moto tra i due segnati estremi *A* e *C*» e quindi che «da quanto si è dimostrato sembra si possa ricavare che il movimento più veloce da

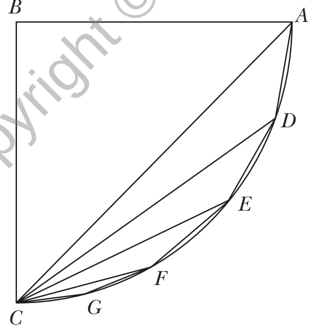


FIG. 2.18.

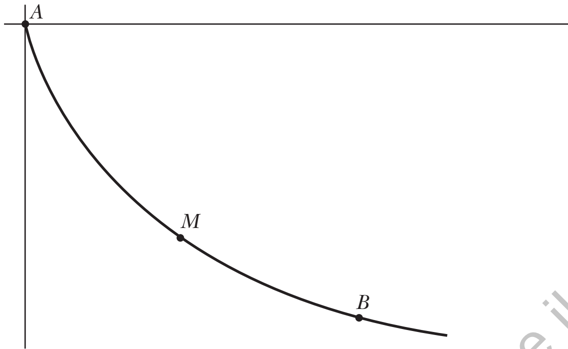


FIG. 2.19.

estremo ad estremo non avviene lungo la linea più breve, cioè la retta, ma lungo un arco di cerchio».

Il ragionamento di Galileo si fonda su una serie di osservazioni sperimentali, deduzioni logiche ed elementi di geometria euclidea che non affrontiamo in questo testo. Pochi anni dopo venne formulata la seguente questione più generale.

QUESTIONE. Dati due punti A e B in un piano verticale, determinare il cammino, ovvero la curva, lungo il quale una particella mobile M, partendo da A e scendendo unicamente sotto l'influenza del suo peso, raggiunge B nel minor tempo possibile (fig. 2.19).

Questa curva viene presto denominata *brachistocrona*, dall'unione delle due parole greche βϱαχιστος = più breve e χϱονος = tempo.

Galileo dimostra che il tratto di circonferenza è un cammino più breve rispetto al segmento, nonostante quest'ultimo sia il cammino di lunghezza più corta. La circonferenza però non è *il* cammino più breve, non è la brachistocrona, come notano in molti nella seconda metà del secolo.

La questione appartiene alla classe di problemi denominati di *tipo variazionale*, che chiedono di trovare un minimo (o un massimo) in un insieme di configurazioni possibili rispetto a una data proprietà. Nel caso della brachistocrona le configurazioni sono i cammini tra i punti A e B e la proprietà è determinata dal tempo necessario per percorrerli.

Per risolvere questi problemi i matematici hanno creato numerosi strumenti raggruppati oggi in una corposa teoria denominata *calcolo delle variazioni*. Tra gli specialisti troviamo grandi matematici italiani, tra i quali Enrico Bombieri (Fields Medal nel 1974), Ennio De Giorgi, Luigi Ambrosio e Alessio Figalli (Fields Medal nel 2018).

Il calcolo, altri problemi, altre curve

A cavallo tra il '600 e il '700 vivevano e operavano a Basilea i due fratelli Jacob e Johann Bernoulli (1654-1705 e 1667-1748 rispettivamente), di professione matematici, i quali si detestavano apertamente. Discutendo il problema della brachistocrona con il fratello, Johann si convinse che Jacob fosse stato tratto in inganno dalla lettura di Galileo e che pensasse che la soluzione fosse davvero la circonferenza. Per ridicolizzare il fratello decise quindi di bandire, sulla rivista «Acta Eruditorum» del 1696, una gara pubblica per la soluzione del problema.

Accolsero la sfida e presentarono soluzioni esatte cinque matematici: Newton, Leibniz, de L'Hôpital, Jacob e Johann Bernoulli. Anche Jacob vinse la sfida, con il disappunto di Johann, a cui rimase però la soddisfazione di aver proposto la soluzione più *ele-*

gante e ingegnosa, costituita da una serie di passi successivi che ora descriviamo.

Cominciamo fissando un sistema di riferimento cartesiano in modo tale che il punto A sia l'origine del riferimento e che l'asse delle y sia rivolto verso il basso.

Per il primo passo utilizziamo la formula per la velocità di un corpo soggetto alla forza di gravità:

$$v = \sqrt{2gy}$$

dove g è l'accelerazione di gravità e y la seconda coordinata del punto (lungo l'asse delle ordinate).

La formula segue dal principio sulla caduta dei gravi di Galileo o dal principio fisico della *conservazione dell'energia* per un sistema isolato.

Johann Bernoulli *discretizza* il problema: ovvero divide il piano in strisce orizzontali (vedi fig. 2.20) e assume che in ogni striscia la particella si muova in linea retta; le curve in questa approssimazione si chiamano *lineari a tratti*; quando le strisce diventano infinitamente piccole tendono alla curva cercata.

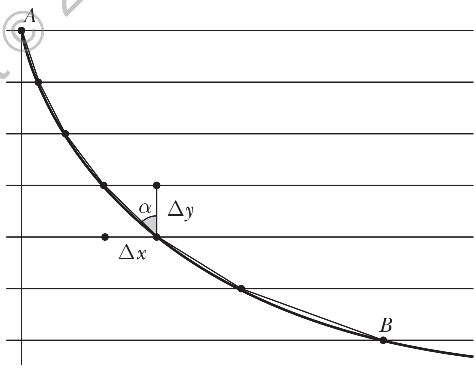


FIG. 2.20.

A questo punto Johann ha un'intuizione geniale: osserva che la luce segue sempre il percorso più breve e assume quindi che il cammino più breve è quello percorso da un raggio luminoso. L'idea che la luce si muova più velocemente di ogni altra cosa, come sappiamo, è ripresa da Einstein nella Teoria della relatività.

Ma un raggio luminoso che attraversa uno spazio composto da mezzi diversi in strati diversi deve sottostare alla legge sulla rifrazione ottica, detta di Snell. Ovvero in ogni striscia il rapporto tra la velocità e il seno dell'angolo α, determinato dal tratto rettilineo (ovvero la retta tangente) e dalla retta delle ordinate, è uguale a una costante (indipendente dalla striscia scelta):

$$\frac{v}{\operatorname{sen}(\alpha)} = \text{costante} = K$$

La si può ottenere attraverso esperienze ottiche dirette, *rationem experientiae*, come fecero Snell e Cartesio. Oppure attraverso una dimostrazione matematica, come fece Fermat, del fatto che *natura operari per modos et vias faciliores et expeditiores*. Fermat in verità impiegò cinque pagine per questa dimostrazione, trovandola non tra le più facili; pochi anni dopo Leibniz, con la nuova potenza del calcolo, la dimostrò con grande fierezza *in tribus lineis*.

Questa equazione traduce la *condizione di minimalità* in una condizione propriamente matematica.

L'ultimo passo è di natura strettamente *geometrica* e si basa sulla geometria euclidea e sulla definizione di seno e coseno. Con riferimento alla figura 2.20, siano Δx e Δy gli incrementi delle variabili x e y lungo la curva nella striscia scelta; Δx e Δy sono i cateti di un triangolo retto con angolo α. Sappiamo che, per la definizione delle funzioni trigonometriche, il rapporto tra i cateti di un triangolo retto è uguale a quello tra il coseno e il seno dell'angolo. Vale dunque l'identità $\Delta y/\Delta x = \cos(\alpha)/\mathrm{sen}(\alpha)$. Poiché $\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \mathrm{sen}^2(\alpha)}$ si ottiene, con semplici passaggi algebrici, che

$$\mathrm{sen}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}$$

Mettendo ora assieme i tre passi precedenti, ovvero il principio fisico della conservazione (invarianza) dell'energia totale, la condizione variazionale di minimalità e la condizione geometrica della geometria euclidea, si ottiene:

$$K\left[\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}}\right] = K\,\mathrm{sen}(\alpha) = v = \sqrt{2gy}$$

Ricavando la quantità $\Delta y/\Delta x$ con semplici manipolazioni algebriche, si perviene all'*equazione differenziale della brachistocrona*:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \sqrt{\frac{y}{c - y}}$$

con c costante opportuna che dipende da K e g.

Questa equazione si dice differenziale perché lega tra loro le variabili x e y e i loro incrementi Δx e Δy; per «risolverla» dobbiamo in qualche modo eliminare gli incrementi Δx e Δy e ottenere, nel linguaggio di Cartesio, un'equazione che lega solo x e y.

Johann Bernoulli, Leibniz, Newton per questo (e altri problemi simili) creano il calcolo differenziale, dando origine a una potente rivoluzione concettuale che determinerà lo sviluppo successivo della matematica. Proviamo a dare un'idea di questo nuovo metodo con un esempio.

Si prendono le strisce orizzontali della figura 2.20, che dividono il piano e la curva, sempre più sottili, si considerano cioè Δx e Δy come *elementi infinitesimi*. Supponiamo che l'equazione della curva sia data in forma di grafico, ovvero che x sia esprimibile come funzione di y, $x = x(y)$.

Se leggiamo l'equazione in questo modo:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{y}{(c-y)}}\,\Delta y$$

possiamo dire che l'incremento infinitesimo Δx *è uguale all'area di un rettangolo di base* Δy *e di altezza*

$$\sqrt{\frac{y}{(c-y)}}$$

Ovvero che i due rettangoli grigi nella figura 2.21 hanno la stessa area.

Pensiamo ora la zona denotata con $A1$ come somma di tanti rettangoli da 0 a x; *in corrispondenza* di ognuno di questi rettangoli viene individuato nella zona $A2$ un altro rettangolo della stessa area. Dunque, assumendo Δx e Δy sufficientemente piccoli (infinitesimi) le aree $A1$ e $A2$ sono uguali.

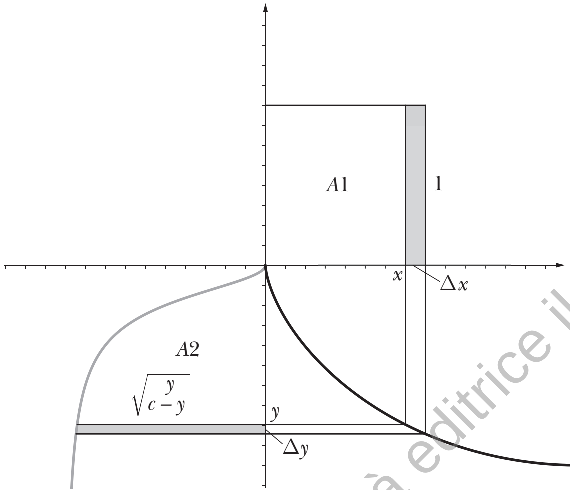


FIG. 2.21.

Bernoulli dice esplicitamente: *ergo & horum integralia aequantur*; in questa frase appare per la prima volta in matematica la parola *integrale*.

Abbiamo quindi dimostrato che $x(y)$, cioè l'area della zona $A1$, è uguale all'area sottostante il grafico della funzione

$$\sqrt{\frac{y}{(c-y)}}$$

da 0 a y, *ovvero* $x(y)$ *è l'integrale della funzione*

$$\sqrt{\frac{y}{(c-y)}}$$

Possiamo alternativamente enunciare il nostro problema con l'uso di un altro concetto fondamentale nella Teoria del calcolo differenziale, quello di *derivata*. Se la funzione $x(y)$ dipende con sufficiente *continuità* da y, facendo diventare Δy arbitrariamente piccolo, anche Δx diventa arbitrariamente piccolo. Inoltre, sotto opportune circostanze, il rapporto $\Delta x/\Delta y$ tende a un valore preciso, che chiameremo la *derivata della funzione* $x(y)$ *rispetto alla variabile* y e che denoteremo con

$$\dot{x}(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

In questa terminologia l'equazione della brachistocrona si scrive

$$\dot{x}(y) = \sqrt{\frac{y}{c - y}}$$

che è un'*equazione differenziale (a variabili separate)*.

Dunque la funzione $x(y)$ *è la funzione la cui derivata è*

$$\sqrt{\frac{y}{(c - y)}}$$

L'idea di derivata oggi è considerata più semplice di quella di integrale, anche se storicamente si è sviluppata dopo, sebbene Fermat, come abbiamo visto, introdusse dei ragionamenti simili per il calcolo della tangente a una curva.

Per *integrare l'equazione della brachistocrona* è necessaria qualche conoscenza dell'analisi matematica imparata alle scuole superiori. Facciamo prima una sostituzione, ovvero consideriamo una variabile ausiliaria t e supponiamo che y dipenda da t secondo l'equazione

$$y(t) = c\ \mathrm{sen}^2(t) = \frac{c}{2} - \frac{c}{2}\cos(2t)$$

Si vede facilmente che

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \dot{y}(t) = c\ \mathrm{sen}(2t)$$

Attraverso la regola

$$\Delta x = \frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \Delta t$$

utilizzando l'equazione per $\Delta x/\Delta y$ si ottiene che $\Delta x = 2c\ \mathrm{sen}^2(t)\Delta t$.

Integrare quest'ultima equazione, ovvero calcolare l'area sotto il grafico della funzione $2c\ \mathrm{sen}^2(t)$, è semplice e permette di ottenere

$$x(t) = \frac{c}{2}(2t) - \frac{c}{2}\mathrm{sen}(2t)$$

(Per chi preferisce derivare è facile controllare che la derivata $\dot{x}(t)$ è proprio $2c\ \mathrm{sen}^2(t)$.)

Ecco dunque delle equazioni parametriche per la curva brachistocrona:

$$(x(t),\ y(t)) = \left(\frac{c}{2}(2t) - \frac{c}{2}\mathrm{sen}(2t),\ \frac{c}{2} - \frac{c}{2}\cos(2t)\right)$$

Bernoulli osserva con grande attenzione queste equazioni ed esclama: *ex qua concludo curvam brachystochronam esse cycloidem vulgarem.*

Si accorge cioè che la brachistocrona non è altro che il luogo percorso da un punto sulla circon-

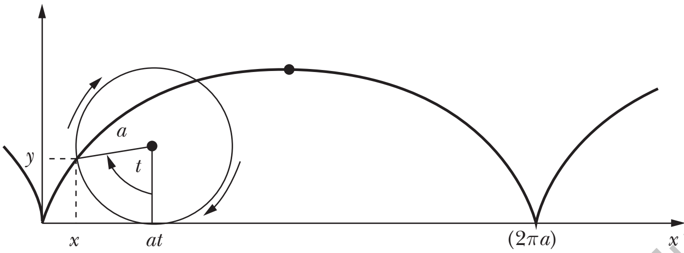


FIG. 2.22.

ferenza di un cerchio di raggio $a = c/2$ che rotola lungo una linea retta, detta *cicloide*. Nella figura 2.22 si osserva infatti che all'istante t le coordinate del punto P sulla curva soddisfano le due equazioni $x(t) = a(t) - a\ \mathrm{sen}(t)$ e $y(t) = a - a \cos(t)$.

Non solo dunque Johann Bernoulli risolve il problema della brachistocrona, ma fornisce anche un meccanismo per la sua costruzione.

I libri di storia contengono parecchi aneddoti gustosi su Bernoulli; il seguente mi sembra interessante per cogliere da un lato la sua passione per il calcolo delle variazioni e dall'altro la difficoltà che matematici e scienziati a volte incontrano nella società.

Johann all'inizio della carriera, persuaso anche dal fratello Jacob, si dedica anche agli studi di medicina, pensando che questo fosse un ottimo campo per l'applicazione della matematica. Si laurea e quindi si addottora in medicina e scrive un libro dal titolo *De nutritione*. In esso, partendo dall'osservazione che una parte fissa di sostanza corporea, uniformemente distribuita, viene persa e rimpiazzata con la nutrizione, calcola che il materiale di cui è formato il nostro corpo viene completamente rinnovato in un periodo di tre anni. Questo risultato provoca un'accesa disputa teologica: implica infatti l'impossibilità di una resurrezione completa del corpo in tutta la sua sostanza!

La fama raggiunta gli fa ottenere la cattedra di matematica all'Università di Groningen, in Olanda, e, di conseguenza, perdere interesse per la medicina.

Per altra strada approda allo studio della cicloide anche Christiaan Huygens (1629-1695), geniale scienziato olandese, che studia sotto la direzione di Cartesio e che anticipa molti risultati del calcolo differenziale. Nel libro *Horologium oscillatorium sive De motu pendulorum* (1673), Huygens si pone il problema di trovare la traiettoria lungo la quale un pendolo si muove con un periodo indipendente dall'ampiezza iniziale. Per il suo pendolo voleva quindi una *curva tautocrona*, dalle parole greche ταυτος (stesso) e χρονος (tempo).

Anche in questo caso si arriva all'equazione traducendo in linguaggio matematico tre osservazioni.

La prima si basa sul principio della conservazione della quantità di moto descritto da Newton; si assume cioè la seconda legge della dinamica, secondo la quale la forza agente sul corpo, F, è uguale alla sua massa, m, per l'accelerazione: $F = ma$. L'accelerazione, per definizione, è uguale alla derivata seconda della sua equazione del moto; dunque se s è la lunghezza dell'arco di traiettoria percorsa, l'accelerazione è data da $\ddot{s}$ e quindi $F = m\ddot{s}$.

La proprietà di tautocronia si ottiene imponendo che l'accelerazione sia proporzionale in ogni punto alla lunghezza d'arco: $\ddot{s} + Ks = 0$.

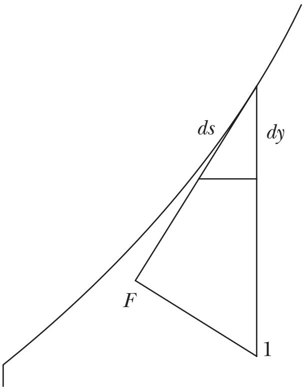


FIG. 2.23.

Mediante considerazioni geometriche vediamo che i due triangoli nella figura 2.23 sono simili, dunque i lati corrispondenti sono in proporzione: da questo otteniamo che $F = -\Delta y/\Delta s$.

Combinando assieme le tre formule ottenute dalle osservazioni otteniamo l'equazione:

$$\frac{\Delta y}{\Delta s} = Ks$$

Integrando rispetto alla variabile s si ottiene

$$y = \frac{K}{2}s^2$$

ovvero

$$s = \sqrt{\frac{2y}{K}}$$

Inserendo questo valore di s in

$$\frac{\Delta y}{\Delta s} = Ks$$

abbiamo che:

$$\frac{\Delta y}{\sqrt{y}} = \sqrt{2K}\,\Delta s = \sqrt{2K}\,\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

e quindi, con una manipolazione algebrica, l'*equazione differenziale della brachistocrona*:

$$\sqrt{\frac{c-y}{y}}\,\Delta y = \Delta x$$

A meno di una traslazione della variabile *y* abbiamo ottenuto la stessa equazione della brachistocrona e quindi, anche in questo caso, la soluzione è una curva cicloide, come Johann Bernoulli stesso notò: *animo revolvens inexpectatam illam identitatem tautochronae Hugeniae nostra que brachystochronae.* La curva cicloide è dunque sia curva brachistocrona che curva tautocrona.

La curva cicloide ha un'ulteriore proprietà molto utile. A partire da una curva piana senza punti singolari si può costruire una nuova curva detta *evolvente* della curva di partenza nel modo seguente. Si avvolge un filo inestensibile attorno alla curva di partenza; la curva che percorre l'estremità esterna del filo svolgendolo a ritroso genera la curva evolvente. La curva di partenza si dice *evoluta* (della sua evolvente).

L'evolvente di un cerchio, ad esempio, è una curva spirale (fig. 2.24).

Huygens notò che ogni cicloide è evoluta (o evolvente) di un'altra cicloide. Costruì quindi un pendolo costringendo il filo alla cui estremità era legata la massa a evolversi lungo profili cicloidali, come nella figura 2.25. Per la proprietà evolvente della cicloide la massa del pendolo è forzata a muoversi lungo una cicloide, ovvero lungo una traiettoria tautocrona.

Le nuove tecniche di calcolo permisero la descrizione precisa di molte altre *curve celebri*, che rap-

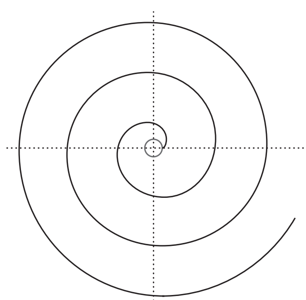


FIG. 2.24.

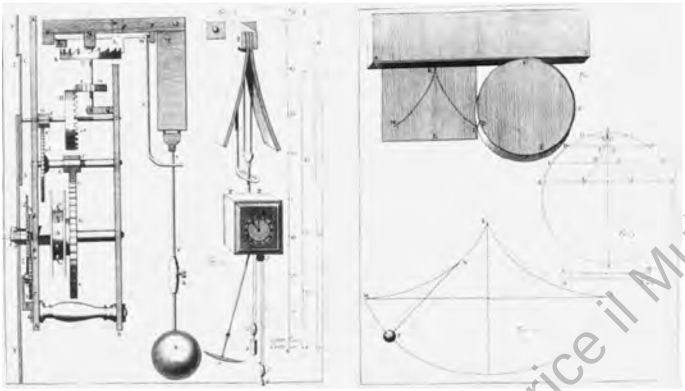


Fig. 2.25.

presentano la soluzione di problemi sia di natura propriamente matematica che di natura fisica o ingegneristica. Tra queste la *curva esponenziale*, che risolve un problema posto dal matematico de Beaune, allievo di Cartesio, la *catenaria*, curva sulla quale si dispone una catena di massa uniforme soggetta alla forza di gravità, l'*isocrona*, curva lungo la quale una massa soggetta alla sola forza di gravità abbassa la sua altezza linearmente nel tempo. Da menzionare infine, anche perché ne parleremo nel terzo capitolo, la *trattrice*: una curva che Leibniz descrive disponendo il suo orologio da taschino sul tavolo, con la catena che lo legava al panciotto ben tesa. Trasci-

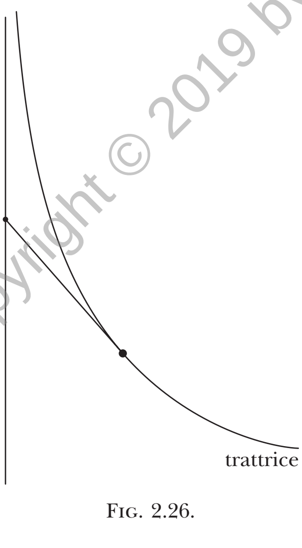


Fig. 2.26.

nando l'anello della catena in direzione ortogonale l'orologio si muove lungo una curva detta appunto trattrice. In altre parole, è la curva piana tale che su ogni retta tangente il segmento tra il punto di contatto e l'intersezione con una retta fissa (asintoto) ha lunghezza costante (fig. 2.26).

La curvatura… che la diritta via era smarrita

Supponete di essere alla guida di una macchina su una strada che alterna tratti rettilinei a tratti curvi. Nei tratti rettilinei non avete bisogno dello sterzo, ma se la strada si curva dovete agire su di esso, in proporzione a quanto è larga o stretta la curva. La misura della rotazione dello sterzo ci fornisce dunque la *curvatura* della strada: quando è 0 la strada è diritta, quanto più lo sterzo è azionato tanto più la strada si allontana dalla linea retta.

Dare un significato matematico a tutto questo non è facile: dobbiamo assegnare ad ogni punto di una curva un numero che misuri quanto questa si «incurvi» in quel punto. In particolare questo numero dovrà essere 0 su tutti i punti di una retta; nel caso di una circonferenza invece un numero corretto potrebbe essere l'inverso del raggio, poiché più piccolo è il suo raggio più questa è incurvata.

Considereremo il caso semplice delle curve piane senza punti singolari. Abbiamo visto in precedenza come definire la retta tangente, la retta che meglio approssima la curva in un intorno del punto e che dà informazioni sulla *direzione* della curva.

Per studiare come la curva si allontani dalla sua tangente, Newton per primo considerò il *cerchio oscu-*

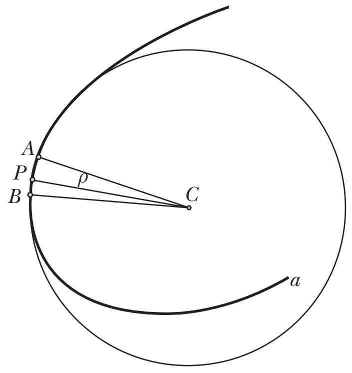


FIG. 2.27.

latore, il cerchio che meglio approssima la curva in un suo punto P e che può essere costruito nel modo seguente. Si prendano due punti A e B sulla curva vicini a P e si consideri la circonferenza passante per A, B e P; il cerchio osculatore è il cerchio limite ottenuto facendo muovere A e B lungo la curva verso P (fig. 2.27).

Il centro del cerchio osculatore C è detto *centro di curvatura*. L'inverso del suo raggio è la *curvatura della curva in P*.

Con questa definizione la curvatura della retta è 0 mentre quella del cerchio di raggio r è $1/r$ in ogni suo punto, come volevamo.

Per una curva data come grafico $(x, y(x))$ Newton determina un'elegante espressione per la curvatura in ogni punto in funzione delle derivate prima e seconda:

$$k(x,\ y) = \frac{[1 + (\dot{y}(x))^2]^{3/2}}{\ddot{y}(x)}$$

Si possono pensare anche curve che escono dal piano e «abitano» propriamente lo spazio tridimensionale. Per queste curve i matematici in italiano hanno deciso di utilizzare la parola *curva sghemba o gobba*.

Curve di questo tipo sono state studiate nell'antichità, spesso come intersezioni di superfici o come spirali nello spazio. Un loro studio più sistematico inizia solo nel '700, dopo la rifondazione operata da Cartesio e Fermat che permette di rappresentare una curva gobba in un sistema di coordinate spaziale dove ogni punto dello spazio è associato a una tripla (x, y, z). La curva può essere descritta da equazioni parametriche, ovvero da tutti i punti dati da tre funzioni $(x(t), y(t), z(t))$ al variare del parametro t. Ovviamente si richiede che le tre funzioni soddisfino criteri di regolarità, ad esempio che siano polinomi o semplicemente derivabili.

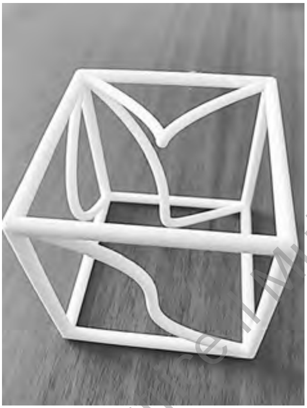


FIG. 2.28.

Un esempio interessante è la curva di equazione parametrica $(\mathrm{sen}(t), \cos(t), t)$ che rappresenta una spirale cilindrica. Un altro è dato dalla cubica gobba di equazioni (t, t^2, t^3); la figura 2.28 rappresenta un modellino creato da Oliver Labs con una stampante 3D. La cubica è inserita in un cubo sulle cui facce troviamo tre curve diverse che si ottengono proiettando la cubica su queste facce, matematicamente cancellando una delle tre coordinate. Si ottengono: la parabola (t, t^2) (faccia sulla sinistra), la cubica piana liscia (t, t^3) (faccia in alto) e la cubica piana con cuspide (t^2, t^3) (faccia frontale).

Per ogni punto P di una curva gobba possiamo definire il *piano osculatore* come la posizione limite del piano passante per P e per altri due punti generici P', P'' della curva, quando si fanno tendere P' e P'', lungo la curva, a P. Per una curva piana il piano osculatore coincide in ogni punto con il piano della curva.

In maniera simile a quella per una curva nel piano si può definire un *cerchio osculatore*, imponendo che giaccia sul piano osculatore. L'inverso del suo raggio viene denominato (*prima*) *curvatura* della curva in P. Questa non è sufficiente a determinare quanto la curva si incurvi nello spazio. La misura di quanto varia il piano osculatore nell'intorno di P è una funzione che viene denominata *torsione* (o *seconda curvatura*) della curva in P. Curvatura e torsione determinano completamente il comportamento della curva sghemba.

Il concetto di curvatura si estende in seguito dalle curve alle superfici e quindi alle varietà di dimensione alta, come vedremo nel seguito, diventando uno dei concetti più profondi e fecondi della geometria moderna.

Alla ricerca dei punti razionali

Definendo con Cartesio una curva algebrica come il luogo dei punti nel piano le cui coordinate (x, y) soddisfano un'equazione $f(x, y) = 0$ una domanda sorge naturale. Una curva così definita ha sempre dei punti, in altre parole per una funzione $f(x, y)$ esistono sempre delle coppie (x, y) che la annullano? E se esistono, vi è un modo per determinarle o magari un algoritmo per calcolarle?

La curva data dall'equazione $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$, ad esempio, non può avere soluzioni tra i numeri reali: infatti il quadrato di un numero reale è sempre positivo e dunque $f(x, y)$ è sempre maggiore o uguale a 1.

I numeri reali sono un insieme che contiene i numeri naturali {0, 1, 2, 3, 4, …}, gli interi {0, ±1, ±2, ±3, ±4, …}, i razionali, ovvero i quozienti degli interi p/q con p e q interi, e tanti altri numeri, detti irrazionali, come ad esempio le radici degli interi ($\sqrt{2}$, …) e i numeri trascendenti (π, e, …). Questi numeri sono stati ben definiti, assiomatizzati, solo all'inizio del '900.

I matematici hanno poi creato un insieme ancora più grande di numeri, i *numeri complessi*, che contiene i reali e anche i numeri immaginari determinati come radici di numeri negativi, ad esempio $\sqrt{-1} := i$. In questo insieme ogni curva algebrica ha dei punti. Oggi si studiano le curve utilizzando i numeri complessi e successivamente si determina quali punti siano reali e quanti invece puramente «immaginari».

In questo contesto il problema più difficile (e ricco di applicazioni) è quello di determinare i punti di una curva algebrica le cui coordinate sono coppie di numeri razionali, o semplicemente interi, e come trovarli.

Se la curva ha grado 1, ovvero è una retta, la soluzione è molto semplice, basta assegnare a una delle variabili un valore razionale e ricavare il valore dell'altra dall'equazione, che risulterà essere anch'essa razionale. Ad esempio, se la retta è data dall'equazione $3x - y + 2 = 0$, assegnando a x il valore p/q si ottiene per y il valore $3(p/q) + 2$, che è razionale.

Il problema è già molto difficile per una curva di grado 2; prendiamo ad esempio la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. In questo caso, se assegniamo un valore razionale a una delle due variabili, per ricavare il valore della seconda dobbiamo fare una radice quadrata, e dunque molto probabilmente non otterremo un valore razionale.

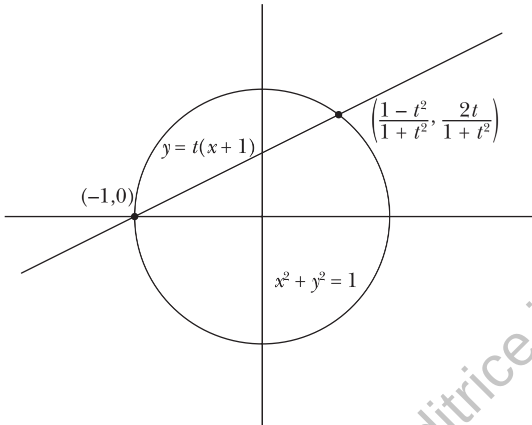


FIG. 2.29.

Diofanto di Alessandria nel III secolo d.C. affrontò e risolse il problema della ricerca dei punti razionali della circonferenza con quello che oggi viene chiamato *metodo delle corde* (di Diofanto). Partiamo da una soluzione razionale ovvia, $x = -1$ e $y = 0$, e costruiamo tutte le rette passanti per questo punto, come nella figura 2.29.

Queste rette sono descritte dall'equazione $y = t(x + 1)$. Al variare di t queste rette intersecano la circonferenza in un altro punto che, con facili conti, possiamo vedere essere

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Al variare di t percorriamo tutta la circonferenza e dunque queste sono delle equazioni parametriche della circonferenza; particolarmente semplici, date come quozienti di due polinomi. Funzioni che sono quozienti di due polinomi si dicono *razionali* e hanno la proprietà, importante per il nostro scopo, che assumono valori razionali per ogni valore razionale della variabile t.

Assegnando quindi valori razionali alla variabile t, ovvero $t = p/q$ con p e q numeri interi, nelle due equazioni precedenti, troviamo che le coppie di numeri razionali che soddisfano l'equazione $x^2 + y^2 = 1$ sono le coppie

$$(x, y) = \left(\frac{q^2 - p^2}{q^2 + p^2}\right), \left(\frac{2pq}{q^2 + p^2}\right)$$

al variare di p e q nei numeri interi.

Diofanto osserva che da queste coppie possiamo ottenere tutte le terne di numeri interi (a, b, c) tali che $a^2 + b^2 = c^2$, le così dette *terne pitagoriche*. Basta semplicemente togliere il denominatore comune, $q^2 + p^2$, e chiamarlo c; poi eventualmente moltiplicare tutto per un intero r. Otteniamo in questo modo tutte le terne pitagoriche:

$$(a, b, c) = (r(q^2 - p^2), r2pq, r(q^2 + p^2))$$

dove r, p e q sono numeri interi. Ad esempio, con $r = 1$, $p = 1$ e $q = 2$ si ha la terna pitagorica (3, 4, 5).

Un'equazione polinomiale in due (o più) variabili con coefficienti numeri interi (o razionali) si dice *equazione diofantina*. Trovare coppie di numeri razionali che soddisfano equazioni diofantine di grado superiore al secondo è un problema difficile, studiato con tecniche oggi molto sofisticate che vanno dall'algebra alla geometria e all'analisi.

Ovviamente se si potesse esibire una parametrizzazione razionale della curva associata all'equazione il problema avrebbe immediata soluzione, ma quasi sempre queste parametrizzazioni non esistono.

Anche Newton si dedicò allo studio delle curve algebriche piane; in particolare seguendo la strada avviata da Cartesio ottenne una classificazione completa delle curve di grado tre, le *cubiche*.

Il passo cruciale di questa classificazione consiste nel notare che ogni cubica priva di punti singolari ha almeno un *punto di flesso*, cioè un punto non singolare in cui la tangente «tocca» la curva con molteplicità maggiore di due. Partendo da questa osservazione Newton dimostra che ogni cubica non singolare, con un'opportuna scelta del sistema di riferimento, può essere descritta da un'equazione della forma $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Le cubiche singolari hanno una parametrizzazione razionale, come abbiamo visto ad esempio nel caso del *Folium* di Cartesio.

Se la cubica non ha singolarità, ovvero è liscia, in generale non ha una parametrizzazione razionale; questo è vero per ogni curva algebrica piana non singolare di grado maggiore di due. Si noti che dimostrare l'impossibilità di qualcosa in matematica (in questo caso l'impossibilità di parametrizzare con funzioni razionali) è spesso più difficile che dimostrarne la possibilità.

Il problema di parametrizzare le cubiche lisce con delle funzioni semplici fu affrontato da grandi matematici come Niels Henrik Abel (1802-1829), Carl Gustav Jacobi (1804-1851), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Leonhard Euler (1707-1783). In analogia con le funzioni trigonometriche seno e coseno che parametrizzano la circonferenza essi introdussero delle funzioni speciali, le *funzioni ellittiche*, che in maniera naturale parametrizzano le cubiche lisce.

Queste funzioni non sono algebriche né razionali, ovvero non sono esprimibili né come polinomi né come quozienti di polinomi, e la loro descrizione è piuttosto complessa. Nel vero senso della parola, ovvero per capire qualcosa di esse bisogna passare ai numeri complessi sopra citati. Si possono dimostrare parecchie proprietà di queste funzioni, simili a quelle delle funzioni trigonometriche. Ad esempio delle proprietà di addizione: dati cioè i valori delle funzioni in due punti si può calcolare il valore in un terzo punto attraverso un procedimento matematico detto di addizione.

L'utilizzo delle funzioni ellittiche porta a scoprire molte proprietà geometriche e algebriche o aritmetiche delle cubiche piane, che per questo vengono spesso anche chiamate *curve ellittiche*.

Un importante teorema, congetturato da Henri Poincaré (1901) e dimostrato poi da Louis Mordell (1922), afferma che il metodo delle corde di Diofanto può essere applicato con successo anche nel caso delle cubiche. Ogni punto a coordinate razionali di una cubica liscia può essere ottenuto a partire da un numero finito di punti razionali intersecando la cubica con corde per due di questi punti o tangenti a uno. Purtroppo non si riesce a trovare un algoritmo esplicito che determini questi punti iniziali per ogni curva cubica.

Lo stesso Diofanto nel suo libro *Arithmetica* fa uso non solo delle corde ma anche delle tangenti per la ricerca di punti razionali su una cubica. Per capire la sua abilità tecnica, sorprendente per l'epoca, consideriamo un problema e la sua soluzione contenuti nel sesto capitolo di *Arithmetica*.

PROBLEMA 18. Si determini un triangolo rettangolo la cui area aggiunta all'ipotenusa sia un (numero razionale elevato al) cubo e il cui perimetro sia un (numero razionale elevato al) quadrato.

Per interpretare questo problema in linguaggio moderno scegliamo un'unità di misura tale che un cateto del triangolo sia lungo 2. Detti b e c l'altro cateto e l'ipotenusa il problema si traduce facilmente in quello di trovare b e c tali che $b + c = \beta^3$ e $2 + b + c = y^2$. Sostituendo $b + c = \beta^3$ nella seconda equazione otteniamo $\beta^3 + 2 = y^2$. Posto $x = \beta + 1$, dobbiamo trovare dei punti razionali sulla cubica $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = y^2$.

Diofanto suggerisce di sostituire $(3/2)x + 1$ al posto di y; questa sostituzione ci dà l'equazione $x^3 - (21/4)x^2 = 0$, che ha come soluzioni $x = 0$ e $x = (21/4)$. Quest'ultima ci fornisce a ritroso la soluzione

$$b = \frac{24121185}{628864} \qquad \text{e} \qquad c = \frac{24153953}{628864}$$

Diofanto non spiega le ragioni che lo hanno portato a sostituire y con $(3/2)x + 1$. Oggi potremmo pensare che, preso il punto razionale (0,1) sulla curva, abbia quindi calcolato la tangente alla curva in quel punto, scoprendo che è proprio la retta $y = (3/2)x + 1$ (fig. 2.30)!

Il lettore può verificare che la retta è davvero la tangente nel punto (0,1); suggerisco di traslare il

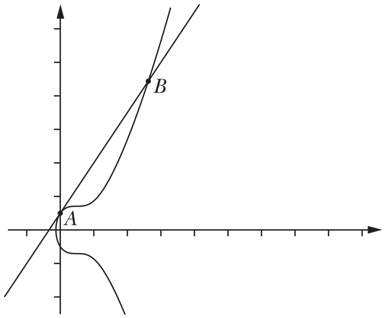


FIG. 2.30.

punto in (0,0) e quindi di modificare di conseguenza l'equazione della curva.

Pierre de Fermat fu un appassionato lettore dell'*Arithmetica* di Diofanto. Egli scrisse numerose osservazioni in margine a un'edizione del 1621, raccolte in un libro pubblicato postumo secondo una sorte comune a quasi tutte le sue opere. In una di queste note egli scrisse:

> D'altra parte è impossibile che un cubo possa essere scritto come somma di due cubi, o che una potenza quarta sia somma di due potenze quarte, o, in generale che ogni numero che sia una potenza superiore alla seconda possa essere scritta come somma di due analoghe potenze. Ho ottenuto una davvero splendida dimostrazione di questa proposizione, che il margine di questo libro è troppo piccolo per contenere.

Fermat qui afferma che non esistono tre interi a, b, c (non nulli) tali che $a^n + b^n = c^n$, con n intero maggiore di 2. Dunque che il problema della ricerca di soluzioni razionali della funzione diofantina $x^n + y^n = 1$, per $n \geq 3$, non ammette soluzioni.

Questo è uno dei più famosi problemi matematici, alla cui soluzione hanno dedicato grandi sforzi i maggiori matematici degli ultimi 350 anni; viene denominato come il *Grande Teorema (o Congettura) di Fermat*.

Nel 1986 il matematico tedesco Gerhard Frey osservò che il teorema proposto da Fermat è vero se la cubica liscia $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$ ha particolari proprietà.

Nel 1993 l'inglese Andrew Wiles annunciò al mondo, durante un seminario al Newton Institute di Cambridge, di aver provato la famosa (per i matematici) congettura dei giapponesi Taniyama-Shimura, ovvero che ogni curva ellittica (semistabile) ha questa proprietà e che, di conseguenza, il Teorema di Fermat è vero.

Fu un momento di grande eccitazione per i matematici di tutto il mondo, una congettura aperta da secoli veniva finalmente provata! Ricordo ancora la frenesia al Max-Planck-Institut für Mathematik di Bonn, dove in quel momento stavo lavorando: la notizia arrivò via e-mail la mattina presto, diffusa dall'americano Serge Lang. Il tedesco Gerd Faltings, professore e codirettore dell'Istituto di Bonn, aveva in precedenza dimostrato, con l'uso delle tecniche di Mordell sulle cubiche, che gli eventuali controesempi al Teorema di Fermat sono al più un numero finito, per questo nel 1986 gli viene conferita la medaglia Fields. Faltings decise di tenere subito una serie di seminari pubblici per studiare il risultato di Wiles, ma al secondo appuntamento cancellò il seminario: la dimostrazione aveva una grossa falla!

Con perizia matematica e con la collaborazione del suo studente Richard Taylor, Wiles riuscì in un anno a sistemare la dimostrazione, che venne quindi pubblicata, dopo essere stata valutata da più esperti, nel 1995 in due articoli sulla rivista «Annals of Mathematics».

Alla soluzione della congettura di Fermat, Andrew Wiles dedicò sette anni della sua vita. Questa avventura matematica è stata raccontata da Simon Singh prima in un bel libro dal titolo *L'ultimo teorema di Fermat* e quindi anche in un film-documentario dallo stesso titolo della PBS-NOVA.

Poiché per regolamento la medaglia Fields non può essere assegnata a matematici di età superiore ai 40 anni, Wiles, che ha concluso con successo la prova all'età di 41 anni, non potrà mai ricevere questo premio.

La ricerca di soluzioni razionali o intere di equazioni diofantine è un tema di grande interesse in numerosi campi della matematica e in tante sue applicazioni; in particolare nel campo della comunicazione digitale, per trasmettere pubblicamente messaggi dal contenuto che si vuole tenere segreto. Per questo la Teoria delle cubiche piane è molto studiata oggi dagli esperti di crittografia.

Come costruiscono le curve i nativi digitali

Alcuni studiosi dell'evoluzione del pensiero e della conoscenza umana fanno notare che un punto critico di questa evoluzione, una singolarità nella curva della conoscenza, è dato dal passaggio dall'*epos* al *logos*, ovvero dalla transizione da una tradizione orale a una scritta. Questo passaggio inizia con Omero (VII sec. a.C.) e raggiunge completa maturazione in età ellenistica. Un grande contributo è stato dato dagli scritti di Euclide, Archimede, Apollonio, nei quali l'intuizione geometrica e il calcolo algebrico vengono codificati per iscritto. In questo capitolo abbiamo visto come Euclide abbia messo per iscritto il concetto di curva e le conoscenze che da questo derivano; e poi come Cartesio l'abbia completato con l'uso dell'algebra, e infine altri con le tecniche dell'analisi.

Oggigiorno, a mio parere, stiamo attraversando un periodo simile di transizione, da una tradizione scritta e orale a una tradizione digitale, da *epos* e *logos* a *digital*. Abbiamo a disposizione nuovi strumenti, concettuali e tecnologici, in grado di riflettere e interpretare le esigenze semplificatrici della nostra mente (Enriques), di creare connessioni tra il mondo delle idee e la realtà concreta, in modo semplice e diretto. Strumenti che si basano sui computer, sulla tecnologia dell'informazione, su robot e stampanti, e ora anche sulle officine digitali (in inglese *fabrication laboratory*, o *fab lab*). Tutto questo, che in ultima analisi è frutto delle applicazioni della matematica, si presta molto bene a dar vita (digitalmente) a nuove idee matematiche.

Parecchi software permettono oggi di visualizzare facilmente su un computer, e poi eventualmente stampare, una qualunque curva algebrica. Per disegnare le curve di questo capitolo io ho usato il programma GeoGebra, scaricabile gratuitamente dalla pagina web https://www.geogebra.org/, che contiene anche istruzioni e molti esempi. La facilità d'uso è veramente sorprendente; in molte scuole medie oggi un ragazzo impara a disegnare curve con un computer, a modificare a piacimento l'equazione

FIG. 2.31.

per ricavare curve più adatte agli scopi che si è prefisso. Darei il mio snowboard nuovo (con un profilo curving che permette curvature molto strette sui pianori nevosi) per vedere Cartesio alle prese con questo «compasso moderno», che dialoga perfettamente con la lingua della geometria analitica da lui creata!

Ma oggi in un *fab lab* possiamo fare anche di più: con una taglierina laser (fig. 2.31), in grado di «leggere» le equazioni delle curve che abbiamo precedentemente ideato con il software, siamo in grado di creare profili su innumerevoli materiali, ad esempio plastica, legno e anche marmo. Possiamo quindi realizzare concretamente e facilmente molte idee e

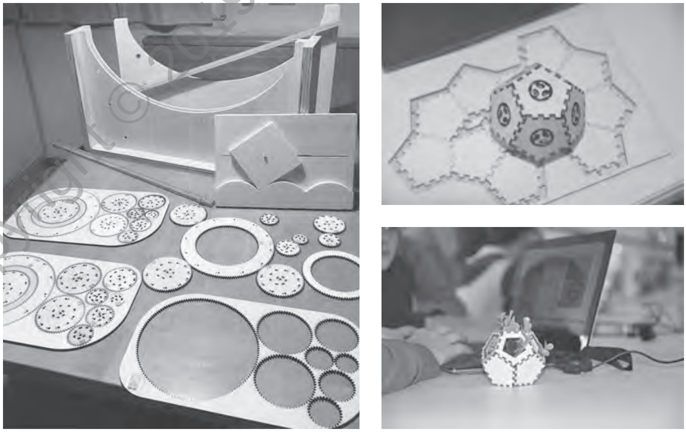


FIG. 2.32.

utilizzarle, ad esempio, nei campi del design e della tecnologia.

In un *fab lab* le curve entrano a far parte sempre più dell'educazione e degli strumenti tecnologici che accompagnano il nostro agire contemporaneo.

Nella figura 2.32 sono riportate alcune immagini di oggetti creati con la taglierina laser al MUSE, il Museo delle Scienze di Trento.

III
Superfici

La seguente definizione di superficie presa dall'*Enciclopedia Treccani* ben riassume il senso comune:

il contorno di un corpo, ovvero l'elemento di separazione della regione dello spazio occupata dal corpo da quella non occupata. O anche, con riferimento a determinati corpi, la faccia esterna. Ad esempio la superficie di un frutto, o del corpo umano; nell'altro senso la superficie interna di un vaso. Una superficie può essere pensata più o meno piana e a due dimensioni.

In matematica la definizione nasce per astrazione dalla nozione intuitiva di contorno di un corpo, avente le caratteristiche di una lamina pensata priva di spessore. Oppure con riferimento al modo in cui è ottenuta: si definisce ad esempio superficie di rotazione (o di rivoluzione o rotonda) la superficie generata da una curva nella rotazione attorno ad una retta (asse).

Le caratteristiche di essere più o meno piana e a due dimensioni sono difficili da definire matematicamente e, come vedremo, richiedono una buona dose di astrazione.

Partiamo ancora dagli *Elementi* e vediamo cosa propone Euclide nel Libro I.

DEFINIZIONE 5. Una superficie è ciò che ha lunghezza e larghezza.

La definizione è abbastanza criptica, vuole probabilmente dire che ha due dimensioni, ma senza

FIG. 3.1.

specificare cosa si debba intendere per lunghezza e larghezza.

Prosegue poi con le definizioni di superfici particolari, come piano, cono, cilindro e sfera.

Per il primo Euclide usa una definizione molto simile alla definizione 4 della retta.

DEFINIZIONE 7. Una superficie piana è quella che giace ugualmente rispetto alle rette su di essa (fig. 3.1).

Una possibile interpretazione è che, dati due punti su un piano, la retta che li congiunge stia tutta nel piano; forse però non era questa la sua idea: infatti, in una proposizione successiva, dimostra che date due rette parallele e due punti su di esse, la retta che li congiunge giace sul piano definito dalle due rette!

Si noti che, a differenza della retta o del cerchio, non postula l'esistenza del piano.

Per la definizione di cono, cilindro e sfera sceglie invece il concetto di superficie di rotazione, una superficie ottenuta ruotando una curva piana (detta *generatrice*) attorno a una retta (detto *asse di rotazione*). Vediamo ad esempio la definizione di sfera.

LIBRO IX, DEFINIZIONE 14. Quando un semicerchio di diametro fissato si fa ruotare fino a tornare nella posizione di partenza, la figura ottenuta è una sfera.

A differenza del cerchio, per il quale Euclide sviluppa una corposa teoria (nel Libro V), della sfera dice ben poco. Non dimostra nemmeno il fatto che i punti della sfera sono equidistanti dal centro della sfera; la dimostrazione è di fatto evidente, poiché ogni punto sta su una rotazione della semicirconferenza di partenza e dunque è equidistante dal centro di questa.

Con l'eccezione di Archimede, di cui parleremo tra poco, la matematica greca non approfondisce molto il concetto di superficie, preferisce di gran lunga la geometria piana e non dà origine a una teoria organica degli oggetti nello spazio.

Una superficie si dice *rigata* se è ricoperta da rette, o equivalentemente se per ogni suo punto passa una retta contenuta sulla superficie. Esempi di superficie rigata sono i coni, superfici generate dalle rette che congiungono una curva piana con un punto esterno al piano (detto *vertice del cono*); e i cilindri, generati dalle rette passanti per un punto di una curva piana e con direzione fissata ortogonale al piano. La figura 3.2 rappresenta un iperboloide iperbolico (con un cono all'interno), una superficie doppiamente rigata perché per ogni suo punto passano due rette distinte giacenti su di essa.

Un altro tipo di superficie rigata è quella generata da tutte le rette tangenti a una curva gobba. Questi esempi di superficie rigata si chiamano anche *superfici sviluppabili* perché, se pensate come un pezzo di stoffa flessibile e inestensibile, possono essere distese, almeno localmente, sopra una superficie piana.

FIG. 3.2.

Un altro esempio di superficie rigata è dato dall'elicoide, generato dal movimento elicoidale di una retta lungo un asse. Quando la retta è perpendicolare all'asse si ha un elicoide retto. La scala a chiocciola è un esempio di elicoide retto, un altro è la famosa *vite idraulica di Archimede*, un dispositivo meccanico usato per sollevare un liquido o un materiale granulare che ancor oggi viene usato per l'estrazione dell'acqua.

Archimede e la geometria della sfera

La perfezione del cerchio e soprattutto della sfera affascina un grande matematico greco, il siracusano Archimede (287-212 a.C.). Figura emblematica di scienziato e inventore, vive e opera nella cultura della Magna Grecia, con un approccio molto autonomo e originale. In stretto contatto con gli studiosi di Alessandria, con i quali dialoga per lettera (meglio per «papiro»), dimostra in geometria sorprendenti risultati e teoremi.

Il suo metodo di ricerca è molto innovativo e per certi aspetti diverso da quello di Euclide e degli altri geometri greci. Nel primo capitolo abbiamo riportato le parole che lui stesso usa per descrivere il modo con cui arriva alle scoperte matematiche attraverso due momenti in qualche modo distinti.

Nella prima parte, con un metodo che lui chiama meccanico, basato su principi di equivalenza di misure (pesi, lunghezze, aree) concretamente verificabili attraverso anche ausili meccanici (leve e sovrapposizioni), perviene alla formulazione dei teoremi. Un modo di fare matematica molto pratico, simile a quello usato oggi dagli ingegneri matematici.

Non attribuisce a questo primo metodo un rigore sufficiente per determinare una prova matematica del risultato e fornisce quindi una dimostrazione conclusiva, che chiama geometrica, con il metodo logico-deduttivo di Euclide. Più precisamente si rifà al metodo di esaustione di Eudosso, che consiste nell'approssimare la figura oggetto dell'analisi, dall'interno e dall'esterno, con poligoni o poliedri.

Non soddisfatto della versione delle teorie di Eudosso contenute nel Libro V degli *Elementi* né da una discussione più approfondita introducendo un nuovo assioma, che oggi chiamiamo *assioma di Archimede*. Prendiamoci un po' di tempo per capire la delicatezza di questa Teoria dell'esaustione e il perché della necessità di aggiungere ad essa un nuovo assioma.

La *Teoria delle proporzioni* si prefigge di considerare lunghezze di curve (o aree di superfici, volumi di solidi) come numeri. I Greci avevano a disposizione solo i numeri razionali sebbene, come abbiamo visto, fossero ben consapevoli dell'esistenza di lunghezze non razionali. Per il Teorema di Pitagora, ad esempio, la lunghezza della diagonale del quadrato unitario è uguale alla radice di 2, un numero non razionale, o come si diceva al tempo non commensurabile.

Come interpretare dunque queste lunghezze? Come confrontarle tra loro? Archimede, nel primo libro del trattato *Sulla sfera e il cilindro*, enuncia il seguente postulato:

POSTULATO. Che inoltre tra linee diseguali, superfici diseguali e solidi diseguali il maggiore superi il minore di una quantità tale che, se addizionata a sé stessa, possa superare ogni assegnata grandezza del tipo di quelle confrontate tra loro.

Ancora oggi diciamo che in un insieme di numeri, con un'addizione, una moltiplicazione (un *campo*) e un ordine, vale l'*assioma di Archimede* se per ogni due elementi positivi a e b esiste un intero positivo n tale che $na > b$. I numeri reali sono un campo ordinato che risulta essere, come i razionali, archimedeo. (I reali sono anche un *campo completo*, dunque più che archimedeo, e per questo ad ogni lunghezza di segmento è possibile associare un numero reale; si parla di *retta reale*.)

Dalla proprietà archimedea segue senza grande difficoltà che le lunghezze razionali (numeri razionali) sono dense nella totalità delle lunghezze (numeri reali), ovvero che per ogni coppia di lunghezze $x < y$ esiste una lunghezza razionale a tale che $x < a < y$.

Per questo l'assioma ha permesso ad Archimede, e a noi di conseguenza, di dire *senza ambiguità* che qualunque lunghezza è determinata univocamente dalle lunghezze razionali più piccole e più grandi di essa. Diremo infatti che due lunghezze sono uguali, $l_1 = l_2$, se ogni lunghezza razionale $< l_1$ è anche $< l_2$ e viceversa.

Il *metodo di esaustione* poggia sulla Teoria delle proporzioni e consiste nel calcolare una grandezza Σ comprimendola tra una limitazione inferiore, I_n, non decrescente e una limitazione superiore, C_n, non crescente, tali che, per opportuni n, la differenza (o il rapporto) $C_n - I_n(C_n : I_n)$, può essere reso minore di ogni assegnata grandezza (minore del rapporto di due qualsiasi assegnate grandezze).

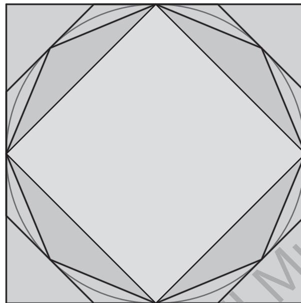


FIG. 3.3.

Con il metodo di esaustione, ad esempio, si può provare che l'area di un cerchio di raggio r, $A(r)$, è proporzionale al quadrato del suo raggio: $A(r) = \text{costante} \times r^2$. Vediamo come considerando l'approssimazione con poligoni regolari iscritti e circoscritti nella figura 3.3.

Siano $P_1(r) \subset P_2(r) \subset P_3(r) \subset \ldots$ la successione di poligoni interni e $Q_1(r) \supset Q_2(r) \supset Q_3(r) \supset \ldots$ quella di poligoni esterni; ogni poligono è ottenuto dal precedente bisecando l'angolo tra due vertici.

Prendendo i grande abbastanza, la differenza di area $Q_i(r) - P_i(r)$ può essere scelta arbitrariamente piccola; per i grande dunque $P_i(r)$ approssima arbitrariamente l'area del cerchio $A(r)$.

L'area di un poligono regolare di n lati inscritto in un cerchio di raggio r è proporzionale al quadrato del raggio, r^2, la costante di proporzionalità dipendente solo da n; il poligono è infatti formato da n triangoli isosceli con i lati uguali di lunghezza r.

Presi due cerchi di raggio r e r', denotando con $P_i(r)$ e rispettivamente con $P_i(r')$ le successioni dei poligoni interni a uno e all'altro, avremmo pertanto che $P_i(r) : P_i(r') = r^2 : r'^2$.

Supponiamo ora per assurdo che $A(r) : A(r') < r^2 : r'^2$. Di conseguenza se i è abbastanza grande anche $P_i(r) : P_i(r') < r^2 : r'^2$, ma questo contraddice quanto affermato sopra. Similmente si prova che anche la disuguaglianza $A(r) : A(r') > r^2 : r'^2$ è assurda.

Dunque deve valere

$$A(r) : A(r') = r^2 : r'^2$$

Nel 1706 il matematico William Jones propose di usare il simbolo π per rappresentare la costante di proporzionalità e scrisse quindi la famosa formula

$$A(r) = \pi r^2$$

Con l'uso degli stessi poligoni, in maniera simile, si può dimostrare che, denotata con $S(r)$ la lunghezza della circonferenza del cerchio di raggio R, si ha $S(r) = 2\pi r$.

Nel trattato sulla *Misura del cerchio* Archimede utilizza il metodo di esaustione per determinare, con una buona approssimazione, la costante π, pensata come l'area del cerchio di raggio unitario. Questo problema viene di solito indicato come la *quadratura del cerchio* e anche nel dire comune rappresenta qualcosa di «impossibile». Archimede e i matematici greci intuiscono che questo numero non è razionale ma una vera dimostrazione di questo fatto avviene solo nel 1794 per opera del matematico Adrien-Marie Legendre. Nel 1882 Ferdinand von Lindemann dimostra che è addirittura trascendente, dunque che qualunque sua potenza e qualunque combinazione di sue potenze non è razionale. Il numero π è quindi particolarmente ostico e, in ultima analisi, il modo migliore per affrontarlo è ancora attraverso la Teoria delle proporzioni e dell'esaustione. L'enunciato di Archimede è il seguente.

PROPOSIZIONE 3. La circonferenza di ogni cerchio è tripla del diametro, e lo supera ancor meno di un settimo del diametro, e di più di dieci settantunesimi.

In altre parole dimostra che π è compreso tra $3 + (10/71)$ e $3 + (1/7)$. La dimostrazione si ottiene con il metodo di esaustione, iscrivendo e circoscrivendo il cerchio con poligoni fino a 96 lati!

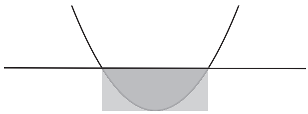


FIG. 3.4.

Nel trattato sulla *Quadratura della parabola*, con un'esaustione fatta con triangoli, dimostra che l'area del *segmento parabolico*, ovvero della parte finita di piano compresa tra una parabola e una retta che la interseca, come nella figura 3.4, è equivalente a 2/3 dell'area del rettangolo ad esso circoscritto.

Questi due risultati lo rendono subito molto famoso, ma quello di cui Archimede è più fiero è la determinazione della superficie della sfera nel trattato *Sulla sfera e il cilindro*. Scrive nell'introduzione:

> In seguito, essendomi imbattuto in teoremi degni di considerazione, composi la loro dimostrazione. Sono questi: dapprima che la superficie della sfera è quadrupla del suo cerchio massimo [...] Oltre a questi: che ogni cilindro con base uguale al cerchio massimo di una sfera e altezza uguale al diametro è una volta e mezzo la sfera e la sua superficie totale è anch'essa una volta e mezzo la superfice della sfera. [...]
>
> Queste proprietà erano da sempre inerenti alla natura delle figure menzionate, ma rimasero ignote a coloro che prima di noi si occuparono di geometria, dal momento che nessuno di essi comprese che esiste commensurabilità tra queste figure. Perciò io non esiterei a paragonare queste proprietà con le speculazioni di altri geometri e con quei teoremi di Eudosso sulle figure solide che a mio parere sono i più eccellenti, cioè che ogni piramide è un terzo del prisma che ha stessa base e altezza, e che ogni cono è un terzo del cilindro che ha stessa base e altezza.

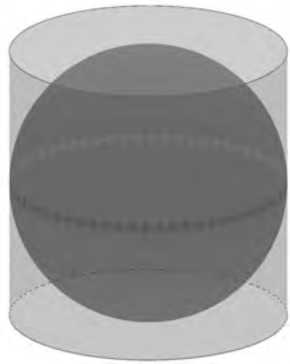


FIG. 3.5.

Indicando con $S(r)$ la superficie della sfera di raggio r, Archimede dice che è quadrupla del suo cerchio massimo, ovvero $S(r) = 4\pi r^2$. E anche che il cilindro circoscritto, come nella figura 3.5, ha superficie una volta e mezzo la superficie della sfera, ovvero

$$\frac{3}{2}\, S(r) = (2\pi r \cdot 2r + 2\pi r^2)$$

che ridà la formula precedente.

Si dice anche che volle la figura 3.5 scolpita sulla sua tomba, a memoria di questa grande scoperta. Lo conferma Cicerone che scrive:

> Di lui [Archimede] io, da questore, esplorai la tomba, ignorata dai Siracusani, dato che negavano assolutamente che ci fosse, circondata da ogni parte e ricoperta da rovi e cespugli. Conoscevo infatti alcuni brevi senari che avevo saputo essere scritti nel suo monumento, i quali dichiaravano che in cima al sepolcro era collocata una sfera con un cilindro. Io quindi, mentre li passavo in rassegna tutti con lo sguardo, notai una colonnina che sporgeva non molto dai cespugli, nella quale si trovava la figura di una sfera e di un cilindro.

Alla figura 3.5 si ispirava fino a pochi anni fa anche il logo dell'Unione matematica italiana (fig. 3.6).

Diamo una prova di questo Teorema nello spirito di Archimede; vogliamo provare che la superficie delle sfere è uguale alla superficie laterale del cilindro circoscritto. Si affetta il cilindro con piani

FIG. 3.6.

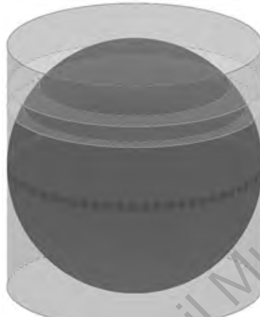


FIG. 3.7.

paralleli, ottenendo dei collari sia sulla sfera che sul cilindro, come nella figura 3.7.

Le superfici della sfera e del cilindro sono la somma delle superfici dei collari ottenuti affettando tutta la sfera; basta quindi provare che ogni collare sferico ha la stessa area del collare cilindrico.

Approssimiamo il collare sferico con il collare conico che ha come lato laterale il segmento tangente alla sfera; prendendo fette sempre più sottili questa approssimazione è giustificata dal principio di esaustione.

L'area del collare cilindrico è $2\pi r \cdot h$; quella del collare conico, utilizzando la notazione nella figura 3.8, ottenuta come sezione con un piano passante dall'asse del cilindro, è $2\pi s \cdot d$. Queste due quantità sono uguali se $r \cdot h = s \cdot d$.

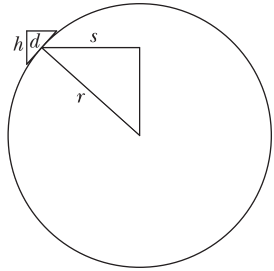


FIG. 3.8.

I due triangoli nella figura 3.8 sono simili e dunque hanno i lati corrispondenti in proporzione, ovvero

$$\frac{r}{d} = \frac{s}{h}$$

che è proprio ciò che vogliamo!

Archimede afferma anche che il volume del cilindro circoscritto è uguale a una volta e mezzo quello della sfera. Denotando con $V(r)$ il volume della sfera di raggio r avremo:

$$\frac{3}{2}\,V(r) = 2r \cdot \pi r^2 \qquad \text{ovvero} \qquad V(r) = \frac{4}{3}\,\pi r^3$$

Per dimostrare quest'altra preziosa formula utilizziamo i due risultati sulla piramide e sul cono menzionati da Archimede, attribuiti a Eudosso, che troviamo nel Libro XII degli *Elementi*.

PROPOSIZIONE 7. Ogni prisma che abbia base triangolare si divide in tre piramidi uguali fra loro ed aventi basi triangolari. E da ciò è evidente che ogni piramide è la terza parte di un prisma che abbia la stessa base e la stessa altezza della piramide.

La dimostrazione risulta evidente dalla figura 3.9, che mostra proprio come sia possibile suddividere un prisma a base triangolare in tre piramidi. Due qualunque di queste piramidi hanno base e altezza uguali, sebbene la scelta della base dipenda da quali due piramidi si vogliano confrontare.

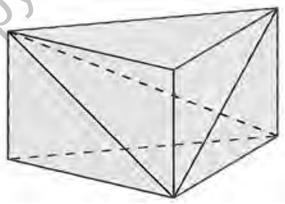


FIG. 3.9.

Da questa proposizione otteniamo la seguente.

PROPOSIZIONE 10. Ogni cono è la terza parte del cilindro che abbia la sua stessa base ed uguale altezza.

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \text{ area di base} \cdot \text{altezza}$$

FIG. 3.10.

Il calcolo del volume della sfera si ottiene suddividendo la sfera in tanti coni con base sulla superficie della sfera e vertice, come quello nella figura 3.10. Il volume della sfera è uguale alla somma dei volumi di tutti i coni che la ricoprono:

$$V(r) = \text{somma su tutti i coni} \left(\frac{1}{3} \text{ area di base} \cdot r \right) =$$
$$= \frac{1}{3} \text{ area sfera} \cdot r = \frac{1}{3}\, 4\pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3}\, \pi r^3$$

Molti anni dopo Galileo ridimostra la stessa formula, con un ragionamento leggermente diverso che viene oggi denominato *Scodella di Galileo.*

Iperbolide iperbolico

Elissoide

FIG. 3.11.

Archimede prende in considerazioni altre superfici, ad esempio quelle che si ottengono dalla rotazione di una conica attorno a un suo asse, che oggi chiamiamo *quadriche*, come le due nella figura 3.11.

Anche le superfici si descrivono con equazioni

Nel '700 viene introdotto il concetto di *equazione di una superficie*, nella direzione indicata da Cartesio per le curve. Un'equazione del tipo $f(x, y, z) = 0$, dove $f(x, y, z)$ è una funzione di tre variabili, assunta sufficientemente regolare, ad esempio polinomiale e comunque continua e derivabile rispetto a ogni variabile. La funzione determina un legame tra le coordinate cartesiane (x, y, z) di un punto nello spazio che caratterizza i punti della superficie.

Nel caso f sia un polinomio la superficie si dirà *superficie algebrica* e il suo grado si chiamerà *grado della superficie*.

Un piano è dato da un'equazione lineare, ad esempio $3x - 2y + z - 2 = 0$; i piani sono le superfici di grado 1. La sfera di centro è l'origine del sistema di riferimento cartesiano e il raggio r ha equazione $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$; ha grado 2 ed è dunque una quadrica.

Il matematico francese Antoine Parent è tra i primi a studiare le superfici attraverso delle equazioni e quindi a utilizzare le potenzialità dell'algebra. Il problema di visualizzare una superficie determinata da un'equazione è più difficile che nel caso delle curve. Si cerca di risolverlo sia disegnando una proiezione della superficie su un piano sia con dei

FIG. 3.12.

modelli concreti in cera o altro materiale malleabile.

La moderna tecnologia digitale oggi ci aiuta molto in questo; si può usare, ad esempio, la modalità 3D del programma GeoGebra o il programma Surfer, ottenibile, con istruzioni ed esempi, dalla pagina web: https://imaginary.org/program/surfer.

Le immagini della figura 3.12 sono state realizzate con Surfer e rappresentano la quadrica di equazione $bx^2 - cy^2 - az = 0$ e una delle superfici introdotte da Parent di equazione

$$\frac{y}{a + x} = \sqrt{\frac{z - x}{z}}$$

Possiamo divertirci costruendo nuove superfici dall'aspetto intrigante come quelle nella figura 3.13, con le loro rispettive equazioni.

Nel 2008 Valentina Galati, studentessa di scuola superiore, realizzò con Surfer una galleria di superfici molto belle (https://imaginary.org/gallery/valentina-galata) tra cui le due nella figura 3.14.

Il *fab lab* è oggi un formidabile luogo di «creazione» anche per le superfici. Una stampante 3D

$$\left(x^2 + \frac{9}{4}y^2 + z^2 - 1\right)^3 - x^2z^3 - \frac{9}{80}y^2z^3 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - z^2 = 0$$

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 4)x = 0$$

FIG. 3.13.

FIG. 3.14.

(fig. 3.15) è in grado di «leggere» le equazioni delle superfici e poi di realizzarle come oggetti solidi con diversi tipi di materiale: resine colorate, oro o anche cioccolato. Con poca preparazione tecnica ma con un buon gusto geometrico, affiancato da senso pratico e un po' di sensibilità artistica, chiunque può creare oggetti utili e belli, tradurre idee in prototipi e anche produrre gioielli o dolci speciali.

Nella figura 3.16 sono riportate alcune immagini di oggetti creati con la stampante 3D del MUSE di

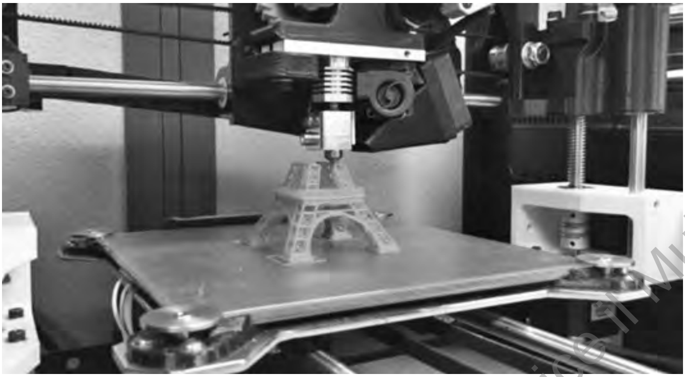


FIG. 3.15.

FIG. 3.16.

Trento o in un apposito «shop su web» da Oliver Labs: http://math-sculpture.com/. La prima raffigura un modello della cupola del Brunelleschi, superficie ottenuta facendo ruotare una curva catenaria. Le altre due sono delle superfici cubiche, «da salotto e da indossare».

Una superficie può anche essere descritta in forma parametrica come i punti dello spazio le cui coordinate cartesiane $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ sono descritte da funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$, al variare di due parametri continui u e v. Queste funzioni si dicono *equazioni parametriche* della superficie.

La sfera, ad esempio, può essere descritta in forma parametrica con *latitudine* e *longitudine*: questi due parametri ci localizzano sul globo terrestre, il primo determinando quanto siamo distanti dall'equatore, il secondo quanto distiamo da un meridiano fissato, per convenzione internazionale passante dall'osservatorio di Greenwich.

Le superfici con singolarità… da record

Anche per le superfici si possono definire i punti singolari e quelli non singolari o lisci. Si parte da considerazioni geometriche, simili a quelle di Euclide per la tangente a un cerchio, e si definisce il *piano tangente* alla superficie nel punto P come il piano passante per P e tale che, almeno in prossimità di P, non passi nessun altro piano tra esso e la superficie. Alternativamente può essere definito come il piano generato da tutte le tangenti alle curve sulla superficie che passano per il punto.

Se questo piano esiste ed è unico, il punto si dice liscio e il piano si dice piano tangente.

La *retta normale* a una superficie in un punto liscio è la retta perpendicolare allo spazio tangente nel punto.

Se la superficie è definita attraverso un'equazione cartesiana possiamo determinare se un punto è liscio algebricamente: è lisco se e solo se i valori nel punto delle tre derivate della funzione in ogni variabile non sono tutte nulle. In questo caso possiamo anche

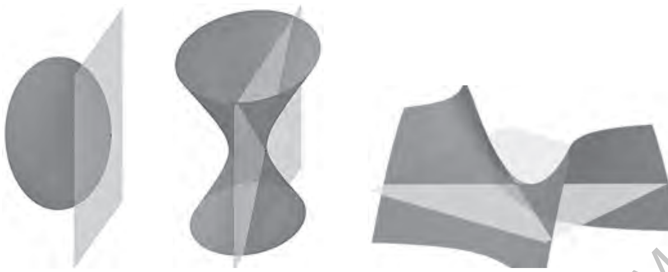


FIG. 3.17.

facilmente determinare l'equazione cartesiana del piano tangente.

Le immagini nella figura 3.17, realizzate con GeoGebra3D, mostrano il piano tangente di tre quadriche in un punto opportuno, rispettivamente dell'ellissoide, dell'iperbolide iperbolico e del paraboloide ellittico.

I piani non hanno punti singolari. Le superfici possono avere singolarità sin dal grado 2: il cono quadrico, di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, ha una singolarità nell'origine, come mostrato dalla figura 3.18.

Un'interessante competizione a riguardo è quella messa in campo, in maniera più o meno consapevole, dalla comunità matematica del secolo scorso. Si tratta di individuare quale superficie, tra tutte quelle di grado fissato, abbia il massimo numero di singolarità. Nella figura 3.19 sono rappresentate le quattro vincitrici delle prime categorie (disegnate con Surfer): sono rispettivamente la cubica di Cayley, con 4 singolarità, la quartica di Kummer, 16 singolarità, la quintica di Togliatti, 31 singolarità, e la sestica di Barth, 65 singolarità.

FIG. 3.18.

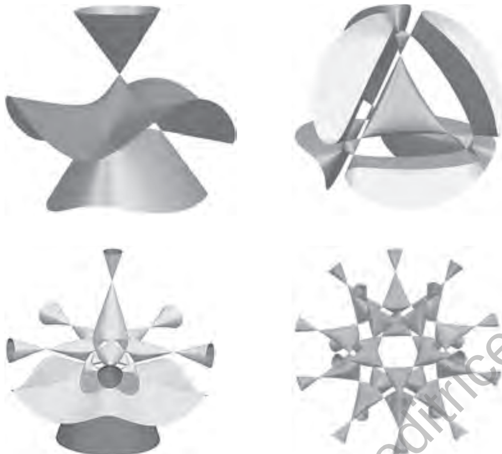


FIG. 3.19.

Scopritori di queste superfici sono grandi matematici europei; il terzo è il matematico italiano Eugenio Giuseppe Togliatti (1890-1977), fratello di Palmiro, segretario per molti anni del Partito comunista italiano.

Queste superfici possono essere realizzate con una stampante 3D e quindi essere messe in bella mostra nel salotto di casa (fig. 3.20). In verità non è

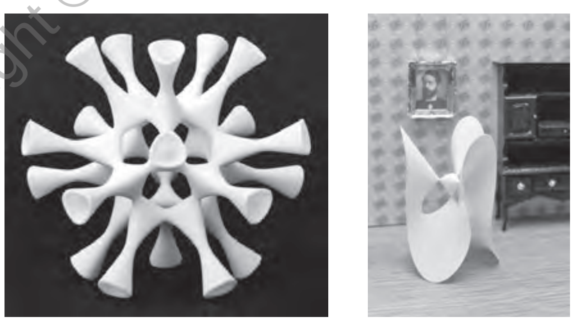


FIG. 3.20.

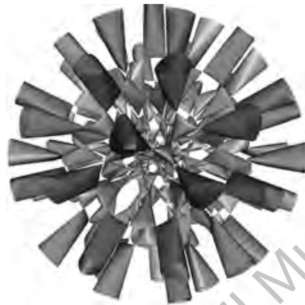


FIG. 3.21.

proprio facilissimo, spesso è necessario stamparle in pezzi piccoli che vanno poi incollati. Penso che lo scultore e orafo italiano Benvenuto Cellini abbia avuto problemi simili nel fondere e poi assemblare il Perseo o le numerose saliere che produsse. Si possono comperare già stampate sul web, ad esempio nel negozio di Oliver Labs sopra menzionato.

Per quanto riguarda le superfici di grado maggiore o uguale a 7, si conoscono superfici di questo tipo con molte singolarità ma non si riesce ancora a dimostrare quali siano le campionesse della categoria. La matematica italiana Antonella Sarti ha scoperto nel 2008 una superficie di grado 12 con 600 nodi (fig. 3.21); pur essendo una superficie record per numero di singolarità, ad oggi non si sa se questo sia il record per le superfici di grado 12. Il matematico giapponese Yoichi Miyaoka ha dimostrato che comunque le singolarità su una tale superficie non possono essere più di 645.

Il cammino più corto

Su una superficie si possono immaginare e tracciare tante curve; ad esempio, intersecando la superficie con un piano si ottengono curve che vengono denominate *sezioni piane*.

Prendiamo due punti su una superficie e consideriamo tutte le curve su di essa che li congiungono. Un problema naturale è quello di individuare se ce ne sia una (o più) di lunghezza minima: una tale curva viene denominata *linea (o curva) geodetica*. Affrontiamo spesso questo problema nella vita quotidiana: ad esempio, quando spostiamo degli oggetti su un piano, per minimizzare il lavoro li muoviamo in linea retta. Oppure durante una passeggiata in montagna, se dobbiamo attraversare una valle, cerchiamo il percorso più breve, sapendo di non poter volare ma di dover stare sulla superficie terrestre; la scelta di un buon percorso geodetico dipende dall'esperienza. E ancora, quando fissiamo con uno spago un rotolo di carta questi si dispone lungo una geodetica del cilindro formato dal rotolo.

In generale un modo concreto per costruire una geodetica è proprio quello di stendere un filo sulla superficie da un punto all'altro in modo tale che sia ben teso, ovvero che non si possa ulteriormente tirare ai bordi.

La ricerca di una linea geodetica tra due punti è un problema «variazionale»; non stupisce dunque che il primo a chiedersi *in superficie quacumque ducere lineam inter duo puncta brevissima* sia stato Johann Bernoulli nel 1697. Egli cercava sempre una spiegazione matematica al come *natura operari per modos et vias faciliores et expeditiores*.

Bernoulli considera dapprima il problema per superfici di rotazione e quindi per superfici generali; introduce anche lui il concetto di equazione di una superficie, come strumento necessario per ricavare l'equazione delle geodetiche.

Le geodetiche su una superficie senza punti singolari sono caratterizzate da una proprietà fondamentale, che, opportunamente formalizzata matematicamente, permette di determinarle attraverso delle equazioni. La proprietà deriva da un procedimento in uso nella topografia e consiste in questo: si collocano due picchetti sulla superficie, uno nel punto di partenza A e uno in un punto vicino B, nella direzione del punto conclusivo. Si collocano quindi altri picchetti in punti successivi C, D, …, in modo tale che per un osservatore in A il picchetto B nasconda il C, per un osservatore in B il picchetto C nasconda il D, e via di questo passo fino a raggiungere il punto conclusivo.

Operando in questo modo nel piano tracciamo una retta, che è infatti la linea geodetica piana.

Vediamo di capire questa proprietà dal punto di vista matematico. Osserviamo innanzitutto che i picchetti sono *normali*, ovvero perpendicolari alla superficie S, e che, in base alla legge secondo la quale li disponiamo, ognuno risulta situato in un piano col punto precedente e col punto seguente. Passando al limite, ovvero se i punti A, B, C ecc. si avvicinano indefinitamente tra loro, questo piano viene a coincidere con il piano osculatore; dunque *per una linea geodetica in ogni suo punto il piano osculatore contiene la retta normale alla superficie nel punto P*, ovvero è normale (perpendicolare) alla superficie.

Utilizzando la tecnica del filo teso su una superficie per due punti anche Johann Bernoulli nota che per l'equilibrio del filo il piano osculatore deve risultare normale alla superficie.

Abbiamo dunque due definizioni di linea geodetica, una più intuitiva, come linea più breve tra due punti; l'altra più matematica, come linea sulla superficie il cui piano osculatore in ogni punto contiene la retta normale. Si noti che la prima è una proprietà interna, o intrinseca, per la superficie, nella quale i punti dell'ambiente esterni alla superficie non intervengono; la seconda invece è una proprietà esterna, che dipende, attraverso la retta normale e il piano osculatore, da come la superficie è posizionata nello spazio ambiente.

Abbiamo osservato che la prima proprietà implica la seconda. Il fatto che una curva sulla superficie per la quale il piano osculatore contiene la retta normale sia una curva di lunghezza minima è più delicato da verificare e vale solo se la curva sta in una regione piccola della superficie (è una proprietà locale).

Se definiamo la superficie con delle equazioni (cartesiane o parametriche) la definizione con il piano osculatore ci porta all'*equazione differenziale delle geodetiche*; la sua soluzione fornisce, almeno localmente, l'equazione della linea geodetica. Il tipo di calcoli è simile a quello intrapreso per la brachistocrona nel capitolo precedente, la loro difficoltà dipende ovviamente anche dalla complessità dell'equazione della superficie.

Il metodo dei picchetti fa capire che da ogni punto generico P della superficie escono infinite geodetiche, precisamente una in ognuna delle direzioni superficiali uscenti dal punto P. La direzione della geodetica nel punto P si dice *condizione iniziale*; si può mostrare che la soluzione dell'equazione differenziale della geodetica dipende in maniera univoca da questa condizione iniziale: ovvero, fissata la direzione, esiste (localmente) un'unica soluzione. O ancora, dati due punti (abbastanza vicini) esiste una sola geodetica che li congiunge.

Se cerchiamo le geodetiche sulla superficie terrestre con il metodo topografico, quella che andremo a tracciare non è una retta: per altro non ci sono rette su una sfera. Quello che otteniamo è un pezzo di *cerchio massimo*, ovvero di un cerchio che si ottiene intersecando la sfera con il piano passante per i due punti e il centro della sfera, come nella figura 3.22.

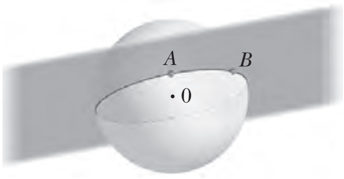


FIG. 3.22.

D'altra parte è anche evidente che i cerchi massimi sono le uniche curve sulla sfera il cui piano osculatore contiene la retta normale in ogni punto.

In maniera empirica, alla Bernoulli (*rationem experientiae*), possiamo anche tirare una corda tesa per due punti su un mappamondo e osservare che questa si dispone lungo un cerchio massimo. Per sapere la rotta del volo intercontinentale da Milano a Los Angeles si tiri un filo sul mappamondo tra queste due città: si scopre che il cerchio massimo deve passare sopra l'Islanda e la Groenlandia. I piloti d'areo, e soprattutto i sistemi automatici di navigazione, conoscono bene le geodetiche sul nostro globo terrestre.

Su un cilindro le geodetiche sono le linee che, quando il cilindro si sviluppa su un piano, diventano segmenti di retta; per esempio eliche circolari, come nella figura 3.23.

Più in generale, su una superficie sviluppabile le geodetiche sono le linee che diventano segmenti di retta quando si sviluppa la superficie sul piano.

Su una superficie di rotazione, ottenuta ruotando una curva piana attorno a un asse di rotazione, si indi-

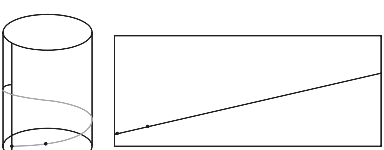


FIG. 3.23.

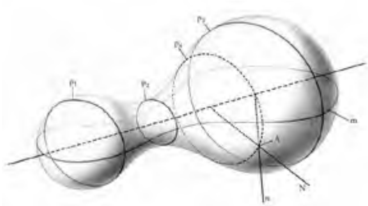


FIG. 3.24.

viduano due tipi di curve speciali: i *meridiani*, ottenuti intersecando un piano passante per l'asse di rotazione, e i *paralleli*, ottenuti intersecando un piano perpendicolare all'asse di rotazione. I meridiani sono curve geodetiche. Non tutti i paralleli sono curve geodetiche; lo sono quelli che si ottengono nella rotazione di punti della curva generatrice in cui il vettore tangente ad essa è parallelo all'asse di rotazione della superficie. Sulla sfera l'equatore è l'unico parallelo ad essere geodetico.

Nella figura 3.24 sono geodetiche il meridiano m e i paralleli P_1, P_2, P_3, mentre P_4 non lo è.

Le curve geodetiche su una superficie (completa) sono l'equivalente delle linee rette sul piano: soddisfano cioè le stesse caratteristiche richieste da Euclide alla retta. Infatti, in quanto curve sono lunghezza senza larghezza (definizione 2 di Euclide) e in quanto geodetiche giacciono ugualmente rispetto ai suoi punti (definizione 4). Per ogni due punti abbastanza vicini, abbiamo osservato, passa una e una sola geodetica (postulato 1). L'ipotesi sulla vicinanza dei punti è necessaria: si pensi alle geodetiche sulla sfera: se i punti sono *antipodali* (un punto P sulla sfera si dice antipodale a Q se la retta passante per il centro della sfera e Q interseca la sfera anche in P) per essi passano infiniti cerchi massimi. Se non sono antipodali esiste un unico piano passante per essi e il centro della sfera: questo individua la geodetica passante per i due punti.

Infine, il fatto che ogni geodetica possa essere prolungata all'infinito (postulato 2) non è sempre vero, dipende dalla superficie su cui la geodetica giace: questa superficie deve essere *completa*, ovvero essere chiusa e non avere bordi che la interrompono. Il piano e la sfera sono completi.

Il teorema «egregium» secondo Gauss

Per molto tempo l'idea di superficie è stata quella di superficie di un corpo solido: Leonhard Euler (Eulero) parla ancora di *De superficiebus corporum* e di *De solidis quorum superficiem in planum explicitare licet*.

Carl Friedrich Gauss, *Princeps mathematicorum*, sviluppa notevolmente il concetto di superficie e dimostra risultati sorprendenti e fondamentali creando in questo modo un settore di studio autonomo nel campo della geometria moderna. Nelle sue *Disquisitiones generales circa superfices curvas* (1828) egli parla di superficie *non tamquam limes solidi, sed tamquam solidum cuius dimensio una pro evanescente habetur*.

Gauss era uno scienziato per nulla modesto e si considerava il più grande matematico della modernità; riteneva per contro Archimede il maggiore dei matematici dell'antichità. Come quest'ultimo aveva delle preferenze tra i suoi risultati e sembra andasse particolarmente fiero di un teorema tanto da definirlo *egregium*. Ancora oggi viene indicato, con un po' di ironia, come il teorema *egregium*; se ne possono dare formulazioni diverse, più o meno generali, anche in dimensioni alte.

Si narra che Gauss espose la versione più elementare, riguardante la superficie della sfera, al prin-

Fig. 3.25.

cipe della Sassonia, con lo scopo di calcolare esattamente la vastità dei suoi possedimenti. Per i suoi calcoli fu ricompensato degnamente dal principe e, successivamente, anche immortalato sulla banconota tedesca da 10 marchi (fig. 3.25; sul retro si noti la triangolazione del ducato di Hannover).

Definiamo dapprima gli oggetti e gli ambiti della nostra teoria, che chiameremo *geometria della sfera (o sferica)*. Supponiamo di operare su una sfera di raggio R e di essere vincolati a stare sulla superficie della stessa, ovvero di non poter volare né scavare tunnel all'interno.

In questo ambiente geometrico le rette, ovvero le curve geodetiche che soddisfano i requisiti postulati per la retta da Euclide, sono i *cerchi massimi* (come osservato nel precedente paragrafo).

Per sviluppare ulteriore geometria diamo alcune definizioni secondarie, seguendo sempre le stesse indicazioni di Euclide per il piano. Un *segmento* è il luogo dei punti di un cerchio massimo compresi tra due punti, detti *vertici*; un *triangolo* è dato da tre segmenti tali che ogni vertice di un segmento è vertice di uno e uno solo degli altri.

Due cerchi massimi che si incontrano determinano in uno dei due punti di incontro quattro angoli; un *angolo* per noi è dato da due cerchi massimi e dalla scelta di uno dei quattro. La parte di superficie racchiusa tra i due cerchi massimi che individuano un angolo si chiama *luna di ampiezza* α (fig. 3.26). Se due cerchi massimi vengono a coincidere diremo che l'angolo è piatto e che la sua misura è π. Questa è detta *misura in radianti*; si può anche scegliere la misura in gradi, ovvero 180 gradi, ma per quanto vogliamo provare è preferibile usare i radianti. Angoli più piccoli hanno misure in proporzione.

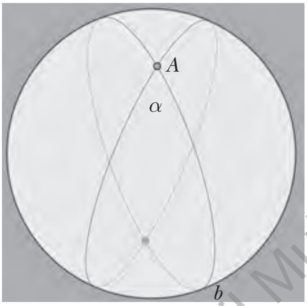


FIG. 3.26.

Si osservi che l'area della luna di ampiezza α è uguale a $4\alpha R^2$: questo segue immediatamente dal Teorema di Archimede e dalla proporzione: l'area della luna sta all'angolo α come l'area della sfera sta a π, ovvero

$$\frac{\text{Area}}{\alpha} = \frac{4\pi R^2}{\pi}$$

Con queste definizioni possiamo enunciare il risultato di Gauss.

TEOREMA. Dato un triangolo sferico la sua area si ottiene moltiplicando il raggio della sfera al quadrato per la somma degli angoli interni meno π:

$$\text{Area triangolo} =$$
$$= R^2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

La dimostrazione si ottiene leggendo appropriatamente la figura 3.27.

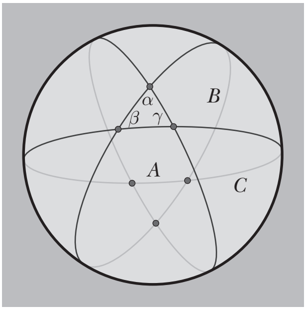


FIG. 3.27.

Osserviamo che un triangolo sulla sfera individua tre lune, una per ognuno degli angoli α, β, γ. Osserviamo anche che ogni volta che costruiamo un triangolo sulla sfera ne appare uno uguale ma antipodale.

Ogni punto della sfera appartiene a una di queste lune; in particolare i punti del triangolo e di quello antipodale appartengono a tutte e tre le lune, mentre gli altri punti della sfera appartengono a una luna sola. Ad esempio, il punto A, rispettivamente B, C, nella figura appartiene solo alla luna definita dall'angolo α, rispettivamente β, γ.

Dunque con le tre lune copriamo tutta la sfera, coprendo tre volte il triangolo e il suo antipodale. Abbiamo quindi che la somma delle aree delle tre lune è uguale all'area della sfera più quattro volte l'area del triangolo (si badi bene che l'area del triangolo è contenuta sei volte nell'area delle lune; due dobbiamo contarle per avere l'area di tutta la sfera e quattro sono d'avanzo).

Riassumendo quanto osservato con una formula, abbiamo:

$$4\pi R^2 + 4 \text{ area triangolo} = 4(\alpha + \beta + \gamma)R^2$$

Semplificando il 4 e portando a destra il termine πR^2 otteniamo il nostro teorema.

Il teorema rappresenta per molti aspetti uno spartiacque nella storia della geometria: probabilmente Gauss aveva ragione nel definirlo *egregium*. Prima di discutere alcune delle sue importanti conseguenze ne diamo una formulazione più generale, con l'uso del concetto di curvatura di una superficie.

La curvatura di una superficie

Anche per le superfici è possibile definire il concetto di curvatura in ogni suo punto non singolare. Nel caso delle curve tale concetto permette di valutare lo scostamento della curva dalla sua tangente nelle immediate vicinanze del punto considerato; nel caso della superficie ci interessa il suo comportamento rispetto al piano tangente.

Le prime considerazioni generali sulla curvatura di una superficie sono dovute a Eulero; nel 1760 scrisse un trattato dal titolo *Recherches sur la courbure des surfaces* nel quale osserva il comportamento della superficie in un intorno del punto mediante lo studio della curvatura di alcune curve ottenute come sezioni piane. Più precisamente, preso un punto non singolare P sulla superficie, egli considerò tutte le curve piane che si ottengono intersecando la superficie con piani passanti per P e contenenti la retta normale, la retta perpendicolare al piano tangente; queste curve si chiamano *sezioni normali*. Per ognuna di esse calcola la curvatura, k, e osserva che questa varia in maniera continua al variare della sezione normale. Esiste dunque (almeno) un valore massimo e uno minimo, corrispondenti a due sezioni normali che chiameremo *principali*. Questi valori, che denoteremo con k_1 e k_2, rispettivamente R_1 e R_2, vengono denominati *curvature principali*.

Eulero dimostra che k_1 e k_2 determinano la curvatura di ogni altra sezione normale attraverso la formula

$$k = \cos^2\theta\, k_1 + \sin^2\vartheta\, k_2$$

dove ϑ è l'angolo che la sezione normale forma con la prima sezione normale principale.

FIG. 3.28.

Le curvature principali di un punto nel piano sono tutte identicamente nulle; per un punto della sfera le curvature principali sono tutte uguali all'inverso del raggio della sfera (le sezioni normali sono tutte cerchi massimi).

Il comportamento della superficie rispetto al piano tangente in un intorno del punto dipende dai valori di k e dunque da k_1 e k_2.

Ad esempio, se k_1 e k_2 hanno lo stesso segno allora tutte le curvature delle sezioni normali hanno lo stesso segno e la superficie sta tutta dalla stessa parte rispetto al piano tangente; in questo caso il punto si dirà *ellittico*. Un caso speciale di punto ellittico è quando $k_1 = k_2$, quindi tutte le curvature normali sono uguali; il punto allora si dice *ombelicale* (fig. 3.28). La sfera è fatta tutta da punti ombelicali.

FIG. 3.29.

Se hanno segni opposti, allora alcune sezioni normali volgono la concavità da una parte del piano tangente, altre dall'altra, e la superficie è attraversata in P dal suo piano tangente; il punto si dirà *iperbolico* (fig. 3.29).

Se una delle due curvature principali è nulla il punto si dirà *parabolico*; questo è il caso per i punti di un cilindro, di un cono e più in generale di ogni superficie sviluppabile.

Gauss propone un approccio al problema diverso e molto originale. Probabilmente influenzato dal procedimento utilizzato in astronomia di rappresentare su una semisfera l'intera volta celeste (che vediamo nei planetari), egli introdusse una corrispondenza tra i punti della superficie e i punti di una sfera unitaria (di raggio 1), denominata oggi *mappa di Gauss*. Preso un punto P su una superficie, consideriamo la retta normale alla superficie in quel punto; questa retta individua una direzione e quindi un punto sulla sfera unitaria che denoteremo con $N(P)$, che rappresenta il punto corrispondente a P attraverso la mappa di Gauss.

Nel caso di un piano nello spazio, ogni punto ha la stessa direzione normale, dunque tutti i punti vengono mandati dalla mappa di Gauss nello stesso punto della sfera: il punto corrispondente alla direzione normale al piano. Nel caso della sfera la mappa di Gauss è l'identità, dunque al variare del punto su di essa il corrispondente coprirà tutta la sfera.

Da queste osservazioni si intuisce che quanto meno la superficie si allontana dal piano tangente in un intorno, tanto più piccola sarà la parte di sfera ottenuta come immagine attraverso la mappa di Gauss di questo intorno.

Prendiamo un piccolo pezzo di superficie attorno al punto P; supponiamo per comodità che questo intorno sia di tipo circolare, ovvero ottenuto intersecando la superficie con una sfera centrata in P di raggio piccolo. Denotiamo con A la sua area. Consideriamo l'immagine attraverso la mappa di Gauss sulla sfera unitaria. Denotiamo con A' l'area di questa immagine.

Il rapporto tra queste due aree, per quanto appena detto, dà una misura di quanto la superficie si allontana dal piano tangente.

Gauss notò che è meglio assegnare un segno (+ o –) all'area A' nel modo seguente. Il bordo dell'intorno circolare è una curva circolare sulla superficie che viene mandata su una corrispondente curva circolare sulla sfera. Percorriamo in senso antiorario il cerchio sulla superficie e osserviamo come viene percorsa in corrispondenza la curva sulla sfera: se in senso antiorario moltiplicheremo l'area per 1, se invece viene percorso in senso orario moltiplicheremo l'area per –1. Il segno dunque dipende da come viene preservata l'orientazione attraverso la mappa di Gauss.

La figura 3.30, tratta dal libro *Differential Geometry of Curves & Surfaces* di Manfredo P. do Carmo, spiega visivamente i due casi.

L'area con il segno + o –, che continueremo a chiamare A', viene denominata da Gauss la *curvatura totale* del pezzo di superficie considerato. Egli definisce quindi la *curvatura (di Gauss) di S in P*, denotata con $K(P)$, come il limite del rapporto A'/A, quando il pezzo di superficie considerato si contrae attorno al punto P.

Si dimostra che la curvatura di Gauss è legata alle due curvature principali di Eulero mediante la formula

$$K = k_1 \cdot k_2$$

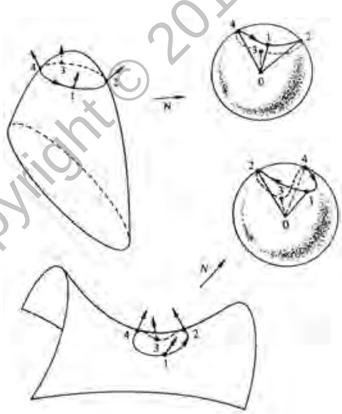


FIG. 3.30.

La conoscenza di k_1 e k_2 è quindi più preziosa di quella di K. Quest'ultima ci dà comunque un'idea del maggiore o minore discostarsi della superficie rispetto al piano tangente e il suo essere positiva, nulla o negativa caratterizza rispettivamente i punti ellittici, parabolici e iperbolici.

Gauss considera il caso in cui il pezzo di superficie sia un triangolo geodetico, ovvero un triangolo con lati segmenti su geodetiche della superficie. Siano α, β, γ gli angoli interni e A_T la sua area. Si può provare che l'immagine attraverso la mappa di Gauss è un triangolo geodetico sulla sfera unitaria con gli stessi angoli interni.

Supponiamo ora che la curvatura K sia costante sui punti del triangolo geodetico; per definizione di curvatura si ha che $K \cdot A_T = A'_{T'}$. D'altra parte abbiamo calcolato esplicitamente che l'area del triangolo geodetico sulla sfera unitaria è data da $A'_{T'} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, dunque

$$K \cdot A_T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

Si noti in particolare che per una superficie con curvatura costante –1 l'area di un triangolo geodetico è data da $A_T = (\pi - (\alpha + \beta + \gamma))$. Se invece la curvatura è nulla, come nel piano, la quantità $(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$ è nulla; vale dunque in questo caso il teorema secondo il quale gli angoli interni di un triangolo piano hanno somma uguale a π.

Se la curvatura non è costante si sostituisce sulla sinistra l'integrale d'area della curvatura sul triangolo (la somma delle curvature su tutti i punti di A_T), denotato con $\iint_T K$ e si ottiene la seguente formulazione generale del teorema di Gauss.

TEOREMA. Per un triangolo geodetico T su una superficie S con angoli interni α, β, γ vale la formula seguente:

$$\iint_T K = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

Il matematico Pierre-Ossian Bonnet ha esteso questo risultato al caso di intorni sulla superficie con bordi non necessariamente geodetici. Questo teorema, che ora si chiama di Gauss-Bonnet, è probabilmente il risultato più profondo della Teoria delle superfici (differenziabili) e ha formulazioni equivalenti anche per varietà di dimensione superiore a 2.

Un problema importante nella Teoria delle superfici è quello di confrontare tra loro due superfici assegnate. Un modo naturale per farlo è quello di considerarle come pezzi di stoffa *flessibili* e *inestensibili* e vedere se possono essere sovrapposte, attraverso flessioni, avvolgimenti, distensioni, ma senza tagli, una sull'altra; eventualmente anche per piccoli pezzi, ovvero localmente. Se questo è possibile diremo che le due superfici sono tra loro *isometriche*, o *localmente isometriche*. L'idea di confrontare in questo modo le superfici nasce con Gauss, collegata direttamente ai problemi della geodesia, ovvero della misura di lunghezze e aree sulla superficie terrestre. In particolare al problema della costruzione di carte o mappe geografiche, di come rappresentare, sovrapporre, la superficie della Terra su quella di un piano.

Un aspetto particolarmente rilevante nell'approccio di Gauss è la ricerca delle proprietà geometriche delle superfici che sono invarianti per isometrie, ovvero quelle proprietà che si conservano se si sostituisce una superficie con un'altra che sia sovrapponibile alla prima.

Si conservano, ad esempio, la lunghezza delle curve sulle superfici, gli angoli, le aree di pezzi di superfici. Dunque anche la nozione di curva geodetica, definita come curva di lunghezza minima, è invariante per isometria. Come pure la nozione di curvatura gaussiana, definita come rapporto tra aree; questo fatto, che può sembrare ora evidente, è l'apoteosi conclusiva della teoria. Usiamo le parole esatte di Gauss:

> Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium *Theorema*. Si superficies curva in quamcunque aliam superficem explicatur, mensura curvaturae in singuli punctis invariata manet.

Il Teorema *egregium* di Gauss dice che la curvatura gaussiana di una superficie è invariante per isometrie locali.

In particolare abbiamo che tutte le superfici sviluppabili, precedentemente introdotte come quelle superfici localmente isometriche a un piano, hanno curvatura nulla in ogni punto.

Il teorema è di particolare rilievo anche se letto «in negativo»: presi due punti su due superfici con curvatura diversa, non è possibile costruire una isometria locale tra le due superfici in nessun intorno del punto. In altre parole non possiamo sviluppare due superfici una sull'altra se hanno curvatura diversa.

Le carte geografiche

La sfera ha in ogni punto curvatura positiva mentre il piano ha curvatura nulla. Non esistono dunque isometrie locali tra la sfera e il piano, non possiamo sviluppare la sfera sul piano, nemmeno per pezzi molto piccoli. Una carta geografica del globo terrestre non potrà essere totalmente fedele dal punto di vista geometrico; nel realizzarla dobbiamo per forza rinunciare a rappresentare qualche proprietà geometrica della sfera.

Ma se la carta geografica perfetta non può esistere, cosa utilizziamo per orientarci in una città, in una zona alpina, o magari durante una gita in barca a vela in mezzo al Mediterraneo? Il nostro smartphone, dotato di GPS e di una «applicazione» adeguata visualizza mappe che rappresentano la sfera terrestre sul piano: qual è il compromesso tra una corrispondenza geometrica perfetta (isometria) e una buona approssimazione che ci permetta di muoverci nello spazio senza perderci?

Il problema di come orientarci nello spazio che abitiamo è una costante della nostra storia, individuale e collettiva. La prima volta che siamo andati a comperare il pane da soli, la mamma ci ha fornito di chiare indicazioni geografiche, magari anche di una rudimentale piantina, indispensabile per raggiungere il panificio e per poi tornare a casa. La capacità di gestire la nostra attività quotidiana in un ambiente più o meno esteso si basa sulla conoscenza di questo spazio; per alcuni questa conoscenza è strettamente legata a un'immagine cartografica.

Alessandro Magno arrivò in India anche grazie alle carte geografiche dell'epoca; mentre Cristoforo Colombo ha scoperto l'America per un errore di cartografia, credendo fosse proprio l'India. Si è provveduto rapidamente a correggere questo errore, anche con la collaborazione di valenti esploratori e cartografi italiani come Amerigo Vespucci.

Un bel libro dello storico Jerry Brotton [2013], dal titolo *La storia del mondo in dodici mappe*, mostra come il progresso dell'uomo nel corso dei secoli sia sempre stato accompagnato da un affinamento delle sue capacità di muoversi e orientarsi nello spazio.

La scoperta e la colonizzazione dell'America ha portato, sembra per la prima volta, all'ideazione di un premio in denaro per una scoperta scientifica. Nel 1493 una bolla papale assegna le terre a ovest del «meridiano che sta 100 leghe ad ovest delle Azzorre» alla Spagna; il papa era un Borgia e si può intuire che interessi tutelasse. Nessuno però sapeva come determinare in maniera effettiva questo meridiano; pertanto la Spagna, che voleva occupare le terre a lei assegnate, bandisce nel 1567 un premio per la soluzione di questo problema.

Un matematico, astronomo, cartografo olandese dell'epoca, Gerardo Mercatore (1512-1594), latinizzazione del nome olandese Kremer che significa «mercante», progetta un'originale e innovativa carta geografica, ancor oggi chiamata *proiezione di Mercatore*. La figura 3.31 rappresenta questa carta, denominata *Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantium emendata accomodata* (1596).

Non sappiamo se Mercatore avesse partecipato al concorso spagnolo; nel titolo dichiara che è suo interesse realizzare una carta utile alla navigazione. Supponiamo di essere al timone di una barca in partenza da Amsterdam; con l'aiuto della bussola sappiamo facilmente localizzare il Polo nord, dunque possiamo dirigere la barca lungo una rotta la cui direzione formi con la direzione nord un qualun-

FIG. 3.31.

que angolo α. Per capire dove andremo a finire abbiamo bisogno di una carta che rappresenti la sfera rispettando la grandezza degli angoli; una carta (o proiezione) di questo tipo si chiama *conforme*. Su una mappa conforme una retta passante per Amsterdam che formi con la verticale un angolo α (verso sinistra) rappresenta fedelmente la nostra rotta.

La proiezione di Mercatore è tuttora usata, ad esempio da Google Maps che propone mappe come quella nella figura 3.32. Si vede facilmente che con un angolo di ampiezza minore di $\pi/4$ (in direzione ovest) andremo a finire verso la Groenlandia, se non incocciamo prima l'Inghilterra o l'Islanda; mentre con un angolo superiore a $3/4\ \pi$ arriveremo nell'America del Sud.

La proiezione di Mercatore preserva gli angoli e quindi anche le forme dei continenti, ma non le distanze e nemmeno le aree. Si pensi che la Groenlandia ha una superficie pari alla metà dell'Unione

FIG. 3.32.

Europea, poco più di 2 milioni di chilometri quadrati una e oltre 4 milioni l'altra; sulla mappa di Mercatore la prima sembra più grande della seconda.

La costruzione di Mercatore poggia su alcune interessanti idee geometriche e anche su qualche conoscenza di analisi. La prima idea viene dalla geometria di Euclide, nella quale se un triangolo viene mandato in un altro preservando gli angoli allora vengono preservati anche i rapporti tra le lunghezze di lati corrispondenti. Due triangoli sono simili, o conformi, se gli angoli in corrispondenza sono uguali o, *equivalentemente*, se i lati in corrispondenza sono proporzionali.

Nello stesso modo una mappa conforme, che preserva gli angoli, in intorni piccoli di punti corrispondenti deve preservare il rapporto delle lunghezze di archi infinitesimi uscenti da essi in tutte le direzioni.

Sul globo terrestre, supposto per semplicità perfettamente sferico, possiamo localizzarci con due coordinate parametriche: la *latitudine*, che determina con un'ampiezza angolare (denotata con t) quanto siamo distanti dall'equatore, e la *longitudine*, che, sempre con una misura angolare (denotata con l), dice invece quanto distiamo da un meridiano fissato per convenzione passante dall'osservatorio di Greenwich. Ricordiamo che i meridiani sono i cerchi massimi passanti per i due poli (due punti antipodali fissati), mentre l'equatore è il cerchio massimo formato dai punti equidistanti dai poli.

Mercatore decide dapprima che nella sua proiezione i meridiani vengono mandati in rette parallele; più precisamente due meridiani che distano all'equatore una quantità pari a dx vengono mandati in due rette parallele nel piano distanti tra loro dx. Questo tipo di proiezione viene anche indicata come proiezione cilindrica perché si ottiene proiettando la sfera terrestre dal centro sul cilindro circoscritto.

Per avere la proprietà di essere conforme chiede che un rettangolo infinitesimo, ovvero abbastanza piccolo, venga mandato attraverso la proiezione in un rettangolo nel piano simile, ovvero proporzionale, a quello di partenza. Con riferimento alla figura 3.33, dove i lati del rettangolo sferico sono denotati con dl

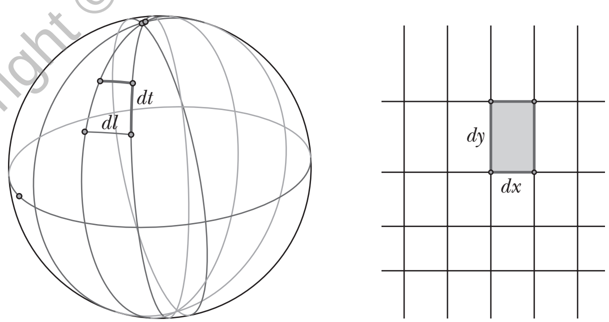


FIG. 3.33.

e dt e quelli del rettangolo piano corrispondente con dx e dy, chiede che $dy/dt = dx/dl$.

Poiché dx è la distanza dei due meridiani su cui stanno due lati opposti del rettangolo all'equatore, è evidente che il rapporto dx/dl è uguale al rapporto tra la lunghezza dell'equatore e la lunghezza del parallelo passante per un punto del rettangolo, cioè

$$\frac{dx}{dl} = \frac{2\pi}{2\pi\cos(t)} = \frac{1}{\cos(t)}$$

Mettendo assieme le due identità precedenti otteniamo un'equazione differenziale, che lega le variabili y e t con i loro incrementi infinitesimali dy e dt:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\cos(t)}$$

Questa equazione può essere risolta per integrazione ottenendo la seguente soluzione:

$$y(t) = \ln\left(\tan(t) + \frac{1}{\cos(t)}\right)$$

La corrispondenza che associa a un punto della sfera di coordinata longitudinale l e latitudinale t un punto nel piano di coordinate $x = l$ e

$$y(t) = \ln\left(\tan(t) + \frac{1}{\cos(t)}\right)$$

è la mappa conforme denominata proiezione di Mercatore. Non è definita sui due poli, per i quali la latitudine è $\pi/2$ e la funzione $y(t)$ non assume un valore finito.

Esistono altre corrispondenze conformi tra la sfera e il piano. Ad esempio la *proiezione stereografica*

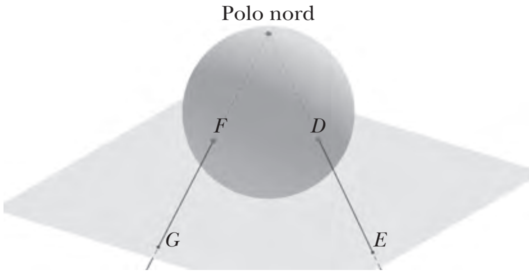


Fig. 3.34.

(rispetto al Polo nord) che ad ogni punto P della sfera, diverso dal Polo nord, associa il punto del piano tangente al Polo sud ottenuto come intersezione di questo piano con la retta passante per P e per il Polo nord, come nella figura 3.34.

Si possono costruire corrispondenze tra sfera e piano che conservano altre proprietà geometriche, ad esempio le proiezioni che conservano le aree, dette *proiezioni equivalenti*. Il matematico e cartografo Johann Heinrich Lambert ne costruì una nel 1772; nel 1973 lo storico Arno Peters ne propose un'altra che sovverte molte convenzioni geografiche e, di conseguenza, anche storiche. Viene chiamata *proiezione di Gall-Peters* perché pare fosse stata usata per la prima

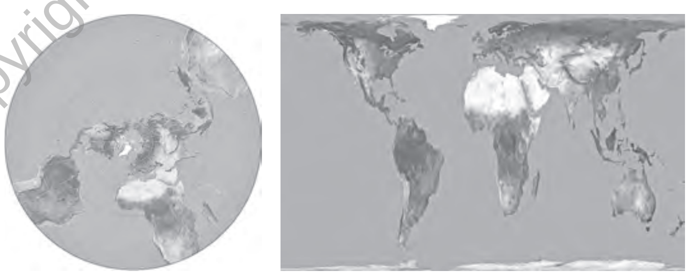


Fig. 3.35.

volta nel 1885 da James Gall, sacerdote scozzese. Nella figura 3.35 sono riportate una proiezione stereografica e una di Gall-Peters.

Geometrie non euclidee

Riprendiamo in esame la formula di Gauss per l'area del triangolo (geodetico) sferico,

$$A_T = R^2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$$

Secondo questa formula in qualunque triangolo sferico la somma degli angoli interni è maggiore di π, angolo piatto, e l'*eccesso* è proporzionale all'area del triangolo.

A scuola abbiamo però imparato che, come dimostrato negli *Elementi*, la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto. Non c'è nessun imbroglio, nelle scuole noi consideriamo triangoli che giacciono su un piano, non sulla sfera.

La formula di Gauss ci porta a pensare che una teoria geometrica, le sue misure e i suoi teoremi dipendano dallo *spazio che ospita* gli oggetti di studio.

Una delle grandi novità nel pensiero di Gauss consiste nel considerare la superficie come spazio autonomo, ovvero *non tamquam limes solidi, sed tamquam solidum cuius dimensio una pro evanescente habetur*. Per capire meglio la novità contenuta in questa affermazione propongo di sostituire la parola *solido* con *spazio*, e dire dunque che la superficie è «uno spazio con una dimensione evanescente».

Il reverendo Edwin Abbott introduce questo punto di vista anche in campo artistico e sociale, in un breve romanzo satirico sulla società vittoriana dal titolo *Flatlandia* (1884), ambientato in un ipotetico mondo bidimensionale. Gli abitanti di questo mondo sono figure geometriche che vivono in uno spazio bidimensionale nel quale riescono comunque a esplicitare caratteristiche e contraddizioni della società del tempo. Il romanzo dimostra, almeno dal punto di vista narrativo-artistico, che uno spazio con due dimensioni può ospitare una società, delle storie e degli esseri (ben)pensanti. L'esistenza di una terza dimensione, evanescente nello spazio di Flatlandia, appare nella seconda parte, dove si assiste all'incontro di un quadrato con una sfera, un oggetto proveniente dallo spazio tridimensionale denominato Spacelandia.

Una superficie dunque può benissimo essere pensata come uno spazio autonomo, bidimensionale, nel quale ambientare una geometria. Niente di nuovo, si potrebbe osservare, rispetto a quanto fatto da Euclide che ha sviluppato tutta la sua geometria nel piano. Ma le superfici sono tante, non solo il piano. L'idea che lo spazio ambiente non sia unico è davvero controintuitiva; pensiamo alle parole di Kant riportate nel primo capitolo.

Se sviluppiamo della geometria con *assiomi e regole uguali* ma in *ambienti-superfici diversi* ci aspettiamo teorie diverse, come si vede col Teorema *egregium*.

Su ogni superficie possiamo definire le curve geodetiche come le curve di lunghezza più corta. Se la superficie è completa, queste linee geodetiche soddisfano le quattro richieste di Euclide per la retta nel piano, come discusso alla fine del paragrafo sulle geodetiche. Anche il triangolo geodetico (e così altri poligoni) ha una definizione del tutto generale: consiste di tre segmenti geodetici tali che ogni coppia abbia uno e un solo vertice in comune.

I triangoli geodetici hanno però proprietà diverse a seconda che il triangolo sia sferico o piano: ad esempio, come abbiamo dimostrato, la somma degli angoli interni è diversa.

Si può provare che l'essere la somma degli angoli interni di un triangolo zero è equivalente al quinto postulato di Euclide. Questo postulato per altro non vale in geometria sferica: data una retta sulla sfera (un cerchio massimo), non esiste una retta passante per un punto esterno e parallela alla retta di partenza. Sulla sfera infatti non esistono rette parallele, dato che due cerchi massimi si incontrano sempre (in due punti)!

Gauss è il primo matematico che intuisce l'esistenza di geometrie che hanno tutti gli assiomi, le regole di ingaggio, equivalenti a quelli della geometria euclidea con l'eccezione del quinto postulato; le chiama *geometrie non euclidee*. Non esistono però scritti espliciti di Gauss su questo, solo cenni in qualche corrispondenza.

Si noti che la geometria sferica probabilmente non veniva considerata davvero una geometria non euclidea, forse per il fatto che esistono coppie di punti (antipodali) per cui passano non una ma infinite rette-cerchi massimi.

Un'idea di quello che pensava Gauss la ricaviamo da una sua lettera (all'avvocato Taurinus, 1824):

che la somma degli angoli interni di un triangolo non possa essere *meno di 180 gradi*; questo è il vero nodo, la barriera contro cui tutto si scontra. [...] Io ci penso da oltre 30 anni, e dubito che altri si siano occupati di questo maggiormente. L'ipotesi che la somma dei tre angoli sia più piccola di 180 gradi conduce ad una geometria molto diversa dalla nostra (euclidea), che è consistente [*in sich selbst durchaus konsequent ist*], e che ho sviluppato in maniera così soddisfacente da risolvere ogni questione eccetto una, che riguarda la determinazione di una costante non apparente a priori. Più grande si prende questa costante più ci si avvicina alla geometria euclidea, all'infinito le due geometrie coincidono. I teoremi in questa geometria possono sembrare paradossali e, ai non esperti, privi di senso [...]. Tutti i miei sforzi per trovare una contraddizione o una inconseguenza [*Inkonsequenz*] interna in questa *geometria non euclidea* sono stati vani. [...] Sappiamo davvero molto poco, o nulla, della vera natura dello spazio e possiamo dunque confondere ciò che ci appare innaturale con qualcosa di assolutamente impossibile. Se la geometria non euclidea fosse la geometria vera e se la costante fosse comparabile alle grandezze che misuriamo in terra o in cielo allora essa potrebbe essere determinata a posteriori. Per questo, occasionalmente e per scherzo, ho espresso la possibilità che la geometria euclidea non sia la vera geometria.

E ancora da altre lettere (a Bessel 1829-30):

Ho consolidato ulteriormente molte cose, tra le quali la convinzione che non si possa stabilire completamente la geometria *a priori*. [...] Dobbiamo con umiltà ammettere che, mentre il numero è un puro prodotto della nostra mente, lo spazio ha una realtà fuori dalla nostra mente, pertanto non possiamo prescrivere le sue leggi *a priori*.

Molti matematici, nel corso di oltre duemila anni, hanno tentato di dedurre il quinto postulato dai precedenti, di dimostrare dunque che non esistono geometrie non euclidee. La geometria sferica, sotto gli occhi di tutti, poteva far capire che questo non è possibile; ma, come osservato, ha delle caratteristiche che sembravano non renderla adatta.

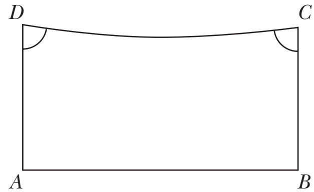


Fig. 3.36.

Il problema, come chiedeva Gauss, sta nel trovare una geometria per la quale la somma degli angoli interni di un triangolo sia meno di 180 gradi. Questa eventuale geometria verrà chiamata alcuni anni dopo, da Felix Klein, *geometria iperbolica*.

Pioniere di questi studi fu il matematico e gesuita italiano Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), che nel suo libro *Euclides ab omni naevo vindicatus* (che si potrebbe tradurre come: *Euclide chiarito da ogni dubbio*) tentò di provare per assurdo il quinto postulato supponendo l'esistenza di un insolito quadrilatero, detto di Saccheri. Un quadrilatero con i lati opposti uguali tra loro, due angoli consecutivi retti e gli altri due acuti. In altre parole un rettangolo con due angoli minori di 90 gradi (fig. 3.36). Un quadrilatero di questo tipo non esiste nella geometria euclidea, esiste, con angoli ottusi, in geometria sferica. La sua esistenza è equivalente all'esistenza di un triangolo per cui la somma degli angoli interni è minore di 180 gradi.

Partendo dall'esistenza del suo quadrilatero, Saccheri derivò logicamente una serie di conseguenze che gli sembrarono inaccettabili, così commentando: «L'ipotesi dell'angolo acuto è assolutamente falsa, poiché ripugna alla natura della linea retta». Di fatto aveva sviluppato una serie di teoremi perfettamente validi e coerenti in geometria iperbolica; Girolamo Saccheri vede, ma non crede!

Anche Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792-1856), contemporaneo di Gauss, propone nel 1829 una geometria immaginaria, con un triangolo rettangolo nel quale la somma degli altri due angoli è minore di 90 gradi. Assumendo l'universo governato da una geometria di questo tipo stima la grandezza del nostro sistema solare utilizzando un triangolo rettangolo con cateto pari al diametro dell'orbita terrestre e vertice opposto la stella Sirio. Ottiene delle stime molto buone, pur usando sfortunatamente un dato sbagliato per il parallasse di Sirio.

Nel 1832 János Bolyai (1802-1860), ufficiale dell'esercito austro-ungarico e matematico, pubblica un trattato sulle geometrie non euclidee come appendice a un libro del padre, anch'egli matematico. Quest'ultimo, spaventato dall'eccessiva dedizione del figlio a questo problema, così lo esorta: «Per amor di Dio, te ne supplico, lascialo stare. Devi temerlo non meno di una passione carnale, perché anch'esso può prendersi tutto il tuo tempo e privarti del benessere, della tranquillità della mente e della felicità nella vita». Lo presenta comunque a Gauss che lo rifiuta come studente, e così lo descrive:

> considero questo giovane geometra Bolyai un genio del primo ordine. […] Elogiarlo equivale a elogiare me stesso. Poiché l'intero corpo del suo lavoro coincide quasi esattamente con le mie proprie riflessioni, che hanno occupato la mia mente negli ultimi trenta o trentacinque anni.

Bisognerà di fatto aspettare qualche anno per vedere dei modelli espliciti di geometria iperbolica. Il primo fondamentale contributo viene da Eugenio Beltrami (1835-1900), matematico italiano, in seguito anche senatore del Regno d'Italia, nel suo *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* (1868). Ne riporto l'*incipit*:

In questi ultimi tempi il pubblico matematico ha incominciato ad occuparsi di alcuni nuovi concetti i quali sembrano destinati, in caso che prevalgano, a mutare profondamente tutto l'ordito della classica geometria. Questi concetti non sono di data recente, il sommo Gauss li aveva abbracciati fino dai suoi primi passi nella carriera delle scienze, e benché nessuno dei suoi scritti ne contenga l'esplicita esposizione, le sue lettere fanno fede della predilezione con cui li ha sempre coltivati e attestano la piena adesione che ha data alla dottrina di Lobačevskij.

Beltrami prende in considerazione superfici con curvatura gaussiana costante e, con l'uso della formula di Gauss, $K \cdot A_T = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, intuisce che una geometria iperbolica, in cui la somma degli angoli interni è minore di π, può prendere forma su una superficie di curvatura negativa.

Studia dapprima una superficie che si ottiene facendo ruotare la curva trattrice attorno al suo asintoto (si veda la definizione nel secondo capitolo): è una *superficie di curvatura costante negativa* che per questa ragione viene denominata *pseudosfera* (fig. 3.37).

La pseudosfera ha un paio di evidenti difetti che non le permettono di competere per il titolo di modello per una geometria non euclidea. Innanzitutto ha un buco: in topologia si dice che *non è semplicemente connessa*, per questo è più simile a un cilindro che a un piano. Ma soprattutto non è completa, ovvero le sue geodetiche non proseguono indefinitamente: si inter-

FIG. 3.37.

Fig. 3.38.

rompono sul cerchio che è il bordo della base. La figura 3.38 propone una pseudosfera con alcune geodetiche (costruita da M. Luminati).

Per ovviare a questo problema Beltrami costruisce una superficie come *rivestimento* della pseudosfera, una specie di copertura a strati successivi incollati tra loro che si avvicina ma non raggiunge mai il bordo della pseudosfera. Questa superficie conserva una curvatura negativa, ma è semplicemente connessa e completa, dunque un buon modello di geometria iperbolica. Accompagna il lavoro teorico con delle costruzioni in carta di queste superfici; queste *cuffie di Beltrami* sono ancora custodite presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia (fig. 3.39).

Il saggio è piuttosto complesso e il grande matematico Luigi Cremona, editore della rivista «An-

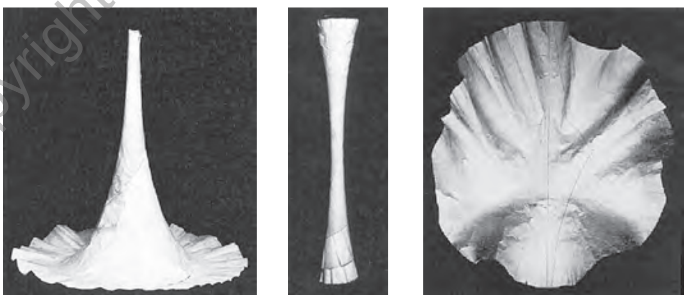


Fig. 3.39.

nali di Matematica», ritarderà la sua pubblicazione di un anno, considerando alcuni argomenti non abbastanza giustificati e basati su un ragionamento circolare.

A questo punto è bene però presentare al lettore un fatto sorprendente, che in qualche modo conferma i timori di Gauss quando scriveva: «lo spazio ha una realtà fuori dalla nostra mente, pertanto non possiamo prescrivere le sue leggi *a priori*».

Il matematico David Hilbert (1862-1943), nel lavoro *Sulle superfici di curvatura gaussiana costante* del 1901, dimostra il risultato seguente.

TEOREMA. Non esiste nello spazio euclideo una superficie a curvatura costante negativa che sia completa.

Per costruire un modello di geometria iperbolica completo, con le geodetiche infinite, dobbiamo quindi uscire in qualche modo dal nostro spazio ordinario. Questo ci fa anche capire perché la geometria iperbolica abbia atteso così tanto per «crearsi» nella mente umana.

Nell'anno che passa in attesa di una risposta positiva da parte di Luigi Cremona, Beltrami studia, assieme all'amico e collega Felice Casorati, il lavoro del matematico tedesco Bernhard Riemann (1826-1866) *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*, che tratteremo diffusamente nel prossimo capitolo. Qui accennerò solo a come Beltrami lo utilizza per i suoi obiettivi, scrivendo un secondo lavoro dal titolo *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*, che esce come il suo primo saggio nel 1868.

Egli considera la semisfera nello spazio ordinario, ovvero i punti della sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con l'ultima coordinata maggiore di zero, $z > 0$. Seguendo le indicazioni di Riemann, introduce un modo di misurare le distanze nello spazio diverso da quello ordinario. Considera quella che Riemann chiama una *metrica non piatta*. Vedremo in dettaglio il concetto di metrica; qui anticipo solo che se ds indica un tratto infinitesimo di un segmento nello spazio e dx, dy, dz la proiezione dello stesso tratto nelle tre direzioni cartesiane, la sua lunghezza non è, come richiesto dal Teorema di Pitagora, uguale a $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ma piuttosto

$$\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{z}$$

In questa metrica, tale modo di misurare le lunghezze, il bordo della semisfera, dato dai punti della stessa con il piano $z = 0$, è infinitamente lontano dai punti interni.

Inoltre, le curve che si ottengono intersecando la semisfera con piani verticali di equazione $ax + by + c = 0$ sono delle geodetiche, ovvero curve di lunghezza minima (fig. 3.40). Per dimostrare questo fatto Beltrami non può basarsi su metodi sperimentali, come il metodo dei picchetti o quello del filo teso. La distanza non è quella standard ma quella astratta proposta da Riemann: egli quindi, in astratto e con grande cura, determina l'equazione differenziale delle geodetiche in questo caso e verifica che quelle descritte sopra sono effettivamente geodetiche.

FIG. 3.40.

Queste curve verificano tutte le altre proprietà delle rette nel piano. Infatti è ovvio che per due punti sulla semisfera passa una sola curva di questo tipo, essendoci un unico piano verticale per due punti. Poiché il bordo della semisfera ha distanza infinita da ogni punto, muovendoci lungo la curva non raggiungeremo mai il bordo; dunque questa si prolunga senza soluzione di continuità all'infinito e la superficie è completa.

In questa geometria, dati una retta e un punto esterno, esistono infinite rette per quel punto che sono parallele alla retta di partenza (non la intersecano): la retta data infatti è definita da un piano verticale, basta prendere tutti i piani verticali per il punto dato che intersecano questo piano fuori dalla sfera unitaria.

Inoltre, la somma degli angoli interni di un triangolo geodetico è minore di π, come si vede nell'esempio della figura 3.41.

Beltrami con questo costruisce il primo modello di geometria iperbolica, immerso nello spazio ma con una metrica non standard. Prosegue quindi derivandone altri due equivalenti e anche generalizzando questi modelli di geometria iperbolica in dimensioni maggiori.

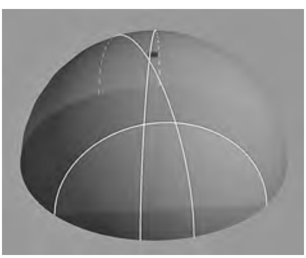


Fig. 3.41.

Il primo modello equivalente lo ottiene semplicemente proiettando (verticalmente) la semisfera e le sue geodetiche sul disco unitario contenuto nel piano $z = 0$; ottiene in questo modo il *disco iperbolico*, ripreso successivamente da

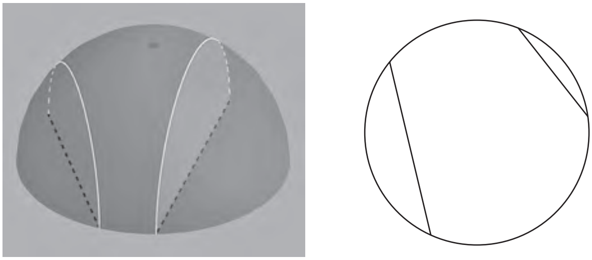


FIG. 3.42.

Felix Klein (fig. 3.42). L'ambiente in questo caso è un disco di raggio 1, con una distanza diversa da quella euclidea che rende la lunghezza dei segmenti sempre più grande se ci si sposta dal centro del disco verso la circonferenza del bordo. Le geodetiche sono le corde; non essendo possibile raggiungere in un tempo finito il bordo del disco, le corde possono essere pensate di lunghezza infinita e la superficie è quindi completa.

Successivamente si proiettano la semisfera e le geodetiche dal punto (1,0,0) sul piano tangente alla sfera in (–1,0,0) (una proiezione stereografica di mezza sfera), ottenendo il *semipiano iperbolico*, ripreso poi da Henri Poincaré (fig. 3.43). L'ambiente in questo caso è il semipiano superiore, ovvero tutti i punti del piano con la seconda coordinata maggiore di 0, con una distanza diversa da quella euclidea, che rende la lunghezza dei segmenti sempre più grande se ci si avvicina alla retta bordo del semipiano. Le geodetiche in questo spazio sono le circonferenze nel piano e le semicirconferenze con estremi sul bordo del semipiano; questa superficie è sempre completa perché non è possibile raggiungere in un tempo finito il bordo.

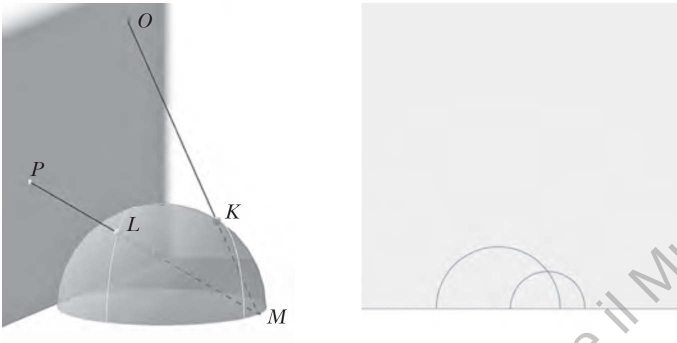


FIG. 3.43.

Klein e Poincaré hanno intrapreso una seria *querelle* sulla paternità del modello di geometria iperbolica, che ha portato il primo a un esaurimento nervoso e poi al ritiro dalla matematica attiva. Entrambi, tuttavia, si guardano bene dal citare il contributo e la paternità originale di Beltrami. Il matematico americano John Milnor, in un articolo del 1982, rivaluta e mette nella giusta luce il contributo di Beltrami.

IV

La geometria dei giorni nostri

Una lezione accademica

Il 10 giugno 1854 il matematico tedesco Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) tiene una lezione presso la Facoltà di Filosofia di Gottinga, che comprende il Dipartimento di Matematica, alla presenza di tutto il corpo accademico e del professor Gauss in qualità di esaminatore. La lezione titolava *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (*Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria*) e faceva parte della procedura di abilitazione necessaria per ottenere la qualifica di professore in una università tedesca. Questa procedura è ancora prevista in Germania e da alcuni anni è stata reintrodotta anche in Italia. Il testo della lezione fu pubblicato postumo nel 1867 dal matematico Richard Dedekind. Riemann infatti muore di tubercolosi a 40 anni nel 1866, a Verbania sul lago Maggiore, di ritorno da un viaggio a Pisa.

Il ventottenne Riemann si presenta a questo appuntamento finale per l'abilitazione dopo aver redatto due fondamentali dissertazioni. La prima è la tesi di dottorato del 1851 dal titolo *Fondazione di una teoria generale delle funzioni di una variabile complessa,* scritta con la supervisione di Gauss. Questi nella relazione di accompagnamento evidenzia «la approfondita e acuta ricerca di una mente matematica creativa, attiva e dotata di una originalità gloriosamente fertile». La seconda consiste nel lavoro inaugurale della procedura di abilitazione, scritto nel 1853, dal titolo *Sulla rappresentabilità delle funzioni attraverso serie trigonometriche*.

Due memorie estremamente originali e innovative che determineranno il futuro progresso della matematica fino ai giorni nostri.

Il candidato deve, per regolamento, presentare tre temi per la lezione; Riemann aggiunge ai due precedenti un tema generico sugli elementi fondazionali della geometria. A dispetto della consolidata tradizione, Gauss non sceglie il primo argomento e passa addirittura al terzo, del quale peraltro si era interessato da anni. La preoccupazione di dover procedere con una nuova difficile ricerca, aggravata dalle difficoltà di una situazione economica di povertà, provoca a Riemann un esaurimento nervoso. Riesce a superarlo e nel giro di sette settimane è pronto per la lezione.

Una platea di professori dell'Università di Gottinga, la più prestigiosa università all'epoca in Germania, incaricata di esaminare le capacità scientifiche e didattiche del futuro docente, è sicuramente un pubblico di eccezionale rispetto. Il fatto poi che non tutti fossero professori di matematica creava un'ulteriore complicazione: Riemann non poteva utilizzare formule. Spiegare matematica senza formule è come andare a giocare a tennis senza racchetta!

A dispetto di questa situazione, per molti aspetti insolita e difficile (o forse proprio per questo), Riemann preparò un testo rivoluzionario e visionario, tra i più importanti mai scritti in matematica, che ha avuto ripercussioni enormi anche in fisica e in filosofia. Studiato da generazioni di ricercatori, per primi quelli di Gottinga, ma poi via via di tutta Europa, ha dato origine a una corposa teoria geometrica, denominata *geometria differenziale* o *geometria riemanniana*, adatta a comprendere molte delle novità scientifiche contemporanee. Tra tutte la Teoria della relatività generale di Einstein, che senza la lezione di Riemann non sarebbe stata concepibile.

Non è facile presentare le idee contenute in questo testo, che vengono espresse in tedesco con parole mai usate prima in matematica, divenendo nel secolo successivo linguaggio comune dei geometri, anche attraverso traduzioni letterali in molte lingue. Siamo di fronte a uno di quei momenti cruciali in cui le idee diventano parole, *logos*, e in questo divenire acquistano un valore di conoscenza stabile e trasferibile. Per queste ragioni cercherò, per quanto possibile, di seguire le parole di Riemann, aggiungendo commenti e interpretazioni oggi universalmente condivisi; in alcuni punti ho voluto riportare tra parentesi le parole originali in tedesco.

La lezione inizia con un *Prologo. Piano della ricerca.*

La geometria presuppone sia il concetto di spazio che i concetti basilari per le costruzioni nello spazio come qualcosa di dato. Essa dà di questi solo definizioni nominali, mentre le determinazioni essenziali appaiono sotto la forma di assiomi. Il rapporto tra questi postulati rimane nell'oscurità, non si vede se e in che modo la loro connessione sia necessaria, né, a priori, se sia possibile.

Da Euclide fino a Legendre, per citare il più celebre nuovo riformatore della geometria, questa oscurità non è stata eliminata né da matematici né da quei filosofi che di queste cose si occupano.

Qui si osservano due fatti: il primo è che in buona sostanza non si sa cosa siano gli assiomi e i postulati della geometria euclidea; sono dati ma stanno nell'oscurità. Il secondo è che non è chiaro se essi siano o meno consistenti, ovvero se siano possibili. Riemann decide di non avventurarsi nell'approfondimento di questi problemi, osservando che tutti i matematici che l'hanno preceduto, da Euclide al contemporaneo Legendre, non sono pervenuti a delle buone soluzioni, e quindi questa non è la direzione corretta in cui muoversi.

Certamente questo è dovuto al fatto che il concetto generale di grandezza multiplamente estesa [*mehrfach ausgedehnter Grössen*], nel quale sono comprese le grandezze spaziali, non è mai stato elaborato. Mi sono perciò proposto in primo luogo il compito di costruire il concetto di grandezza multiplamente estesa a partire dal concetto generale di grandezza. Da questo pertanto segue che una grandezza multiplamente estesa è passibile di diverse relazioni metriche [*eine mehrfach ausgedehnte Grösse verschiedener Massverhältnisse fähig ist*], e che lo spazio costituisce quindi solo un caso particolare di una grandezza triplamente estesa.

Riemann decide quindi di considerare il concetto di grandezza multiplamente o plurimamente estesa, che forse potremmo oggi tradurre meglio con grandezza *multidimensionale*. Osserva che un oggetto multidimensionale può essere misurato in modi diversi; lo spazio (quello che normalmente consideriamo, lo spazio euclideo) è solo un caso particolare di grandezza tridimensionale.

Da qui segue una conseguenza necessaria, che le proposizioni della geometria non si possono derivare dal concetto generale di grandezza, ma che le proprietà mediante le quali lo spazio si distingue dalle altre grandezze triplamente estese pensabili possono essere ricavate solo dall'esperienza.

Da ciò nasce il problema di studiare i dati di fatto più semplici dai quali dedurre le relazioni metriche dello spazio; un problema che per la natura della questione non è completamente determinato; invero si possono dare più sistemi di fatti sufficienti a determinare le relazioni metriche dello spazio; il più importante per lo scopo presente è quello scelto per fondamento da Euclide. Questi fatti sono come tutti i fatti non necessari, ma solo di certezza empirica, sono ipotesi; si può così studiare la loro probabilità, che entro i limiti dell'osservazione è tuttavia assai grande, e dopo di ciò valutare l'ammissibilità della loro estensione al di là dei confini dell'osservazione sia dal lato dell'incommensurabilmente grande che dal lato dell'incommensurabilmente piccolo.

Le proprietà che caratterizzano lo spazio tra tutte le grandezze tridimensionali per Riemann possono solo essere determinate sperimentalmente. In questa nuova prospettiva gli assiomi di Euclide sono semplici ipotesi, molto probabili nel limite dell'osservabilità quotidiana o locale, ma da verificare, o magari negare, sperimentalmente su scale osservabili molto grandi o molto piccole.

Qui si teorizza un punto di vista diametralmente opposto a quello di Kant nella *Critica della ragion pura,* come osservato anche nel primo capitolo, che assegna invece al concetto di spazio un'esistenza *a priori* e quindi non acquisibile con l'esperienza.

Riemann assume una posizione che caratterizzerà la matematica moderna: non dice che la geometria di Euclide ha bisogno di aggiustamenti, e nemmeno li propone. Fa un passo indietro e si chiede cosa sia l'oggetto di studio della geometria, indicando come risposta il concetto generale di grandezza, anzi più precisamente di grandezza multidimensionale.

A questo punto Riemann invoca l'indulgenza del lettore riguardo al tentativo che intende attuare, osservando che questo tipo di considerazioni di natura filosofica e fondazionale non sono frequenti. Anche per ingraziarsi il corpo accademico presente, indica come fonte di ispirazione il lavoro di *Herr Geheimer Hofrath* (Signor Consigliere Aulico) Carl Friedrich Gauss e quello del filosofo antidealista Johann Friedrich Herbart, già professore della stessa Facoltà di Gottinga.

Quindi prosegue in questo modo:

> Concetti di grandezza sono possibili qualora si definisca un concetto generale, che ammetta modi diversi di determinazione. A seconda che tra questi modi di determinazione vi possa essere una transizione dall'uno all'altro continua o no, essi costituiranno Varietà [*Mannigfaltigkeit*] continue o discrete; i singoli modi di determinazione li chiamiamo nel primo caso punti, nel secondo elementi di questa Varietà.

Eccoci dunque al nuovo concetto con cui rifondare la geometria, il concetto di *Mannigfaltigkeit*. Questa parola viene usata qui per la prima volta in matematica; oggi, con le sue traduzioni in tante lingue, è tra le più frequenti utilizzate nelle pubblicazioni di carattere matematico. In italiano è stata tradotta con *varietà*, in inglese con *manifold* e alle volte con *variety*, in francese con *variété*.

Non è una parola nuova in contesti non matematici, con buone funzioni evocative: al riguardo va segnalata una splendida poesia di Schiller intitolata proprio *Mannigfaltigkeit*.

Riemann non fornisce una descrizione chiara e rigorosa di varietà, accenna solo all'idea. Ci vollero oltre cinquant'anni e il lavoro di molti matematici per addivenire a una definizione moderna e condivisa, tutt'oggi oggetto di continui ripensamenti volti a determinare un concetto ancora più versatile. Semplificando il più possibile diremo che una varietà n-dimensionale è un insieme parametrizzato da n numeri reali che variano indipendentemente tra loro. Ovvero ogni elemento, punto, è individuato unicamente da n numeri $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; questa n-upla viene chiamata *coordinate del punto*.

Il piano è un esempio di varietà bidimensionale in cui ogni punto è rappresentato da due coordinate cartesiane. Una carta geografica, ovvero una rappresentazione della sfera sul piano, è una descrizione con due coordinate dei punti sulla sfera.

Si faccia attenzione, non si afferma che il modo in cui associare delle coordinate a un punto sia unico: ci possono essere più *sistemi di coordinate* per la stessa varietà. Si pensi al piano: ad ogni suo punto associo due coordinate, una volta assegnata un'origine e due rette ortogonali per essa, gli assi cartesiani. Se si cambia origine o assi cartesiani il punto avrà nuove coordinate. Di una regione della sfera terrestre si possono dare più mappe o carte geografiche, alcune più estese, altre ridotte ma magari con maggior risoluzione.

Inoltre un sistema di coordinate potrebbe non bastare per descrivere tutti i punti di una varietà; di solito un sistema di coordinate descrive bene solo un sottoinsieme, magari molto ampio (aperto), della varietà. Per questo si usa dire che un sistema di coordinate è una descrizione *locale* della varietà. Ad esempio, non è possibile avere una carta geografica unica per tutta la sfera terrestre.

Se la varietà è ben definita, tra i diversi sistemi di coordinate si determinano delle relazioni, analoghe a quelle che si usano quando si cambia carta geografica.

La possibilità di variare il sistema di coordinate risulta molto utile nella risoluzione di parecchie questioni geometriche sulla varietà. D'altra parte costituisce una difficoltà quando si intende definire attraverso esse un concetto geometrico che vuole essere *intrinseco* della varietà, non dipendente dalle coordinate scelte. Gran parte dei risultati di geometria moderna sulle varietà sono ottenuti grazie a una buona scelta del sistema di coordinate e all'utilizzo di concetti che siano intrinseci.

Riemann suggerisce un modo per costruire, o almeno immaginare, una varietà di dimensione n a partire da una di dimensione $(n - 1)$. A partire da un punto, muovendosi in una direzione, si ottiene una curva, ovvero una varietà 1-dimensionale; ritroviamo qui una delle definizioni originarie di curva come punto in movimento. Muovendosi invece in due direzioni, ortogonali tra loro, si ottiene una superficie; una superficie si ottiene anche muovendo un'intera curva in una direzione trasversa. Ricordo che abbiamo costruito in questo modo le superfici di rotazione, ruotando appunto una curva, o le superfici rigate, traslando una retta.

In generale se muoviamo una varietà n-dimensionale in una direzione che diremo trasversale si ottiene una varietà $(n + 1)$-dimensionale; in altre parole quest'ultima varietà può essere pensata come *una sintesi di una variabilità n-dimensionale con una variabilità 1-dimensional*e.

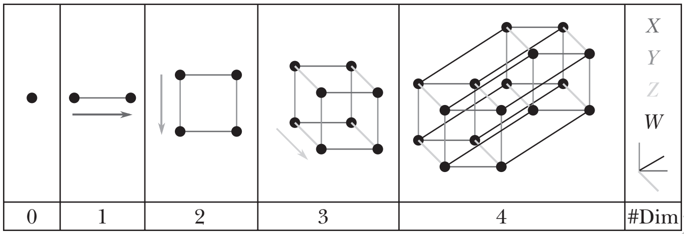


FIG. 4.1.

La figura 4.1 illustra come costruire un «cubo» in ogni dimensione; si parte da un punto (dimensione 0) e lo si trasla in linea retta in una direzione ottenendo un segmento (dimensione 1). Proseguendo traslando in linea retta la figura in una direzione ortogonale otteniamo prima un quadrato, poi un cubo nello spazio (si noti che già a questo livello il disegno rappresenta una proiezione piana del cubo) e quindi l'ipercubo 4-dimensionale e via via un cubo in ogni dimensione.

Riemann propone alcuni esempi di varietà: il primo è abbastanza *naïf* ed è dato dall'insieme formato dai colori. Questo insieme dipende da tre parametri, i tre colori fondamentali blu, rosso e verde; ogni altro colore è dato da un'opportuna combinazione dei tre colori fondamentali.

L'esempio principe è dato dalle superfici descritte da Gauss, varietà di dimensione 2. Nel terzo capitolo abbiamo notato che una superficie può anche essere descritta in *forma parametrica* come i punti dello spazio le cui coordinate cartesiane $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ sono date da funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$ e $z(u, v)$, al variare di due parametri continui u e v. La sfera centrata nell'origine con raggio r, ad esempio, è descritta dai parametri *latitudine* e *longitudine* dalle tre funzioni: $(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (r \sin v \cos u, \sin v \sin u, \cos v)$. Abbiamo visto che ci sono molti tipi di carte geografiche, dunque diversi modi di parametrizzare e dare coordinate.

Facendo variare i parametri u e v percorriamo tutta la superficie, senza più tenere conto dello spazio ordinario in cui la superficie è contenuta.

Riemann riprende in lavori successivi il concetto di varietà per studiare problemi nuovi e complessi. Propone anche un esempio molto particolare, la varietà formata da tutte le superfici: un insieme composto di insiemi! Questa varietà si chiama *spazio dei moduli* ed è forse la più studiata in geometria contemporanea. Riemann la descrive con strumenti innovativi, tra cui la Teoria delle funzioni regolari che dipendono da una variabile complessa (funzioni olomorfe), e ne determina la dimensione.

Non manca inoltre di osservare che una varietà non sempre può essere determinata da una quantità finita di variabili indipendenti; ci sono cioè delle varietà in cui per indicare una posizione sono necessari infiniti parametri. Porta come esempio di *varietà infinito-dimensionale* l'insieme delle funzioni in una regione, o le forme di una figura solida.

Anche con questa osservazione Riemann dimostra una profonda comprensione degli oggetti matematici; le varietà di dimensione infinita sono estremamente utili nel campo dell'analisi e il loro studio presenta alti livelli di complessità.

Una varietà per Riemann non è solo una *grandezza multiplamente estesa*, è anche *passibile di diverse relazioni metriche*. Il secondo capitolo della dissertazione di Riemann è intitolato proprio *Relazioni metriche* [*Massverhältnisse*] *possibili su una varietà di dimen-*

sione n, nell'ipotesi che le linee possiedano una lunghezza indipendente dalla posizione…

Su una varietà si vuole misurare la distanza tra due entità, calcolare l'estensione di sottoinsiemi che, a seconda della dimensione, può essere una lunghezza, un'area, un volume o un ipervolume. Per questo Riemann introduce il concetto di *metrica su una varietà* e poi quello di *curvatura*, prendendo esplicitamente come esempio le costruzioni di Gauss per le superfici. Una varietà con una metrica viene oggi denominata *varietà riemanniana*.

Cerchiamo ancora di seguire la spiegazione originale di Riemann, sorvolando su molti dettagli tecnici. Egli osserva che per misurare la lunghezza di una curva su una varietà la si suddivide in tratti molto piccoli, infinitesimali, si calcolano le lunghezze di questi piccoli tratti e li si somma per ottenere la lunghezza dell'intera curva. La lunghezza di un tratto molto piccolo viene chiamato *elemento di linea* (*Linienelement*) e denotato con *ds*.

Riemann si propone quindi di «trovare un'espressione generale di *ds* in ogni punto, espressione che involva le coordinate x_i e le loro variazioni infinitesime dx_i».

A seguito di una serie di osservazioni, per la verità abbastanza oscure, egli deduce che *ds* debba essere la «radice quadrata di una forma quadratica in ogni punto positiva nelle variabili dx_i». Ovvero che valga un'espressione del tipo:

$$ds = \sqrt{g_{11}dx_1^2 + \ldots + g_{ij}dx_i dx_j + \ldots + g_{nn}dx_n^2}$$

dove le $g_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sono funzioni che dipendono in maniera regolare dalle coordinate del punto e tali che la quantità sotto radice sia positiva (ad esempio $g_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ per ogni i, j). Questa è la definizione di una *metrica riemanniana sulla varietà*.

Per come è stata definita, dipende dalla scelta delle coordinate. Se si prende un altro sistema di coordinate la metrica dovrà essere espressa in queste nuove coordinate con altre funzioni. Tra i due insiemi di funzioni esistono delle relazioni che possono essere ricavate da quelle tra le coordinate. Ecco cosa dice espressamente Riemann:

> si può trasformare questa espressione [la metrica] in una simile sostituendo le n variabili indipendenti con funzioni di altre n variabili indipendenti. In ogni caso non si può trasformare ogni espressione in una qualunque altra in questo modo, poiché l'espressione contiene $n(n + 1)/2$ coefficienti, che sono funzioni arbitrarie nelle variabili indipendenti (le funzioni g_{ij}). Introducendo nuove variabili si possono soddisfare n condizioni, dunque n coefficienti possono essere uguagliati a quantità arbitrariamente fissate. Rimangono da rappresentare $n(n - 1)/2$ coefficienti, che sono determinati completamente dalla natura della varietà: per descrivere la metrica servono quindi $n(n - 1)/2$ funzioni, dipendenti dal punto.
>
> Varietà come il piano e lo spazio, nel quale l'elemento di linea può essere espresso nella forma $ds = \sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}$ costituiscono dunque un caso speciale delle varietà che vogliamo considerare; esse si meritano un nome particolare, di conseguenza queste varietà, nelle quali il quadrato dell'elemento di linea si può ricondurre alla somma di quadrati esatti, le chiamerò *piatte* [*eben*].

Nell'ultima frase si spiega che la costruzione estende il caso della geometria del piano o dello spazio ordinario. Nel piano infatti la distanza tra un punto di coordinate (x_1, x_2) e uno di coordinate (y_1, y_2), può essere calcolata con il Teorema di Pitagora, ottenendo $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Pertanto l'elemento di linea ds è espresso in funzione delle variazioni infinitesime dx_i dalla formula $ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$ (fig. 4.2).

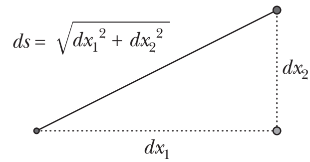


FIG. 4.2.

Analogamente nello spazio ordinario a n dimensioni, applicando ripetutamente il Teorema di Pitagora, si ottiene la formula generale per l'elemento di linea:

$$ds = \sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_i^2 + \ldots + dx_n^2}$$

Le funzioni g_{ij} sono speciali, sono costanti e uguali a 1 se $i = j$ e a 0 se $i \neq j$. Riemann battezza questo tipo di varietà con il nome di *varietà piatte*.

Riemann si poggia sulla ricerca del maestro Gauss per le superfici e lo riconosce più volte nel corso della lezione. Gauss calcola l'elemento di linea di una superficie nello spazio non con il Teorema di Pitagora nelle tre variabili spaziali ma con una formula in funzione dei parametri di una data parametrizzazione $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$:

$$ds = \sqrt{E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2}$$

per opportune funzioni $E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$, che determina esplicitamente a partire dalla parametrizzazione. Ad esempio $E(u, v) = x_u(u, v)^2 + y_u(u, v)^2 + z_u(u, v)^2$, dove con x_u, y_u, z_u si intendono le derivate nella variabile u.

Questa formula viene chiamata *prima forma fondamentale*; è esattamente la definizione di metrica su una varietà bidimensionale, dipendente cioè dai due parametri *u* e *v*, data da Riemann in generale.

Il punto di vista di Riemann (e prima di Gauss) viene oggi definito *intrinseco* alla varietà, ovvero non legato a un eventuale ambiente che la ospita (lo spazio per le superfici) ma dipendente solo dalla varietà.

La metrica permette di calcolare la lunghezza di ogni curva, suddividendola in tratti infinitesimi e sommando, o meglio integrando, le misure di tutti i tratti. Su una varietà riemanniana si può cercare di determinare la curva di lunghezza minima che congiunge due punti dati, ovvero la *geodetica sulla varietà.* Come nel caso delle superfici anche su una varietà questo problema, di tipo variazionale, si traduce in un'equazione differenziale.

In generale la soluzione di queste equazioni differenziali esiste ed è unicamente determinata dai valori iniziali, nel caso delle geodetiche dal punto di partenza e dalla direzione iniziale. In alcuni casi si possono trovare soluzioni analitiche complete, ovvero equazioni che dipendono da un parametro e descrivono la curva geodetica al variare di questo parametro. In altri casi la soluzione è solo di tipo approssimato, ad esempio formata da curve lineari a tratti, ottenute con metodi numerici con l'ausilio di computer.

Proseguendo nella lettura della lezione arriviamo a quella che potremmo definire la questione fondamentale: quali sono le proprietà matematiche che determinano una data varietà riemanniana; e, anche, come possiamo distinguerle una dall'altra.

Più precisamente Riemann si chiede quale possa essere una condizione necessaria e sufficiente affinché una varietà riemanniana sia piatta, sia cioè lo spazio usuale. In altre parole, quando una varietà riemanniana, definita da coordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e dotata di una metrica

$$ds = \sqrt{g_{11}dx_1^2 + \ldots + g_{ij}dx_i dx_j + \ldots + g_{nn}dx_n^2}$$

ammette delle coordinate $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ nelle quali la metrica assume la forma $ds = \sqrt{dy_1^2 + \ldots + dy_n^2}$?

Nel caso di dimensione 2, per le superfici, il Teorema *egregium* di Gauss offre una prima risposta: una superficie è (localmente isometrica al) piano solo se la sua curvatura di Gauss è uguale a 0. L'annullarsi della curvatura è quindi una condizione necessaria perché la superficie sia il piano euclideo.

Per risolvere in generale il problema, Riemann inizia mettendo in evidenza che la curvatura di Gauss è una caratteristica intrinseca della superficie. Questo segue dalla formula di Gauss che esprime la curvatura in funzione di un triangolo geodetico T, supponendola costante sul triangolo

$$K = \frac{(\alpha + \beta + \gamma - \pi)}{A_T}$$

dove α, β, γ sono gli angoli interni al triangolo e A_T la sua area. I dati a sinistra dell'uguale, misura degli angoli e dell'area di un triangolo geodetico, sono dati intrinseci, dipendono solo dalla metrica e non dallo spazio che ospita la superficie.

A partire da queste considerazioni Riemann costruisce quindi un *invariante intrinseco* associato a un punto su una varietà n-dimensionale: il primo embrione del concetto di *tensore di curvatura di Riemann*, che verrà sviluppato da tanti matematici e fisici negli anni successivi.

Riemann procede grosso modo così: preso un punto P su una varietà riemanniana considera due direzioni indipendenti sulla varietà a partire da questo punto e il piano da esse generato. Considera quindi la superficie sulla varietà formata da tutte le geodetiche che partono dal punto e hanno direzione sul piano sopra individuato.

Con il metodo di Gauss calcola la curvatura di questa superficie nel punto; oggi chiamiamo questo numero la *curvatura sezionale* della varietà lungo la superficie generata dalle due direzioni di partenza.

Su una varietà di dimensione n in un punto si hanno direzioni indipendenti (una per ogni parametro); in un insieme di n direzioni ci sono $n(n-1)/2$ modi possibili di sceglierne due indipendenti. La costruzione di Riemann associa quindi ad ogni punto $n(n-1)/2$ curvature sezionali indipendenti.

E quindi Riemann osserva:

> Queste quantità [le curvature sezionali] dipendono solo dal punto e dalle direzioni. Sono chiaramente zero se la varietà è piatta [...], e possono essere pensate come deviazione dalla piattezza in questo punto e nella direzione della superficie.

Dunque la condizione di avere curvature sezionali nulle è una condizione necessaria per la piattezza.

In precedenza abbiamo visto che sono necessarie $n(n-1)/2$ funzioni della posizione per determinare la metrica su una varietà di dimensione n. Quando pertanto in ogni punto sono date $n(n-1)/2$ curvature in tutte le possibili direzioni superficiali, la metrica sulla varietà è determinata, purché tra questi valori non sussistano alcune relazioni di identità, cosa che di fatto in generale non accade. Di conseguenza in questo modo la metrica della varietà [...] può essere espressa in un modo totalmente indipendente dalla scelta dei parametri. [...] per determinare la metrica (piatta) è sufficiente determinare che in ogni punto $n(n-1)/2$ indipendenti curvature superficiali siano nulle.

Dunque avere curvature sezionali nulle è una condizione anche sufficiente per la piattezza.

Le varietà le cui curvature in ogni punto sono nulle possono essere considerate un caso speciale di quelle con curvatura ovunque costante. La caratteristica comune delle varietà con curvatura costante può essere così espressa: le figure possono essere spostate senza stiramenti. Infatti è ovvio che le figure non potrebbero essere traslate e ruotate liberamente se la curvatura non fosse in ogni punto la stessa in ogni direzione.

D'altra parte le proprietà metriche della varietà sono completamente determinate dalla curvatura [...] e quindi (per le varietà con curvatura costante) la rappresentazione analitica della metrica può essere data dalla formula

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} \sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_i^2 + \ldots + dx_n^2}$$

dove α è il valore della curvatura costante.

Le righe precedenti sono una prova, corretta ma non abbastanza dettagliata, del seguente risultato.

TEOREMA DI RIEMANN. Una varietà n-dimensionale è piatta se e solo se in ogni punto $n(n-1)/2$ curvature sezionali indipendenti sono nulle.

Queste ultime quantità sono quantità intrinseche della varietà e non dipendono dalla scelta dei parametri.
Se sono costanti e uguali ad α, la rappresentazione analitica della metrica è data dalla formula

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} \sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_i^2 + \ldots + dx_n^2}$$

Più in generale le curvature sezionali (opportunamente definite) determinano la metrica in ogni punto.

Forse è bene riassumere quanto fin qui detto: lo spazio piatto, quello con la distanza data dal Teorema di Pitagora, è una delle tante possibilità di varietà riemanniana. Le curvature sezionali sono lo strumento con il quale noi, abitando all'interno della varietà, possiamo misurare quanto questa si allontana dallo spazio piatto, quanto cioè si curva. Le curvature ci permettono anche di classificare, ovvero descrivere in classi, le varietà: una di queste classi, delineata da Riemann e poi da altri geometri, è quella delle varietà con curvatura costante.

La lezione contiene alcune affermazioni che andrebbero approfondite: tra queste quella di chiedere che «tra questi valori [delle curvature sezionali] non sussistano alcune relazioni di identità, cosa che di fatto in generale non accade». Oggi diciamo che le curvature sezionali debbono essere prese su superfici opportunamente normalizzate, una procedura tecnica non immediata.

La lezione di Gottinga si chiude con un capitolo intitolato *Applicazioni allo spazio*, nel quale Riemann discute alcune connessioni tra le idee da lui introdotte e la realtà descritta dalla fisica. Queste considerazioni avranno grande influenza nello sviluppo sia della geometria che della fisica; ne riporto in breve due.

La prima la presento con le parole e i commenti di Alexander Grothendieck, da *Recoltes et semailles*:

> Egli [Riemann] osserva che la struttura ultima dello spazio è probabilmente discreta; la rappresentazione continua che noi ne facciamo potrebbe essere una ultra-semplificazione (che potrebbe risultare eccessiva a lungo andare [...]) di una realtà più complessa. Che dunque per il pensiero umano il continuo è più facile da comprendere che il discontinuo; il primo, di conseguenza, ci serve come approssimazione per capire il secondo. Questa è una osservazione incredibilmente acuta per un matematico nel tempo in cui il modello euclideo dello spazio fisico non era messo in discussione.

André Weil e Alexander Grothendieck nella metà del secolo scorso sviluppano, all'interno della geometria algebrica introdotta da Cartesio, un settore dedicato allo studio di enti geometrici discreti che oggi ha applicazioni in molti campi dell'informatica, in particolare nel settore della sicurezza dei dati.

Per la seconda considerazione riprendo nuovamente le parole di Riemann:

> la questione di cosa siano le basi delle relazioni metriche dello spazio. Connessa a questa questione, che può in effetti essere considerata come parte dello studio dello Spazio, l'osservazione precedente può essere applicata: in una varietà discreta il principio delle relazioni metriche è già contenuto nel concetto di varietà, ma in una varietà continua deve venire da qualcosa di diverso. Pertanto, o la realtà dello Spazio sottostante deve formare una varietà

discreta, o le basi delle relazioni metriche devono essere ricercate fuori di esso, nelle forze vincolanti [*bindenen Kräften*] che agiscono su di esso. [...] Questo ci porta nel campo di un'altra scienza, il regno della fisica, nel quale la natura dell'attuale occasione non ci permette di entrare.

Qui sembra esserci un chiaro preludio delle idee di Albert Einstein sull'influenza delle masse, e delle forze gravitazionali da loro generate, sulla forma dello spazio; lasciamo agli storici della scienza dire se questo è vero.

La lezione è finita; Dedekind la descrive come un capolavoro espositivo, anche se probabilmente pochi quel giorno l'hanno davvero compresa. Racconta anche che Gauss, in preda a un totale sbigottimento di fronte a concetti e idee che avevano superato ogni sua aspettativa, abbia comunicato al collega fisico Wilhelm Weber, con insolita eccitazione, «l'enorme apprezzamento per la profondità delle idee presentate da Riemann». Dopo aver considerato nel corso della carriera tutti i colleghi di livello mediocre, sentire una lezione di un giovane matematico che con chiarezza riassume, generalizzandoli, i suoi risultati deve davvero essergli sembrato stupefacente.

Nel 1859 Riemann viene finalmente nominato professore di geometria a Gottinga; nel 1866 le truppe prussiane invadono la città e lo costringono a fuggire in Italia. Nell'autunno dello stesso anno muore di tubercolosi nei pressi del lago Maggiore. Quando la notizia giunge a Gottinga la domestica di casa Riemann decide di riordinare lo studio gettando i suoi appunti, inclusi molti lavori rimasti incompiuti. Ordine e pulizia ci hanno sicuramente fatto perdere molte sue grandi scoperte, alcune forse ancora nascoste nel mondo delle idee.

Negli anni successivi la lezione di Riemann viene studiata, commentata e diffusa da molti matematici della scuola di Gottinga; in particolare da Dedekind, Klein e più tardi da Hermann Weyl.

Eugenio Beltrami scrive la sua fondamentale memoria sulle geometrie non euclidee, di cui abbiamo parlato nel capitolo precedente, nel 1868, l'anno successivo alla pubblicazione della lezione riemanniana. In essa è cruciale l'uso della formula per la metrica di una varietà di dimensione 3 con curvatura costante uguale a -1.

Da Riemann alla Relatività generale

Nel 1861 Riemann ritorna sul problema di come caratterizzare le varietà riemanniane piatte. Lo fa in un lavoro che presenta all'Accademia di Parigi per l'assegnazione di un premio sullo studio della conduzione del calore; non vince il premio perché la giuria considera le sue argomentazioni poco chiare.

Nel lavoro esplicita i calcoli necessari per costruire un sistema di coordinate con metrica piatta a partire da un'espressione della metrica in coordinate arbitrarie. Questi calcoli conducono a una serie di equazioni differenziali per la soluzione delle quali Riemann ricava delle condizioni necessarie che esprime attraverso quello che ora chiamiamo *tensore di curvatura di Riemann*.

Semplificando il più possibile potremmo definire un tensore di rango r su una varietà come una funzione che in ogni punto assegna a un qualunque sottoinsieme di direzioni, detti *vettori* (e covettori), un valore numerico. In questo senso la curvatura sezionale potrebbe essere pensata come un tensore che assegna a due direzioni la curvatura della superficie che essi generano. Il tensore deve però essere compatibile con il cambio di coordinate, ovvero se cambio coordinate il tensore deve avere sulle stesse direzioni lo stesso valore.

Il tensore di curvatura di Riemann è un tensore di rango 4 (agisce su tre vettori e un covettore) che porta in sé tutte le informazioni provenienti dalle curvature sezionali, che a loro volta lo determinano. Vale pertanto il seguente risultato.

TEOREMA. Sia M una varietà riemanniana. Se il tensore di curvatura di Riemann è zero allora la varietà è piatta, ovvero (localmente) esistono dei parametri nei quali la metrica è della forma $\sqrt{dx_1^2 + \ldots + dx_n^2}$.

Nel riprendere una notazione usata nel terzo capitolo, diremo che due varietà riemanniane uguali, a meno di un cambio di parametri, sono *localmente isometriche*.

La funzione del tensore di curvatura dovrebbe essere quella di individuare la metrica (non solo quella piatta) a meno di locali isometrie. Questo è vero per varietà di dimensione maggiori o uguali a 3, sotto qualche ipotesi aggiuntiva, ed è stato dimostrato negli anni Settanta del secolo scorso dai matematici Ravindra S. Kulkarni e Shing-Tung Yau. Nel caso delle superfici ci sono dei controesempi abbastanza patologici.

Una volta definito il concetto di varietà riemanniana, un insieme con relazioni metriche che permettono di misurare gli oggetti in esso contenuti, è naturale cominciare a sviluppare su di esso una teoria per determinare queste misure, un *calculus* sulle varietà.

Due matematici italiani si avventurano in questa monumentale impresa, Gregorio Ricci-Curbastro e il suo allievo Tullio Levi-Civita. Nel 1900 scrivono un famoso libro dal titolo *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* che diventa presto il testo di riferimento per quello che da allora verrà chiamato *calcolo differenziale assoluto*.

Essi elaborano un modo di derivare le funzioni definite su una varietà in maniera intrinseca, introducendo il concetto di *connessione di Levi-Civita*. Estendono questa derivazione-connessione ai tensori, in maniera appropriata e molto operativa, costruendo il cosiddetto *calcolo tensoriale*.

Per questa via ridefiniscono il tensore di curvatura di Riemann e altri tensori di curvatura, da questo determinati ma utili in contesti speciali. Tra essi il *tensore di curvatura di Ricci* e il *tensore di curvatura scalare*, tensori di rango 2 e 0, tecnicamente ottenuti dal tensore di Riemann, tensore di rango 4, contraendo rispettivamente due indici e poi altri due. Si noti che il tensore di Ricci è completamente determinato dalle curvature sezionali ma in genere contiene meno informazioni di queste. Dunque non sempre è in grado di determinare la varietà a meno di isometrie.

Negli stessi anni un fisico-matematico tedesco, Hermann Minkowski, assistente di Hilbert a Gottinga e poi insegnante di Einstein a Zurigo, in una conferenza di fisica enuncia il suo famoso punto di vista (1908):

I concetti di spazio e di tempo che desidero esporvi traggono origine dal terreno della fisica sperimentale, e in ciò risiede la loro forza. Sono radicali. D'ora in avanti lo spazio singolarmente inteso, ed il tempo singolarmente inteso, sono destinati a svanire in nient'altro che ombre, e solo una *connessione dei due* potrà preservare una realtà indipendente.

Il concetto di varietà introdotto pochi anni prima da Riemann risulta subito perfetto per interpretare l'intuizione di Minkowski: la realtà fisica va interpretata con una varietà che dipende da quattro coordinate (t, x, y, z): la prima determina il tempo e le altre tre la posizione nello spazio ordinario.

Ma come determinare su questa varietà 4-dimensionale una metrica, ovvero la connessione tra spazio e tempo richiesta da Minkowski?

La risposta viene dal principio fisico su cui poggia la *Teoria della relatività ristretta*: le particelle non possono muoversi a una velocità superiore a quella della luce.

Questo principio è verificato solo se le relazioni metriche sono determinate da un tratto infinitesimo il cui quadrato della lunghezza è dato dalla formula:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dy^2$$

dove c è la velocità della luce.

Questa varietà, determinata da principi fisici, viene oggi chiamata lo *spaziotempo di Minkowski*. Non è riemanniana ed è il primo esempio di *varietà semi-riemanniana*: una varietà in cui la metrica è definita da una formula del tipo

$$ds^2 = g_{11} dx_1^2 + \ldots + g_{ij} dx_i dx_j + \ldots + g_{nn} dx_n^2$$

(forma quadratica nei dx_i) ma questa non è necessariamente positiva: le funzioni $g_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ possono anche essere negative.

In queste ipotesi alcuni punti della varietà potranno avere il quadrato della distanza negativa, una novità *radicale*, controintuitiva per l'idea fisica di spazio prima di Einstein e Minkowski.

Il calcolo tensoriale si estende bene alle varietà semi-riemanniane. In particolare anche su queste possiamo definire il tensore di Riemann e i suoi derivati tensori di Ricci e curvatura scalare.

Einstein non si accontenta di questa prima teoria e dieci anni dopo, nel 1915, ne formula una più generale, in grado di inglobare anche la forza di gravità estendendo la Teoria classica di Newton.

Nella *Teoria della relatività generale*, di fatto una teoria geometrica, egli propone un modello di varietà 4-dimensionale, spazio-temporale, dotata di una metrica g semi-riemanniana del tipo di Minkowski, compatibile dunque con la teoria ristretta, ulteriormente determinata da osservazioni della fisica sperimentale sulla forza di gravità.

Queste osservazioni lo portano a scrivere una delle equazioni più famose della storia del pensiero scientifico, l'*equazione di campo di Einstein*:

$$Ric_g - \frac{1}{2} s_g g = 8\pi T$$

dove Ric_g e s_g denotano rispettivamente la curvatura di Ricci e la curvatura scalare della metrica g; T è il *tensore energia impulso*, un tensore di rango 2 che contiene tutta l'informazione proveniente dalla fisica, in particolare dalla materia. Risolvere questa equazione significa trovare la metrica, assieme alle sue curvature scalari e di Ricci.

Einstein sembra seguire alla lettera le indicazioni di Riemann secondo le quali la metrica dello spazio deve essere determinata dalle *forze vincolanti che agiscono su di esso.*

Una spiegazione della fondatezza di questa equazione è difficile e soprattutto è di natura fisica, dunque non pertinente in questa sede. Una qualche analogia può essere cercata con il problema più semplice della brachistocrona, proposto nel secondo capitolo. In quel caso si mettono assieme principi fisici, la legge di Galileo, con la richiesta di minimo, espressa dalla condizione di Snell, e le restrizioni geometriche della geometria piana. In questo caso si arriva all'equazione mettendo assieme analoghi principi: quelli della fisica, contenuti nel tensore T, quello che la luce viaggia alla velocità massima, descritto nella segnatura della metrica semi-riemanniana, quelli più geometrici, rappresentati nella prima parte dell'equazione che coinvolge le curvature.

Le motivazioni che hanno spinto Einstein a scrivere l'equazione in questa forma non sono a tutt'oggi chiare. Di certo voleva tener conto della Teoria della relatività ristretta e della Teoria classica newtoniana. Arrivò alla forma finale attraverso molte approssimazioni, corrette e riviste negli aspetti matematici anche attraverso una celebre corrispondenza epistolare con Levi-Civita. Nella seconda metà del secolo scorso numerose teorie geometriche e fisiche hanno confermato la validità teorica dell'equazione, evidenziando anche la sua unicità.

Einstein descrive l'equazione come un monumento composto da *marmo pregiato* (la parte sinistra che riguarda la geometria) e da *legno scadente* (la parte destra che riguarda la materia). Su questa parte di legno lavorano i fisici, come falegnami intagliando un modello dello spazio. Lui stesso si pose alla ricerca di una buona formalizzazione del tensore *T*, tutt'oggi ancora lontana da essere raggiunta.

Nell'equazione sono riassunte, grazie alla notazione tensoriale, dieci equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari. Stabilito un opportuno tensore energia-impulso, una soluzione determina, attraverso la curvatura di Ricci e la curvatura scalare, una varietà semi-riemanniana di dimensione 4 (e altri oggetti di interpretazione fisica come i campi di materia).

In generale è molto difficile trovare soluzioni esatte di questo tipo di equazioni. Una schiera di fisici matematici oggi ricercano soluzioni con metodi numerici per mezzo di computer e di programmi molto avanzati; la *Relatività numerica* è oggi la moderna falegnameria dove si progettano le possibili strutture geometriche del nostro universo.

Una delle conseguenze della Teoria della relatività generale e dell'equazione di campo è l'esistenza di *onde gravitazionali*, un fenomeno inizialmente intravisto da Poincaré nel 1905 e poi teorizzato da Einstein nel 1916. Possono essere pensate come una soluzione dell'equazione di campo che ammette un comportamento ondulatorio della curvatura al variare del tempo.

Pur certo della loro esistenza, Einstein dubitava della possibilità di rilevarle con un esperimento, che avrebbe dato maggior verità alla sua teoria.

Nel 2016 un team internazionale di oltre cento ricercatori annuncia al mondo l'osservazione (avvenuta di fatto nel 2015) di un'onda gravitazionale corrispondente a una soluzione numerica dell'equazione di Einstein con un T corrispondente alla fusione di due buchi neri distanti dalla Terra circa 1 miliardo e 300 milioni di anni luce. Queste osservazioni sono state ripetute almeno altre tre volte con fenomeni massivi di diversa natura. La comunità dei fisici ritiene che queste rilevazioni rappresentino un'evidenza sperimentale sufficiente per validare del tutto la teoria, che fino a quel momento era solo una teoria geometrica. Nel 2017 i tre coordinatori del progetto hanno per questo ricevuto il premio Nobel per la fisica.

Un programma per fare geometria

Pochi anni dopo la morte di Riemann il giovane matematico Felix Klein ottiene l'abilitazione come docente all'Università di Gottinga; nel 1872, a soli 23 anni, diviene professore a Erlangen.

La rivoluzione portata nella geometria da Riemann richiede una nuova organizzazione nel progresso del pensiero, e a questo sembra mirare Klein nella sua lezione inaugurale, oggi denominata *Erlanger Programm* (1872). Questo programma, tra i più influenti del pensiero (scientifico) contemporaneo, si colloca a fianco di altri manifesti e programmi rivoluzionari in voga all'epoca, tra i quali ad esempio il *Manifesto del Partito Comunista* (1848) e *L'origine delle specie* (1859).

Klein è matematico di primissimo livello e uomo di grande cultura, impegnato sia a far avanzare il progresso scientifico sia a organizzare la comunità scientifica in forme ancor oggi attuali. Tra queste la fondazione di riviste specializzate con un ristretto gruppo di *referees* (revisori e garanti scientifici), l'organizzazione della ricerca in dipartimenti e lo studio di modalità didattiche e divulgative più efficaci.

Tra i suoi studenti vanno annoverati Max Planck, Gregorio Ricci Curbastro e Gino Fano. Quest'ultimo traduce in italiano il Programma di Erlangen e lo pubblica con alcuni commenti sulla rivista «Annali di Matematica Pura ed Applicata» di Firenze con il titolo *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*.

Leggiamo questa traduzione, aggiungendo qualche commento:

> Confrontando le nozioni della geometria ordinaria (elementare) con questo metodo, introdottosi gradatamente, di considerare le forme dello spazio, sorge la questione, se esista un principio generale, secondo cui ambo i metodi potrebbero organizzarsi. [...] Ma il pubblicare siffatte considerazioni comprensive appariva tanto più giustificato, in quanto che la geometria, che pur è unica nella sua sostanza, nel rapido sviluppo cui andò soggetta negli ultimi tempi si è troppo suddivisa in discipline quasi separate, che vanno progredendo alquanto indipendentemente le une dalle altre.

Lo scopo è quello di definire un principio generale sotto il quale far convergere le diverse discipline della geometria moderna. Il concetto più essenziale fra quelli necessari per quanto esporremo in seguito è quello di gruppo di trasformazioni dello spazio.

Un *gruppo* in matematica è un insieme dotato di un'operazione, ovvero una legge che ad ogni due elementi dell'insieme ne associa un terzo; deve inoltre avere un elemento neutro per questa operazione e un inverso per ogni elemento del gruppo. Tanti insiemi numerici hanno una struttura di gruppo: i numeri interi, ad esempio, con la somma e con elemento neutro lo 0 formano un gruppo. E anche i numeri reali, con le due operazioni di somma e prodotto; l'elemento neutro per il prodotto è l'1, per la somma lo 0 (unico elemento a non avere inverso rispetto al prodotto). Questo concetto nasce all'inizio dell'800 in algebra, nei lavori di Joseph-Louis Lagrange, Paolo Ruffini, Évariste Galois e Niels Henrik Abel sulla risolubilità delle equazioni polinomiali di grado maggiore a 4. Da allora è diventato uno degli strumenti più utilizzati e versatili in tanti campi della ricerca matematica.

Il gruppo delle trasformazioni viene introdotto in geometria da Sophus Lie; questi gruppi si chiamano oggi anche *gruppi di Lie* e hanno importanza in fisica teorica. Klein travasa nel programma buona parte delle idee di Lie.

Una trasformazione dello spazio, o più in generale di una varietà, è una corrispondenza che associa ad ogni punto della varietà uno e un unico altro punto della stessa varietà; si chiede anche che ogni punto della varietà provenga, mediante questa trasformazione da un altro punto e che due punti non possano essere mandati nello stesso, ovvero che la *trasformazione sia biunivoca*. Due trasformazioni possono essere composte una con l'altra dando origine a una terza trasformazione; si noti che l'ordine con cui si compongono le due non è irrilevante e in generale invertendolo si ottiene una trasformazione diversa.

Un *gruppo di trasformazioni* di una varietà è un insieme di trasformazioni della varietà, con l'operazione data dalla composizione.

Lie osserva anche come, sotto opportune ipotesi, un gruppo di trasformazioni abbia esso stesso una struttura di varietà e possa quindi essere studiato e classificato anche dal punto di vista geometrico; su questo aspetto il programma non si addentra troppo.

Diamo un esempio nel caso della varietà più semplice, il piano. Una *traslazione* del piano è una trasformazione che trasla ogni punto in una direzione e per una lunghezza fissate. In coordinate una traslazione è data da $T(x, y) = (x + a, y + b)$, con (a, b) fissati. L'insieme di tutte le traslazioni forma un gruppo. Un altro gruppo è dato dalle *rotazioni* attorno a un punto fissato; un altro ancora dalle *riflessioni* rispetto a una retta fissata.

L'insieme di tutte le traslazioni, di tutte le rotazioni, di tutte le riflessioni e delle loro composizioni forma un gruppo, il *gruppo delle isometrie del piano*.

Se aggiungiamo a questo gruppo le dilatazioni delle lunghezze in direzione radiale a un punto fisso, e tutte le possibili composizioni, otteniamo un gruppo più ampio detto *gruppo delle similitudini*.

Ora vi sono nello spazio delle trasformazioni che non alterano affatto le proprietà geometriche dei corpi. Infatti, per la natura del concetto di proprietà geometriche, queste sono indipendenti dalla posizione che la figura da studiare occupa nello spazio, dalla sua grandezza assoluta, e finalmente anche dal senso in cui sono disposte le sue parti. Le proprietà di una tale figura rimangono dunque inalterate in tutti i movimenti dello spazio, nelle sue trasformazioni per similitudine, nel processo di riflessione (specchiamento), come pure in tutte le trasformazioni che risultano da composizioni di queste. Il complesso di tali trasformazioni lo chiameremo *gruppo principale di trasforma-*

zioni dello spazio: le proprietà geometriche non si alterano nelle trasformazioni del gruppo principale.

E inversamente possiamo anche dire: le proprietà geometriche sono caratterizzate dalla loro invariabilità rispetto alle trasformazioni del gruppo principale. Invero, se si considera per un istante lo spazio come immobile, ecc., come una varietà rigida, allora ogni figura avrà un interesse individuale; or bene, fra le proprietà ch'essa avrà come individuo, soltanto quelle propriamente geometriche si conserveranno nelle trasformazioni del gruppo principale [...].

Facciamo ora astrazione dall'immagine sensibile, matematicamente non essenziale, e consideriamo lo spazio semplicemente come *una varietà più volte estesa*, quindi a tre (o più) dimensioni se ci atteniamo alla solita rappresentazione del punto come elemento dello spazio. Per analogia colle trasformazioni dello spazio parliamo di trasformazioni della varietà; anch'esse formano dei gruppi [...].

Come generalizzazione della geometria sorge così il seguente problema comprensivo: data una varietà e in questa un gruppo di trasformazioni, studiare le forme appartenenti alla varietà per quanto concerne quelle proprietà che non si alterano nelle trasformazioni del gruppo dato.

Secondo l'espressione moderna [...] possiamo anche dire così: *data una varietà e in questa un gruppo di trasformazioni, si sviluppi la teoria invariantiva relativa al gruppo medesimo*.

Questo è il problema generale che comprende in sé, non solo la geometria ordinaria, ma anche e in particolare i nuovi metodi geometrici che qui dobbiamo nominare, e le diverse maniere di trattazione delle varietà comunque estese. Ciò che conviene più specialmente notare si è l'arbitrarietà che sussiste in quanto alla scelta del gruppo di trasformazioni da fissare; e l'egual diritto, che ne segue e che in questo senso va inteso, di tutte le specie di considerazioni che si raccolgono sotto quel punto di vista generale.

Riassumendo, il Programma di Erlangen propone le seguenti regole base per «fare geometria».

1. Si fissa una varietà *ambiente*, ad esempio il piano, oppure lo spazio tridimensionale, o la sfera…

2. Quindi si sceglie un gruppo di trasformazioni della varietà, dette anche *simmetrie*.

3. La (corrispondente) geometria è formata dagli oggetti (sottoinsiemi) o dalle proprietà (proposizioni-teoremi) che le simmetrie del gruppo «preservano» nella loro azione, ovvero che risultano *invarianti* per l'azione delle simmetrie.

Nel caso del piano con il gruppo delle isometrie (traslazioni, rotazioni e riflessioni), retta, angolo, triangolo sono oggetti invarianti: una retta viene mandata con una isometria in una retta, e anche un triangolo. Parallelismo, misure di lunghezze e di aree sono proprietà *invarianti* per trasformazioni isometriche. Questi oggetti e queste proprietà danno origine alla geometria euclidea piana.

Se introduciamo anche le dilatazioni creiamo una geometria più ampia, che comprende i teoremi sulle similitudini; questo gruppo preserva il parallelismo ma non le lunghezze e nemmeno le aree.

La prima conseguenza del Programma di Erlangen è che «la geometria» diventa definitivamente «le geometrie». Fissato un ambiente, una varietà, il tipo di geometria che vogliamo fare dipende dalla scelta del gruppo. Questo permette di *classificare* le geometrie, attraverso la classificazione dei gruppi. O anche di mostrare analogie e identità tra diverse geometrie, studiando i sottogruppi comuni, come spiega Klein nella sezione dal titolo *Gruppi di trasformazioni di cui l'uno abbraccia l'altro vengono subordinati fra loro. Diversi tipi di ricerche geometriche e loro reciproca relazione*.

È questo un principio del quale spesso si fa uso in seguito, e che perciò enunceremo qui subito in generale, per es. nel modo seguente: sia data una varietà e, per la sua trattazione, un gruppo di trasformazioni ad essa relativo. Si ponga il problema di studiare le forme contenute nella varietà in relazione ad una data forma. Allora noi possiamo o aggiungere al sistema delle forme quest'ultima data, e allora si richiederanno le proprietà del sistema così esteso in relazione al gruppo proposto; ovvero non estendere il sistema, ma *limitare le trasformazioni* che si mettono a base della trattazione a quelle contenute nel gruppo medesimo che lasciano inalterata la proposta forma (e che necessariamente costituiscono ancora un gruppo).

Occupiamoci adesso dell'inversa, che si può comprendere fin d'ora. Cerchiamo quali siano le proprietà dei corpi che si conservano in un gruppo di trasformazioni *comprendente* quello principale come parte. Ogni proprietà che troviamo in una tale ricerca è una proprietà geometrica del corpo a sé, ma la reciproca non sussiste. Si ha quindi: sostituendo al gruppo principale un altro gruppo più ampio, le proprietà geometriche si conservano solo in parte. Le rimanenti appaiono come proprietà non più dei corpi a sé, ma del sistema che risulta aggiungendo a questi una forma speciale. Questa forma speciale (per quanto può essere determinata) è definita dal fatto che, supposta fissa, concede allo spazio, fra le trasformazioni del gruppo proposto, solo quelle del gruppo principale.

Su questa proposizione riposa ciò che hanno di particolare i nuovi indirizzi geometrici che qui dobbiamo discutere, e il loro rapporto al metodo elementare. Il loro carattere è appunto quello di porre a base delle considerazioni, in luogo del gruppo principale, un altro gruppo più esteso di trasformazioni dello spazio. La loro reciproca relazione è determinata da una proposizione analoga, finché *i loro gruppi si comprendono l'un l'altro*.

Un problema generale, indicato implicitamente nel Programma di Erlangen, è il seguente: fissata una varietà riemanniana trovare tutte le trasformazioni che lasciano inalterata la metrica («la proposta forma»). L'insieme di queste trasformazioni («che necessariamente costituiscono ancora un gruppo») è detto *gruppo delle isometrie* della varietà.

Il gruppo delle isometrie del piano con la distanza euclidea è proprio il gruppo costituito dalle traslazioni, rotazioni e riflessioni e dalle loro composizioni.

Nel caso dello spazio euclideo (piatto) tridimensionale la determinazione del gruppo delle isometrie è più complesso e passa attraverso alcuni teoremi di Eulero. In fisica questo problema viene denominato *cinematica di un corpo rigido*.

La restrizione del gruppo delle isometrie dello spazio a quelle che lasciano inalterata la sfera dà esattamente il gruppo delle isometrie della sfera, studiato da Eulero e poi da Gauss. Questo gruppo si chiama *gruppo ortogonale*, denotato con $O(3)$; è un importante gruppo di Lie e può essere pensato come il gruppo delle matrici 3×3 che hanno come inversa la loro trasposta. La geometria sferica è lo studio degli invarianti sulla sfera rispetto alle trasformazioni del gruppo $O(3)$.

Klein e Poincaré descrivono il gruppo delle isometrie delle superfici iperboliche, rispettivamente del disco e del semipiano iperbolico.

Poincaré in particolare, facendo uso dei numeri complessi e della loro moltiplicazione, mostra come questi gruppi siano la restrizione di un gruppo unico, detto *gruppo delle trasformazioni lineari fratte*, i cui elementi sono le trasformazioni del piano complesso in sé stesso della forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

La relativa semplicità della formula non deve trarre in inganno; si tratta di numeri complessi, della forma $z = x + iy$, e di prodotti tra numeri complessi. Poincaré mostra anche che questo gruppo è la restrizione di un gruppo che agisce sullo spazio a tre dimensioni rispettando una ben determinata metrica iperbolica: ripercorre quindi la via di Beltrami ma nello spirito del Programma di Erlangen.

L'uso dei numeri complessi in geometria non è una novità: Riemann per primo ne afferra l'importanza strategica, passando attraverso lo studio di problemi di elettromagnetismo, ma anche Eulero e Gauss ne hanno fatto uso, più o meno consapevolmente. Con l'uso dei numeri complessi, ma soprattutto con le proprietà delle funzioni regolari di una variabile complessa, studiate nella tesi di dottorato del 1851, Riemann e quindi Poincaré scoprono uno dei teoremi più belli della matematica moderna:

TEOREMA DI UNIFORMIZZAZIONE. Ogni superficie riemanniana semplicemente connessa è conforme ad una superficie con metrica a curvatura costante. Se la curvatura è positiva queste superfici sono tutte conformi alla sfera; se è nulla sono conformi al piano; se è negativa sono conformi alla superficie iperbolica di Beltrami.

Questo teorema in qualche modo chiude la questione sull'esistenza e sulla classificazione delle geometrie piane, ovvero varietà riemanniana di dimensione 2, non euclidee: a meno di trasformazioni conformi, sotto l'ipotesi tecnica di semplice connessione che discuteremo nel seguito, sono solo due. Uno dei grandi obiettivi della geometria del XX secolo è l'estensione di questo teorema in dimensioni superiori.

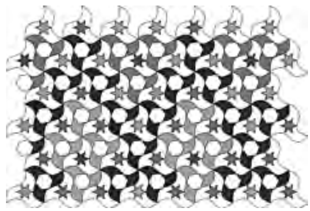


FIG. 4.3.

Come tassellare lo spazio

Il problema della *tassellatura* di un piano, ovvero di come ricoprirlo con uno o più poligoni (tasselli) ripetuti all'infinito senza sovrapposizioni, è un problema antico, strettamente collegato con lo studio delle isometrie.

Le tassellature delle pareti dell'Alhambra, il palazzo arabo di Granada, descrivono i molti possibili modi con cui pavimentare il piano euclideo. La figura 4.3 è una riproduzione digitale di una di queste pareti.

Molteplici sono le tassellature che si presentano in natura: stupefacente è quella nei favi degli alveari, formata da tasselli esagonali (fig. 4.4).

Le tassellature regolari del piano, con un solo poligono regolare, sono tre, rispettivamente quelle fatte con i quadrati, con i triangoli equilateri e con gli esagoni (il favo).

Il problema si può porre anche per superfici non euclidee e in dimensione più alta; tassellature in questi ambiti hanno numerose applicazioni, ad esempio nella creazione di materiali con grande resistenza e duttilità.

FIG. 4.4.

Tassellare un pavimento sferico o iperbolico ha un grado di complessità minore di quello euclideo perché, come osservato da

Fig. 4.5.

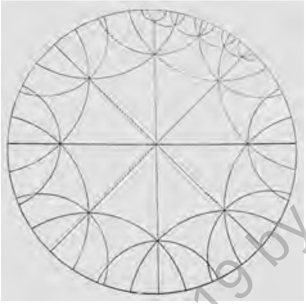


Fig. 4.6.

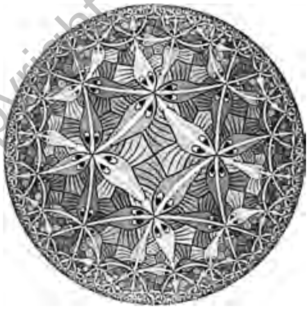


Fig. 4.7.

Poincaré, in questi casi il gruppo delle isometrie è più ampio e la tassellatura può avere maggiori condizioni di simmetria.

Le tassellature regolari della sfera sono cinque e corrispondono a proiezioni centrali dei cinque solidi platonici (ovvero *gonfiando* un solido fino a farlo sferico). Il pallone da calcio è una tassellatura della sfera non regolare, fatta con pentagoni ed esagoni (fig. 4.5). Tassellature con poligoni regolari di diverso tipo si dicono archimedee e sono state classificate da Archimede.

Il disco iperbolico può essere tassellato in modo regolare in una infinità di maniere; Gauss, in un lavoro non pubblicato, fu uno dei primi a proporre la tassellatura della figura 4.6.

Questa tassellatura fu ripresa dall'incisore olandese Maurits Cornelis Escher che, senza grandi conoscenze matematiche, realizzò con essa delle splendide opere. La figura 4.7 è una riproduzione di un'opera di Escher dal titolo *Circle Limit III*. Il matematico britannico Harold Coxeter studiò in dettaglio tutte queste tassellature, riconducendole a particolari gruppi di isometrie.

La rivoluzione dei pittori italiani

Il Rinascimento italiano, uno dei periodi più fecondi per lo sviluppo della cultura, ha introdotto novità straordinarie nel campo della geometria. Tra queste una nuova visione dello spazio attraverso l'uso della prospettiva, per opera di architetti e pittori del '400, tra cui Filippo Brunelleschi, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca, Paolo Uccello e Leonardo da Vinci.

La scoperta di un metodo per disegnare correttamente in prospettiva è attribuita a Filippo Brunelleschi. Un primo vero e proprio trattato è il *De pictura* (1435), redatto da Leon Battista Alberti e dedicato a Brunelleschi. Qui troviamo la *tecnica del velo*, che consiste nel porre un pezzo di stoffa trasparente con una trama abbastanza larga su una cornice fissata tra il pittore e la scena da ritrarre. Osservando con un solo occhio da un punto fissato si riporta sulla tela quello che appare in trasparenza sul velo. La figura 4.8 riproduce un'incisione di Albrecht Dürer che descrive questa tecnica.

Alberti fornisce delle indicazioni teoriche attraverso quella che chiama *costruzione legittima*, basata essenzialmente su due principi:

1. una linea retta in prospettiva rimane retta;
2. rette parallele rimangono parallele o convergono a un punto, detto *punto di fuga*.

FIG. 4.8.

La figura 4.9, tratta dal *De pictura*, mostra come disegnare in prospettiva un pavimento con tasselli quadrati. Le rette non orizzontali vengono determinate spaziandole regolarmente lungo una retta orizzontale di base scelta e poi facendole convergere a un punto di fuga. Tutti i punti di fuga stanno su una retta, detta *orizzonte* o *retta all'infinito*. Si determinano per intersezione i punti delle altre rette orizzontali e via via tutta la pavimentazione.

I pittori del Rinascimento considerano un ambiente «allargato», con l'aggiunta dei punti di fuga: il *piano proiettivo*, che consiste nel *piano con l'aggiunta di una retta*, composta da punti di fuga che pensiamo all'infinito, a cui convergono le rette tra loro parallele.

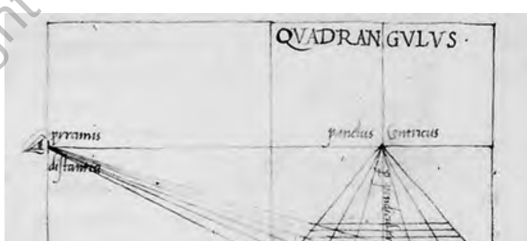


FIG. 4.9.

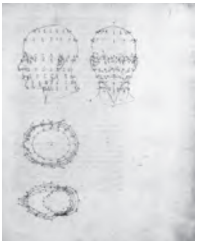
 

FIG. 4.10.

Anche Piero della Francesca scrive poco dopo un trattato sul disegno prospettico, il *De prospectiva pingendi* (1482), riprodotto in sei copie, due delle quali di pugno di Piero; nella figura 4.10 una pagina del trattato, con le istruzioni per disegnare in prospettiva una testa umana, e la *Città ideale*.

Nel 1497 il matematico e frate Luca Pacioli scrive il famoso libro *De divina proportione*, nel quale ripropone tutte le teorie descritte da Piero, senza mai citarlo. Nel 1509 Pacioli decide quindi di stampare il libro con la nuova tecnica di Gutenberg; per le illustrazioni chiede aiuto all'amico Leonardo da Vinci. Quest'ultimo in verità si dice fosse un po' titubante, poiché non vede le ragioni per rifare quanto già presente in Piero.

Una buona casa editrice (la Paganino Paganini, a Venezia), che realizza una stampa innovativa di numerose copie, e un eccellente illustratore fanno sì che il libro diventi presto un successo, rubando la paternità al *De prospectiva* che di fatto viene quasi dimenticato.

Sembra sia stato fra' Pacioli il misterioso matematico italiano che ha svelato a Dürer, dunque alla concorrenza tedesca, i trucchi della prospettiva. Questi redige a sua volta un testo dal titolo *Underweysung der*

Messung, mit dem Zirckel und richtscheyt, considerato il primo libro di scienza in lingua tedesca. La prefazione fu scritta da Erasmo da Rotterdam e nel testo Dürer rivendica a sé la disciplina, dicendo che farà meglio di alcuni non meglio precisati «trattatisti italiani, che parlano di cose che non sono poi in grado di fare».

Le idee degli artisti italiani vengono incorporate in una teoria matematica consistente solo parecchi anni dopo in un libro del 1639 di Girard Desargues. Il matematico francese riassume in poche osservazioni tutto ciò che serve per definire un piano proiettivo, denominate oggi *assiomi di Desargues*:

1. due punti individuano una e una sola retta;
2. due rette individuano uno e un solo punto.

Si noti che, come indicato anche da Riemann, gli spazi della geometria possono essere anche discreti, formati cioè da un numero finito di punti e oggetti. Nel caso discreto ai due assiomi di Desargues bisogna aggiungere che ogni retta contiene almeno tre punti e che nel piano esistono almeno tre punti non allineati. La figura 4.11 contiene un curioso modello di piano *proiettivo discreto*, formato unicamente da sette punti e sei rette, una raffigurata in forma circolare. Ideato da Gino Fano, e per questo denominato *piano di Fano*, realizza gli assiomi di Desargues con il minimo numero di punti e rette.

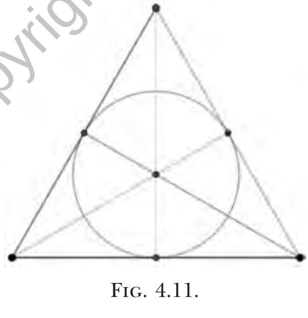


FIG. 4.11.

La definizione di piano proiettivo si estende alle dimensioni superiori: lo spazio proiettivo tridimensionale consiste nello spazio in cui viviamo con l'aggiunta di un piano, composto da punti all'infinito. Proseguendo in dimensione quattro e oltre si ottiene lo *spazio proiettivo di dimensione n* aggiungendo allo spazio euclideo delle *n*-uple un iperpiano di dimensione (n – 1) all'infinito.

L'idea è quella di tenere conto del comportamento all'infinito degli oggetti dello spazio, per questo si «avvicina e si organizza» l'infinito in un iperpiano, che si può esplorare quando necessita.

Una definizione rigorosa richiede un'astrazione eccessiva per gli scopi di questo libro; sviluppata da Klein e altri, prevede per lo spazio proiettivo una struttura di varietà. Lo dota quindi di coordinate locali in ogni punto: per i punti non all'infinito le coordinate sono quelle euclidee dello spazio, per l'iperpiano all'infinito viene costruito un altro sistema di coordinate compatibile con il precedente.

Sullo spazio proiettivo agisce in maniera naturale un gruppo di trasformazioni dette *trasformazioni proiettive* o *proiettività*. La definizione è tecnica e qui ne diamo un'idea geometrica nel caso del piano proiettivo. Prendiamo due copie del piano e le dislochiamo nello spazio; consideriamo quindi un punto P dello spazio non sui due piani. Ad ogni punto Q di uno dei due piani associamo il punto Q' sull'altro piano ottenuto come intersezione della retta per P e Q, come nella figura 4.12. In parole semplici *proiettiamo* Q da P in Q' sull'altro piano.

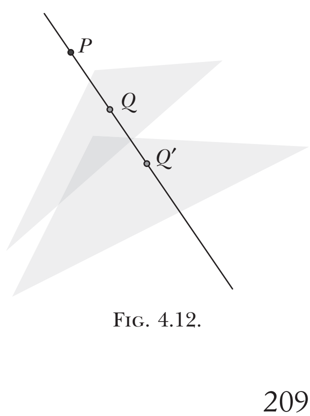


FIG. 4.12.

Potrebbe sembrare che questa trasformazione non sia definita in alcuni punti, ad esempio sulla retta ottenuta intersecando il primo piano con il piano parallelo al secondo passante per P. In realtà la trasformazione è ben definita in tutti i punti eccetto P, se si considerano i piani e lo spazio come proiettivi, ovvero con l'aggiunta dei loro punti all'infinito; in questo contesto più appropriato viene chiamata *prospettiva (o proiezione) del piano* in sé stesso.

Si noti che la composizione di due prospettive (da punti diversi) non è sempre una prospettiva. Il primo ad accorgersene fu Leonardo da Vinci che nel *Codice Atlantico* disegnò il primo *anamorfismo*, un disegno che visto da punti diversi rappresenta figure diverse. Un anamorfismo nasce proprio dalla composizione di diverse prospettive; il dipinto più famoso realizzato con questa tecnica è probabilmente quello denominato *Ambasciatori* di Hans Holbein il Giovane del 1533.

Il *gruppo delle trasformazioni proiettive del piano* è quello che contiene tutte le prospettive e tutte le loro composizioni. Si noti che in questo gruppo vi sono tutte le traslazioni, le rotazioni, le riflessioni, le simmetrie.

Il gruppo delle trasformazioni proiettive in dimensioni superiori si definisce in modo analogo.

La *geometria proiettiva* è lo studio degli oggetti e delle proprietà dello spazio proiettivo invarianti per il gruppo delle trasformazioni proiettive. Rette, piani, iperpiani sono oggetti della geometria proiettiva. Un esempio di teorema è dato dal seguente.

TEOREMA DI DESARGUES. Se due triangoli nel piano sono in prospettiva rispetto a un punto allora le rette generate dai lati corrispondenti si intersecano in tre punti che sono allineati.

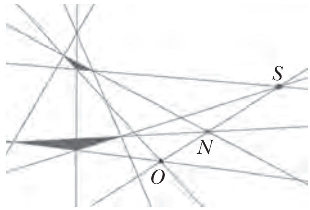


Fig. 4.13.

La figura 4.13, che illustra il teorema con un esempio, ci aiuta a dare una facile dimostrazione, utilizzando un'idea da alcuni attribuita al matematico italiano Luigi Cremona. Pensiamo la configurazione come proiezione di una analoga nello spazio; in altre parole «solleviamo» la configurazione nello spazio alzando dal piano allo spazio una delle tre rette su cui stanno i vertici dei triangoli, sempre facendola passare per l'intersezione delle altre due.

In questo modo i due triangoli diventano triangoli nello spazio; ogni triangolo individua un piano e questi due piani, nello spazio, si incontrano lungo una retta. Su questa retta devono per forza giacere i punti di intersezione dei prolungamenti dei lati corrispondenti. Riproiettando tutto nel piano otteniamo il teorema.

Il Teorema di Desargues rappresenta un punto di svolta nello studio della geometria proiettiva e ha innumerevoli applicazioni. Ad esempio, è molto utilizzato nel campo della visione artificiale o per il riconoscimento delle immagini (*computer vision*): è uno strumento utile a ricostruire la forma spaziale di un oggetto che vediamo in foto.

Nella figura 4.14 mi sono divertito a «cercare» il teorema nell'architettura del MUSE di Trento, progettato da Renzo Piano, architetto italiano con solide radici culturali nella geometria proiettiva.

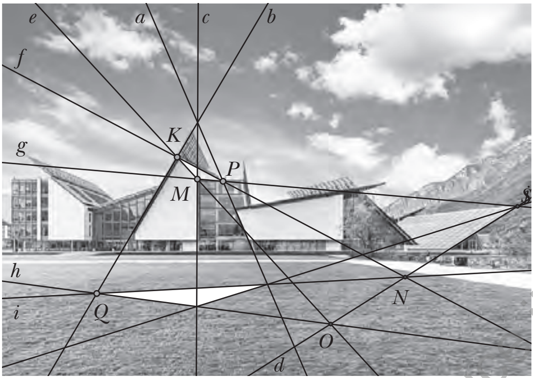


FIG. 4.14.

La geometria algebrica proiettiva

Lo spazio proiettivo n-dimensionale è l'ambiente ideale per immergere e studiare un'importante classe di varietà, le varietà algebriche.

Nello spirito di Cartesio definiamo una *varietà algebrica proiettiva* come un sottoinsieme dello spazio proiettivo che in ogni sistema di coordinate locali $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è dato dai punti le cui coordinate soddisfano un certo numero di equazioni algebriche, ovvero da polinomi. Sono le stesse varietà descritte da Cartesio, curve, superfici..., con l'aggiunta dei loro punti (del loro comportamento) all'infinito.

Una varietà algebrica può avere punti singolari; se li togliamo diventa una varietà nel senso di Riemann.

Se prendiamo una varietà algebrica e vi applichiamo una trasformazione proiettiva otteniamo ancora una varietà definita come luogo di zeri di polinomi; in questo senso la varietà algebrica è un concetto di geometria proiettiva.

Nello spirito del Programma di Erlangen possiamo considerare il seguente *programma di classificazione.*

1. Due varietà algebriche si diranno *proiettivamente equivalenti* se esiste una proiettività che trasforma una nell'altra.

2. Raggruppando le varietà tra loro equivalenti in classi, *quante classi* otteniamo?

3. Tra le varietà di una classe ne esiste una in qualche modo privilegiata che faccia da *modello* per tutte?

4. È possibile associare a una varietà un numero o una proprietà che siano *invarianti per proiettività* e che quindi determinino in quale classe la varietà si colloca?

Descartes e Fermat hanno dimostrato che le curve algebriche di grado 2 sono equivalenti per isometrie del piano a sezioni coniche, curve che si ottengono come intersezione di un piano con un cono. Sono le parabole, le iperboli, le ellissi e, nel caso il piano passi per il vertice, due rette (caso degenere).

Con l'ausilio della figura 4.15 (già proposta nel secondo capitolo) possiamo dimostrare che due coniche non degeneri qualunque sono proiettivamente equivalenti: infatti una è proiezione dell'altra dal vertice del cono, da un piano all'altro.

Tutte le curve algebriche piane di grado 2 non degeneri sono dunque proiettivamente equivalenti.

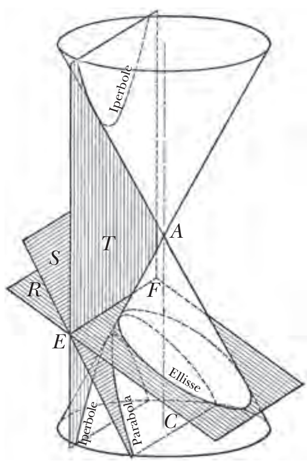


FIG. 4.15.

Newton dimostra un risultato simile per le curve algebriche piane non singolari di grado 3. Per formularlo in termini moderni estendiamo il nostro campo numerico ai numeri complessi.

TEOREMA. Ogni cubica piana non singolare è proiettivamente equivalente a una cubica i cui punti non all'infinito sono descritti da coordinate complesse (z, w) che soddisfano l'equazione algebrica

$$w^2 = z(z-1)(z-c)$$

dove c è un numero complesso. Al variare di c si ottengono infinite cubiche non equivalenti.

Per curve di grado più alto la complessità cresce e il programma diventa difficile da gestire. Se poi consideriamo varietà algebriche di dimensioni maggiori di 1 il programma in questi termini diventa irrealizzabile.

Una possibilità è quella di allargare il gruppo delle trasformazioni, così da ridurre le possibili classi e gli invarianti. Per questo si introduce il concetto di *trasformazione biregolare* e quello di *trasformazione birazionale* tra due varietà algebriche proiettive. Le prime sono trasformazioni che vengono descritte da equazioni polinomiali tra le coordinate. Le seconde sono definite nello stesso modo da polinomi ma non su tutta la varietà bensì solo su un sottoinsieme denso (in linguaggio tecnico si dice su un aperto di Zariski o anche che la trasformazione è definita sui punti generici). La ragione geometrica del non determinare queste trasformazioni (birazionali) in alcuni punti risiede nel fatto che questo è quanto avviene con le proiezioni, che non sono definite nei punti da cui si proietta.

Sostituendo il gruppo delle proiettività con quello più generale delle trasformazioni biregolari o birazionali si entra nell'ambito della *geometria algebrica biregolare e birazionale*, uno dei più fiorenti settori di ricerca contemporanei.

La teoria ha avuto i suoi pionieri nella scuola italiana di geometria di fine '800 e inizio '900: tra questi Veronese, Cremona, Castelnuovo, Enriques, Segre, Fano.

Nella prima metà del secolo scorso si rifonda per opera delle scuole tedesca e francese: definizioni e teoremi della scuola italiana vengono riformulati in maniera più algebrica, per dare maggior certezza ad argomenti che poggiavano troppo sull'intuizione geometrica e a volte potevano essere fallaci. Lo sviluppo delle tecniche algebriche in questo campo raggiunge un acme attorno al 1950 con la Teoria delle singolarità e la Teoria degli schemi, quest'ultima sviluppata dal francese Alexander Grothendieck, scomparso nel 2014, da alcuni considerato il più grande matematico del XX secolo.

Dopo la seconda guerra mondiale entrano in gioco anche in questo campo le scuole russa e americana, che rivaleggiano in un clima da guerra fredda.

Lo sviluppo della geometria algebrica nella seconda metà del '900 è testimoniato dal numero di medaglie Fields assegnate a ricercatori di questo settore: K. Kodaira (1954), A. Grothendieck (1966), H. Hironaka (1970), D. Mumford (1974), S. Mori (1990), M. Kontsevich (1998), C. Birkar (2018). A cui vanno aggiunti quelli che si sono occupati anche di geometria algebrica: J.-P. Serre (1954, a soli 28 anni), M. Atiyah (1966), E. Bombieri (1974), P. Deligne, S.-T. Yau (1982), G. Faltings (1986).

Grothendieck, per protesta contro l'azione militare sovietica nei paesi dell'Europa orientale, non andò a Mosca a ritirare la medaglia.

Per dare un'idea di quanto ad oggi ottenuto in questo enorme programma di classificazione, cominciamo con un'osservazione preliminare. Le varietà algebriche sono definite come luoghi di zeri di polinomi; è bene dunque lavorare su insiemi numerici nei quali questi polinomi ammettono radici. Come già osservato l'insieme corretto è quello dei numeri complessi, un campo che contiene ed estende quello dei numeri reali ed è algebricamente chiuso, ovvero contiene tutte le radici di un polinomio. Poiché ogni numero complesso è della forma $z = x + iy$, con x e y numeri reali, una varietà parametrizzata da n numeri complessi è parametrizzata da $2n$ numeri reali: il passaggio ai complessi duplica la dimensione.

Una curva complessa è dunque una superficie reale. In questo caso vale anche il contrario: Gauss, Riemann, Beltrami scoprono che ogni superficie (varietà riemanniana di dimensione 2, orientata) può essere pensata come una varietà algebrica complessa di dimensione 1. In questo senso oggi le curve algebriche complesse sono chiamate superfici di Riemann.

Il Teorema di uniformizzazione enunciato in un paragrafo precedente si può rileggere come classificazione delle curve algebriche proiettive in tre classi.

TEOREMA. Ogni curva algebrica proiettiva è biregolarmente equivalente a una delle seguenti:
a) lo spazio proiettivo complesso di dimensione 1 (la sfera);
b) una cubica piana (descritta da Newton);
c) una curva ottenuta partendo dalla superficie iperbolica di Beltrami identificando tra loro dei punti (un quoziente finito).

Le curve nella classe *a* si dicono *razionali*, quelle in *b* si dicolo *ellittiche* e infine quelle in *c* si dicono *iperboliche* o *di tipo generale*.

A cavallo tra ’800 e ’900 la scuola italiana affronta e risolve il problema della classificazione delle superfici algebriche proiettive complesse. La teoria viene descritta in un fondamentale scritto di Federigo Enriques dal titolo *Le superfici algebriche*, edito postumo nel 1949.

Quest’opera traccia la strada del successivo sviluppo della geometria algebrica. Oscar Zariski, matematico russo formatosi a Roma con Enriques, Castelnuovo e Severi, emigra nel 1927 negli Stati Uniti e scrive il suo libro su questo tema intitolandolo *Algebraic Surfaces*. Fonda la scuola americana di geometria algebrica, tra i cui obiettivi vi è quello di rendere più algebrica la teoria. In parallelo, con qualche anno di ritardo, il volume di Enriques viene studiato dalla scuola russa nel seminario moscovita condotto da Igor Šafarevič, il padre della moderna scuola di geometria algebrica russa. Nel libro *Basic Algebraic Geometry,* esponendo ed estendendo i risultati degli italiani, prefigura il futuro indirizzo geometrico birazionale della sua scuola.

La classificazione delle superfici è di natura birazionale e si articola ancora in tre classi. L’approccio italiano a questa classificazione è induttivo, studiando le curve sulle superfici e «sollevando» le informazioni dalle curve alle superfici. Per questo introducono il concetto di *divisore* e quello di *divisore canonico*: un divisore è un sottoinsieme della varietà considerata che è esso stesso una varietà, di dimensione 1 in meno. Il divisore canonico è un divisore che descrive intrinsecamente la varietà, contenendo ad esempio molte informazioni sulla sua curvatura.

Nel 1980 Shigefumi Mori, matematico della scuola di Kyoto, ispirandosi alle idee di Enriques e dei suoi successori, struttura il programma di classificazione per varietà algebriche proiettive in termini moderni. Il *Programma dei modelli minimali* (MMP) o *Programma di Mori* consiste in una serie di regole e azioni così schematizzate.

1. Definire cos'è un *modello minimale* di una varietà: geometricamente è una varietà della stessa dimensione di quella di partenza, ottenuta da questa attraverso proiezioni e trasformazioni birazionali, che non può essere ulteriormente proiettata senza subire cambiamenti che alterano sostanzialmente la sua geometria. I modelli minimali sono caratterizzati algebricamente dalla non negatività del divisore canonico.

2. Definire una procedura attraverso la quale si possa determinare se una varietà algebrica proiettiva ammette un modello minimale. In caso negativo dare una descrizione precisa della varietà.

3. Classificare le varietà che ammettono modelli minimali in classi che siano determinate da una scelta del modello. Descrivere i modelli minimali e trovare invarianti numerici birazionali che caratterizzano le varie classi.

4. Descrivere le trasformazioni birazionali che, applicate alle varietà in una classe, producono un corrispondente modello minimale.

Nel 1960 il matematico Heisure Hironaka, giapponese e professore in America, dimostrò che ogni varietà algebrica proiettiva complessa è birazionalmente equivalente a una varietà senza punti singolari; per questo pochi anni dopo vince la Fields Medal. Questo fondamentale risultato, dimostrato nel caso delle superfici da Pasquale Del Pezzo, matematico italiano dell'inizio del '900, permette di limitarci al solo caso delle varietà lisce o con singolarità molto facili da controllare.

Per quanto riguarda il punto 2 Enriques dimostra che le superfici che non ammettono modelli minimi sono le *superfici rigate*, ovvero superfici ricoperte da curve razionali (si noti che questa definizione è più generale di quella data nel terzo capitolo). Queste includono anche le *superfici razionali*, ovvero le superfici birazionali allo spazio proiettivo di dimensione 2. Castelnuovo ed Enriques costruirono anche degli invarianti numerici, chiamati *plurigeneri* e *irregolarità*, che determinano quando una superficie è birazionale a una rigata o a una superficie razionale; sono questi forse i risultati più belli e profondi della scuola italiana.

In dimensione 3 Mori dimostra che le *varietà non unirigate*, non ricoperte da curve razionali, possiedono un modello minimale; per questo introduce una nuova ed efficace trasformazione birazionale che denota con il termine *flip*.

Per le varietà unirigate Mori propone una catalogazione basata su delle varietà di base (come sono gli atomi per gli elementi chimici), studiate oltre cento anni fa da Fano e per questo denominate *varietà di Fano*. Per queste scoperte nel 1990 Mori riceve la Fields Medal.

La prova dell'esistenza di modelli minimi per varietà non unirigate in dimensione superiore ha impegnato moltissimi matematici negli ultimi trent'anni.

Nel 2010 ci riesce un team internazionale formato da Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher Hacon e James McKernan, in un articolo sul «Journal of the American Mathematical Society».

Per questo e altri risultati inerenti al Programma dei modelli minimi, Hacon, di nazionalità britannica, italiana e statunitense, e McKernan, inglese, vincono nel 2018 il Breakthrough Prize. Questo premio di 3 milioni di dollari, noto come l'Oscar delle scoperte scientifiche, è promosso da un'istituzione sponsorizzata tra gli altri da Mark Zuckerberg, il signor Facebook. Nella declaratoria iniziale l'istituto scrive: «La conoscenza è la più grande risorsa dell'umanità. Definisce la nostra natura e disegna il nostro futuro. Il corpo della conoscenza si è costituito nei secoli; ma una singola mente può estenderlo enormemente».

Nell'agosto del 2018 Birkar, di origine curda, rifugiato politico e cittadino britannico, riceve la Fields Medal con la seguente motivazione: «per la prova della limitatezza del numero delle famiglie di varietà di Fano e per i contributi alla realizzazione del Programma dei modelli minimali». Il programma di protezione dei rifugiati politici in Gran Bretagna prevede che il soggetto cambi nome: Caucher Birkar, che in curdo significa «matematico errante», non è dunque il suo nome vero.

I punti 3 e 4 del Programma di Mori sono ancora in buona parte inesplorati. Parecchio è stato fatto nel caso delle superfici, a partire da alcune straordinarie costruzioni di modelli minimi da parte di Enriques (superfici di Enriques e superfici di tipo generale).

Così Guido Castelnuovo in uno scritto del 1928 ricorda i lavori sulle superfici algebriche svolti assieme a Enriques:

per rintracciare la via nell'oscurità in cui ci trovavamo siamo stati condotti a divinare alcune proprietà che dovevano sussistere, con modificazioni opportune, per le superfici (regolari ed irregolari) di ambedue le vetrine; mettevamo poi a cimento queste proprietà con la costruzione di nuovi modelli. Se resistevano alla prova, ne cercavamo, ultima fase, la giustificazione logica. Col detto procedimento, che assomiglia a quello tenuto nelle scienze sperimentali, siamo riusciti a stabilire alcuni caratteri distintivi tra le due famiglie di superficie.

Enriques, nella frase finale del libro, sottolinea la difficoltà incontrata nella classificazione: «le curve algebriche sono opera di Dio, le superfici algebriche del diavolo».

Grandi matematici di tutto il mondo si sono cimentati nello studio di modelli di superfici algebriche. Il francese André Weil ha voluto chiamare alcune superfici scoperte nel corso delle ricerche con la sigla K3, per accomunare la sua impresa alla contemporanea scalata del K2 nel Kashmir.

Kodaira, Mumford e Bombieri hanno esteso lo studio delle superfici su altri campi numerici e costruito molti modelli; la vetrina delle superfici oggi è ampia e decisamente affascinante.

L'esplorazione del mondo delle varietà algebriche di dimensione maggiore a 2 è solo all'inizio; negli ultimi vent'anni si sono studiati modelli minimi di grande bellezza che hanno trovato immediate applicazioni nel campo della fisica.

Tra questi le *varietà di Calabi-Yau*, varietà algebriche di dimensione complessa 3 con divisore canonico nullo. Questa condizione algebrica di piattezza le rendono l'analogo delle curve ellittiche e delle superfici K3.

Fig. 4.16.

La figura 4.16 rappresenta, attraverso una proiezione sul piano, la varietà di Calabi-Yau ottenuta come luogo di zeri di un polinomio di grado 5 in quattro variabili complesse.

Le varietà di Calabi-Yau hanno dimensione reale 6; unite allo spazio 4-dimensionale di Minkowski formano una varietà di dimensione 10. Questo tipo di varietà 10-dimensionale, secondo molti fisici, potrebbe rappresentare la Teoria del tutto, di cui si parla nell'omonimo film su Stephen Hawking. Questa teoria è il traguardo ultimo di un programma che, attraverso poche equazioni, vuole interpretare in maniera unitaria tutte le forze che si manifestano in fisica. Il problema è ancora quello indicato da Riemann: determinare in maniera opportuna la varietà (di Calabi-Yau), le cui *relazioni metriche* stanno *nelle forze vincolanti che agiscono su di essa*.

Dal Programma di Erlangen alla particella di Dio

Nel 1905 Poincaré osserva che in una varietà 4-dimensionale la forma quadratica $c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dy^2$ è preservata dalle trasformazioni del tipo:

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right), \qquad x' = \gamma(x - vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z$$

Queste trasformazioni erano state descritte l'anno precedente dal fisico Hendrik Lorentz, il quale aveva notato a sua volta come non alterassero le equazioni che definiscono i campi elettromagnetici, le equazioni differenziali di Maxwell.

Poincaré propone di chiamare il gruppo generato da queste trasformazioni *gruppo delle trasformazioni di Lorentz*.

La Relatività speciale, nell'ottica del Programma di Erlangen, può essere pensata come lo studio degli oggetti e delle proprietà invarianti di una varietà 4-dimensionale su cui agisce il gruppo di Lorentz. Questo approccio di Poincaré è diverso da quello elaborato da Einstein nello stesso anno; si osservi come nessuno dei due cita il lavoro dell'altro. Fu in ogni caso Poincaré a enunciare per primo nel 1904 il famoso *principio di relatività*, secondo il quale le leggi della fisica sono le stesse (invarianti) sia per un osservatore fisso che per un osservatore che si muove in moto rettilineo uniforme.

Si racconta anche che Einstein in un primo tempo volesse chiamare la Teoria della relatività speciale proprio Teoria degli invarianti e che fu Planck a suggerire il termine, fortunato, di Relatività.

L'introduzione in fisica dello studio degli invarianti per trasformazioni sembra quindi da attribuire a Poincaré. Molti fisici, tra cui il premio Nobel Eugene Wigner, hanno imparato questo programma attraverso i lavori di Emmy Noether (1882-1935). Figlia di un matematico tedesco, Max Noether, diventa presto esponente di spicco della scuola algebrica tedesca. Nel 1915 Klein e Hilbert la invitano a Gottinga per farsi spiegare la Teoria algebrica degli invarianti, da lei sviluppata. A causa delle leggi razziali Noether si sposta poi negli Stati Uniti, con il sostegno anche di Einstein che la definisce la matematica donna più importante della storia.

Noether dimostra un teorema che porta il suo nome e che stabilisce l'esistenza di una legge di conservazione (invariante) in un sistema fisico con simmetrie (differenziabili).

Questo risultato introduce definitivamente il programma o metodo di Klein nella fisica teorica.

In maniera analoga a quanto fatto in geometria possiamo pensare che un sistema fisico sia dato da un ambiente (fisico) e da un gruppo di trasformazioni o simmetrie che i fisici chiamano *gruppo di gauge*, calibro o misura.

In geometria una retta, o più in generale una geodetica, può essere pensata come una traiettoria invariante per isometrie che minimizza la lunghezza. In altre parole è una soluzione di un «problema variazionale» (percorso minimo), invariante per il gruppo delle isometrie. Introducendo strumenti dell'analisi matematica, si vede che le geodetiche sono soluzioni di un'equazione differenziale invariante.

Analogamente, una particella elementare della fisica è una soluzione di un problema variazionale, originato da un problema fisico, invariante per un opportuno gruppo di gauge. Anche in questi casi, con l'uso dell'analisi, la particella si può pensare come soluzione di un'equazione differenziale invariante, che i fisici chiamano lagrangiana. Ad esempio, l'elettrone è soluzione di un problema variazionale nell'ambiente 4-dimensionale spazio-tempo invariante per le trasformazioni del gruppo di Lorentz.

«Rompendo» una simmetria, ovvero allargando il gruppo e aumentando la libertà di simmetria, oppure allargando lo spazio ambiente (come in geometria algebrica con lo spazio proiettivo), si introducono teorie fisiche più ampie.

Un famoso esempio si trova nell'articolo di Peter W. Higgs del 1964: *Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons*. In questo breve lavoro Higgs, allargando il gruppo di gauge ed estendendo lo spazio ambiente, rompe la simmetria del sistema fisico e, grazie a questo, trova una particella elementare (cioè una soluzione di una lagrangiana invariante) che chiama *bosone con massa*, il famoso *bosone di Higgs*.

Cinquant'anni dopo i fisici del CERN, in un fantastico esperimento coordinato dall'italiana Fabiola Gianotti, ottengono evidenze sperimentali dell'esistenza di questo bosone.

La topologia, geometria estrema

Siamo quindi giunti a considerare la geometria come una disciplina che studia un ambiente e i suoi oggetti con riferimento alle loro proprietà invarianti rispetto a un gruppo di trasformazioni. È naturale chiedersi quale possa essere il gruppo di trasformazioni più ampio possibile, oltre al quale non è lecito andare, pena la perdita di rigore e sensatezza.

Porre dei limiti alla mente umana è difficile, si teme di reprimere libertà e fantasia intellettuale; ma a ben riflettere si scopre che sono proprio i limiti, oggettivi o imposti, che stimolano la mente alla creatività e alle scoperte. La scienza si muove lungo i confini del sapere, allo scopo di studiarli e, quando possibile, di superarli e spostarli più in là.

I geometri del XX secolo, dopo aver ben compreso il concetto di trasformazione, sembrano aver concordato che le più generali ammissibili, per ora, siano le *trasformazioni continue*. Sono le trasformazioni dello spazio, o più in generale di una varietà, che lo deformano, allungandolo, accartocciandolo, piegandolo, curvandolo, senza tuttavia né strapparlo né incollarlo. Queste trasformazioni formano un gruppo: l'inverso di un allungamento e una retrazione, che è un allungamento di un fattore negativo.

Strappi e incollamenti non sono ammessi: d'altra parte strappare, ovvero bucare, un pallone da calcio vuol dire renderlo «geometricamente» inutilizzabile.

La *topologia*, dal greco τοποσ (luogo) e λογος (studio), è la geometria che studia gli oggetti e le proprietà di un ambiente, spazio o varietà, che sono invarianti rispetto al gruppo delle trasformazioni continue. L'ambiente, su cui il gruppo agisce, si chiama in questo contesto anche *spazio topologico*, il concetto di spazio più generale oggi in geometria.

Il nome è stato introdotto verso la metà dell'800 ma alcuni risultati di Eulero vengono riconosciuti come i primi risultati fondazionali di topologia.

Nel 1735 Eulero visita la città di Königsberg, importante centro politico e culturale della Germania dove abitava tra l'altro Kant. La città è attraversata da un fiume che forma delle isole collegate da 7 ponti, come nella figura 4.17 che rappresenta la mappa della città nel 1652.


Fig. 4.17.

Gli amministratori comunali gli pongono questo problema: trova un percorso che passi da tutti i ponti una e una sola volta. Problemi di questo tipo sono tipici nelle commissioni comunali che si occupano di viabilità.

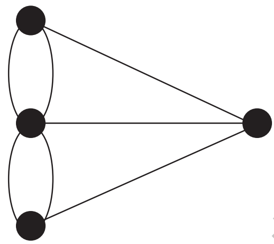


FIG. 4.18.

Eulero semplificò la formulazione del problema trasformando in maniera continua (senza tagli) la cartina in un *grafo*, rappresentato nella figura 4.18: le varie componenti di terra formate dalle divisioni del fiume vengono contratte a dei punti, detti *nodi*. I ponti che li uniscono divengono segmenti, detti *spigoli* o *archi* del grafo. Con questa semplificazione Eulero dà origine sia alla teoria dei grafi che alla topologia.

Osserva quindi che se si entra in un nodo attraverso un ponte se ne deve poi uscire, con le eccezioni dei nodi iniziale e finale. Dunque per poter percorrere i ponti una sola volta bisogna che nel nodo arrivi un numero pari di ponti; questo numero si chiama *grado del nodo*. Questa semplice osservazione dimostra il seguente risultato.

TEOREMA. Un qualsiasi grafo è percorribile passando una sola volta lungo un arco solo se (condizione necessaria) esso ha tutti i nodi, a parte al più due, di grado pari.

Il problema di Königsberg quindi non ammette soluzione: tutti i nodi del grafo hanno grado dispari.

In seguito è stato dimostrato che la condizione è anche sufficiente, ovvero che se un grafo ha al più due nodi di grado dispari lo si può percorrere interamente passando solo una volta lungo ogni arco; per

FIG. 4.19.

farlo è necessario partire da un nodo dispari e terminare nell'altro.

A Eulero è attribuito anche il seguente risultato sui poliedri convessi, come quello nella figura 4.19.

Formula di Eulero. Consideriamo un *poliedro convesso*, ovvero un solido convesso delimitato da un numero finito di facce piane poligonali. Denotati rispettivamente con v, s, f il numero dei vertici, degli spigoli, delle facce, vale la formula $v - s + f = 2$.

Questo è un risultato di tipo topologico, infatti la somma non cambia se trasformo in modo continuo il solido.

Una semplice dimostrazione si ottiene supponendo sia possibile costruire il solido partendo da una sua faccia e aggiungendo via via le altre facce *cucendo* ad ogni passo una faccia nuova *solo lungo spigoli consecutivi* a quelle precedenti.

In questa ipotesi, consideriamo ad ogni passo il numero $\phi = v - s + f - 1$. Al primo passo abbiamo una faccia e lo stesso numero di vertici e spigoli, dunque ϕ vale 0. Nei passi successivi, cucendo una faccia lungo spigoli consecutivi, aggiungiamo una faccia, a spigoli e $a - 1$ vertici, dunque ϕ rimane sempre uguale a 0. All'ultimo passo, cucendo l'ultima faccia per chiudere il solido, aggiungiamo questa faccia e nessuno spigolo o vertice nuovo, dunque ϕ diventa uguale a 1, che è ciò che volevamo.

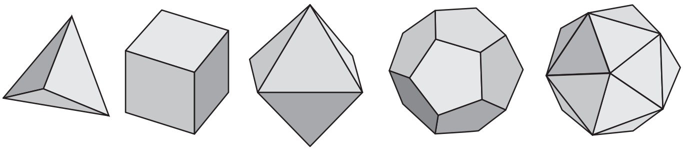


Fig. 4.20.

La formula di Eulero ha numerose applicazioni anche in campi diversi dalla matematica. In geometria ci permette di determinare facilmente i *poliedri regolari*, ovvero i poliedri con facce uguali tra loro e uguali a un poligono regolare e tali che in ogni vertice concorre un ugual numero di facce.

Questi solidi sono noti fin dall'antichità: la scuola greca se ne interessò, negli *Elementi* vengono trattati nel Libro XIII. Poiché Platone li utilizza frequentemente nel *Timeo*, vengono chiamati *solidi platonici*. Questi solidi sono solo cinque; e questo risultato è uno dei migliori in geometria solida della scuola greca. I cinque solidi sono rappresentati nella figura 4.20, con il nome e la corrispondenza con un elemento fondamentale, come indicato nel *Timeo*.

Per provare questo fatto possiamo procedere nel modo seguente: supponiamo che le facce siano triangoli equilateri e che in ogni vertice concorrano x facce. Se denotiamo con f il numero delle facce abbiamo che il numero degli spigoli deve essere $s = (3/2)f$ e quello dei vertici $v = (3/x)f$. La formula ci dice dunque che

$$2 = v - s + f = \left(\frac{3}{x} - \frac{3}{2} + 1\right) f = \frac{6 - x}{2x}\ f$$

Osservando che in un vertice debbono concorrere almeno tre facce, le soluzioni possibili sono le seguenti tre: $x = 3$, $f = 4$; $x = 4$, $f = 8$; $x = 5$, $f = 20$, ovvero il tetraedro, l'ottaedro e l'icosaedro.

Similmente si trovano altri due casi, con facce rispettivamente quadrati e pentagoni; infine, sempre nello stesso modo, si verifica che non è possibile avere facce regolari con più di cinque lati.

Un poliedro convesso può essere «gonfiato», ovvero trasformato in modo continuo, fino a diventare una sfera; questa osservazione, assieme alla dimostrazione appena fatta, ci dice che le tassellature regolari della sfera sono le cinque considerate in precedenza.

Abbiamo parlato di cucire le facce per creare un poliedro, operazione di sartoria, così come quella del taglio di una stoffa. Sono operazioni ben definite anche nell'ambito della topologia, ma portano, per definizione, a un cambiamento delle caratteristiche topologiche dell'oggetto.

Prese due superfici, una loro *somma connessa* consiste nel tagliare un disco in ognuna e cucire poi assieme le due superfici rimaste lungo i bordi dei due dischi. Nella figura 4.21 vediamo la somma connessa di una ciambella con due buchi con una ciambella con un buco, quest'ultima chiamata *toro*.

Se le due superfici sono sufficientemente regolari (ad esempio non sono sconnesse e si possono prendere i dischi in una zona senza punti singolari) la somma connessa è ben definita, ovvero determina una unica superficie a meno di trasformazioni continue.

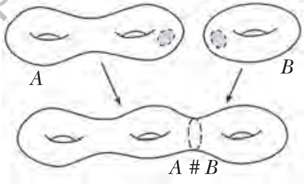


FIG. 4.21.

Si osservi inoltre che la sfera è lo 0, l'elemento neutro, di questa operazione: la somma connessa di una superficie con una sfera lascia la superficie invariata.

L'operazione di somma connessa ci permette di enunciare, ed eventualmente provare, il seguente teorema di classificazione.

TEOREMA. Ogni superficie compatta (ovvero limitata e senza bordo) può essere costruita topologicamente, a meno di trasformazioni continue, a partire da una sfera aggiungendo, con la somma connessa, un certo numero di tori e piani proiettivi.

Le superfici che contengono almeno un piano proiettivo risultano *non orientabili*, un concetto tecnico. Intuitivamente possiamo dire che per una superficie non orientabile non esiste una parte interna e una interna; un esempio è dato dalla famosa bottiglia di Klein raffigurata in copertina.

Le superfici compatte con un orientamento sono tutte topologicamente equivalenti a ciambelle con un certo numero di buchi, che chiameremo *genere* e denoteremo con *g*.

Questo risultato fu provato per la prima volta da Möbius, uno studente di Gauss. La figura 4.21 rappresenta una superficie di genere 3, ottenuta come somma connessa di una di genere 2 con una di genere 1.

Nel 1895 Poincaré pubblica un lavoro dal titolo *Analysis Situs*, considerato oggi il testo fondatore della topologia moderna. Poincaré tra l'altro introduce la definizione di *omeomorfismo*, termine usatissimo oggi in matematica, per dire che due oggetti sono topologicamente equivalenti, ovvero trasformabili uno nell'altro con deformazioni continue. Si pone quindi

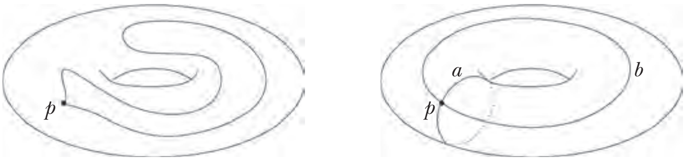


Fig. 4.22.

il problema di determinare condizioni algebriche per studiare le classi di oggetti tra loro omeomorfe, tra cui il concetto di *gruppo fondamentale*. Questo gruppo si costruisce nel modo seguente: si prende un punto su una varietà e si considerano tutte le curve chiuse passanti per esso, ovvero i *cammini chiusi* (sulla varietà) che partono e concludono nel punto. Due cammini sono detti (*omotopicamente*) *equivalenti* se possono essere deformati continuamente uno all'altro, sempre rimanendo sulla varietà.

Nella figura 4.22 sono rappresentati dei cammini su un toro. Nell'immagine a sinistra si vede un cammino che può essere deformato continuamente al cammino nullo; si pensi al cammino come un elastico che possa essere contratto al punto senza doverlo tagliare. Nell'immagine a destra sono rappresentati due cammini che non sono equivalenti al cammino nullo e nemmeno sono equivalenti tra loro: per contrarli al cammino nullo o per portarli uno sull'altro è necessario tagliarli e poi reincollarli, operazioni non continue e dunque non ammissibili.

Gli elementi del gruppo fondamentale sono tutti i cammini chiusi a meno di equivalenza. La somma di due cammini è il cammino che si ottiene percorrendo i due cammini uno dopo l'altro, l'elemento nullo è il cammino che consiste nello stare fermo nel punto.

Il gruppo fondamentale del toro è generato dai due cammini sopra descritti, ovvero ogni altro cammino è equivalente alla somma di un certo numero di questi due cammini.

FIG. 4.23.

Poincaré osserva che il gruppo fondamentale è un invariante topologico, ovvero due varietà (della stessa dimensione) omeomorfe tra loro hanno lo stesso gruppo fondamentale. Si chiede quindi quando vale il contrario.

Nel caso delle superfici compatte il gruppo fondamentale determina il tipo topologico; questo segue facilmente dal teorema di classificazione sopra enunciato. In particolare la sfera è l'unica superficie chiusa, a meno di omeomorfismo, con gruppo fondamentale nullo; è per altro abbastanza facile dimostrare, anche con l'aiuto della figura 4.23, che ogni cammino chiuso sulla sfera può essere deformato al cammino nullo.

In generale, in dimensione superiore, il gruppo fondamentale non determina la classe di omeomorfismo della varietà; per questo sono stati introdotti altri invarianti algebrici, come ad esempio i gruppi di omotopia di ordine più alto.

Nel 1904 Poincaré si chiede se il gruppo fondamentale fosse sufficiente nel caso dell'(iper)sfera di dimensione 3; la sua questione viene oggi formulata nel modo seguente.

Congettura di Poincaré. Una varietà compatta (limitata e senza bordo) di dimensione 3 con gruppo fondamentale banale (ogni cammino è equivalente al cammino nullo) è omeomorfa alla sfera 3-dimensionale.

La *sfera n-dimensionale* è una varietà che può essere descritta come il luogo dei punti nello spazio euclideo $(n + 1)$-dimensionale di coordinate $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ che soddisfano l'equazione polinomiale $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$.

Poincaré era convinto di saper dimostrare la congettura; disse che non voleva farlo perché questo gli avrebbe richiesto molto tempo e di conseguenza non avrebbe potuto lavorare su altri progetti. Da allora è stata la questione più importante in topologia e forse in tutta la geometria; molti ricercatori hanno proposto soluzioni che si sono poi rivelate errate.

Nella seconda metà del secolo scorso si scopre che l'analoga congettura per sfere di dimensione maggiore di 3 è più facile da trattare, se pur con qualche ipotesi aggiuntiva, altrimenti vi sono dei controesempi. Stephen Smale la dimostra nel caso $n \geq 5$ e, vent'anni dopo, Michael Freedman nel caso $n = 4$; entrambi ricevono per questo la Fields Medal, rispettivamente nel 1966 e nel 1986.

Nel 1983 William Thurston, vincitore della Fields Medal nel 1982, lancia un programma per una classificazione delle varietà compatte orientabili 3-dimensionali simile a quello per le superfici. Più specificamente ritiene che ognuna di queste varietà possa essere decomposta, tagliandola lungo sfere 2-dimensionali o tori, in un numero finito di pezzi, ognuno omeomorfo a uno di otto possibili modelli. L'ottava classe risulta essere la più difficile da trattare, formata da varietà con curvatura costante, per la cui comprensione è necessario provare una congettura leggermente più generale di quella di Poincaré (*congettura di geometrizzazione di Thurston*).

Quasi cento anni dopo la formulazione della congettura di Poincaré il matematico russo Grigorij Perelman propone, in due lavori, rispettivamente nel 2002 e nel 2003, una soluzione positiva alla congettura. In questi lavori Perelman prova anche la più generale congettura di Thurston. Nel sommario del primo scrive:

> verifichiamo anche alcune asserzioni collegate al programma di Richard Hamilton per la prova della congettura di Thurston sulla geometrizzazione delle varietà tridimensionali chiuse, diamo uno schizzo di una prova eclettica di questa congettura [*give a sketch of an ecletctic proof of this conjecture*], con l'utilizzo di risultati precedenti sul collassamento in caso di curvatura locale limitata dal basso.

La prova si svolge su una varietà di dimensione infinita i cui punti sono varietà riemanniane con data curvatura di Ricci. Un fondamentale passo avanti nella soluzione viene inizialmente fatto da Hamilton che propone un metodo per deformare una varietà riemanniana con curvatura di Ricci positiva in una varietà a curvatura costante; questa deformazione avviene lungo una traiettoria, detta *flusso di Ricci*, che è data come soluzione di un'equazione differenziale. L'equazione è molto simile all'equazione differenziale del calore, che descrive come il calore si diffonde in un solido.

Hamilton e altri si scontrano con un problema molto serio: questi flussi di Ricci passano per punti singolari della varietà ambiente e le usuali tecniche di soluzione per le equazioni differenziali non funzionano nei punti singolari.

Perelman supera questo problema con l'uso dell'analisi matematica su varietà con singolarità sviluppata alla fine del '900 dalla scuola russa.

Perelman non ha mai pubblicato i manoscritti con la soluzione della congettura di Poincaré su una rivista ufficiale di matematica: sono «affissi» in rete nel sito di pre-pubblicazioni scientifiche ArXiv: https://arxiv.org/abs/math/0211159 e https://arxiv.org/abs/math/0307245. Sono consultabili da tutti e gratuitamente.

Nel primo lavoro Perelman specifica che la ricerca è stata supportata da risparmi personali sui salari avuti come *visiting professor* presso diverse istituzioni scientifiche americane.

Passeranno dei mesi dopo l'affissione del lavoro prima che la comunità matematica mondiale decida di prendere sul serio questo tentativo. Scienziati di grande esperienza si impegnano per alcuni anni nello studio dei risultati contenuti nei due lavori; tra questi Gang Tian e John Morgan ripercorrono tutta la dimostrazione e la rendono più accessibile alla comunità matematica, sia attraverso una serie di seminari in tutto il mondo sia con la pubblicazione di un libro. Nel 2004 Tian, al ritorno da una conferenza di due settimane a Princeton dedicata al lavoro di Perelman, così gli scrive: «penso che abbiamo capito l'intero lavoro, *it is all right*».

In una nota a margine Perelman osserva che vi è

una relazione tra la fisica statistica e la geometria pseudo-riemanniana, come si vede nel campo della termodinamica dei buchi neri, sviluppata da Hawking e altri. Sfortunatamente questo campo di ricerca si colloca fuori dalla mia comprensione, al momento.

I risultati di Perelman sono ora molto usati dalla fisica teorica indirizzata alla ricerca della forma dell'universo.

Nel 2006 a Perelman viene assegnata la Fields Medal: «per i suoi contributi alla geometria e la sua visione rivoluzionaria della struttura analitica e geometrica del flusso di Ricci».

Il matematico russo rinuncia alla medaglia, spiegando che

> è totalmente irrilevante per lui e che chiunque può capire che se la prova è corretta nessun altro riconoscimento è necessario.

Aggiunge poi:

> fino a che non ero famoso potevo avere la scelta di fare cose disgustose [qui si riferisce a comportamenti non integerrimi della comunità scientifica] o di non farle ed essere trattato come un animale domestico. Diventando famoso non posso fare l'animale domestico e stare zitto, ecco perché rinuncio.

Le università più prestigiose del mondo gli offrono cattedre con lauti stipendi; lui non accetta alcuna offerta e anzi si licenzia dall'Istituto Steklov di San Pietroburgo, dove peraltro percepiva un salario di poche centinaia di euro al mese. Si allontana dalla comunità scientifica e dichiara di non considerarsi più un matematico professionista.

Perelman è, a mio avviso, lo scienziato contemporaneo di gran lunga più affascinante, sia per la grandiosità delle scoperte sia per la semplicità paradossale con la quale conduce la sua vita nella società e nella comunità scientifica. A prima vista appare come un eccentrico e integerrimo Don Chisciotte della matematica, a ben vedere non si possono non condividere molte sue posizioni e ammirare il coraggio e la determinazione con cui le difende.

Nel 2006 due giornalisti americani, Sylvia Nasar e David Gruber, pubblicano sul «New Yorker», il supplemento domenicale del «New York Times», un lungo articolo sulla sua vicenda, che vale la pena leggere: https://www.newyorker.com/magazine/2006/08/28/manifold-destiny.

I problemi del millennio

Il Clay Mathematics Institute di Cambridge, Massachusetts (http://www.claymath.org/), è un istituto finanziato da Landon T. Clay, uomo d'affari americano nel venture capital scientifico e mecenate che «crede nel sapere matematico e nella sua centralità nel progresso umano, nella cultura e nella vita intellettuale».

Il 24 maggio 2000 l'Istituto bandisce sette premi, ognuno del valore di 1 milione di dollari,

> concepiti per certificare i più difficili problemi affrontati dai matematici alla fine del secondo millennio; aumentare la consapevolezza dell'opinione pubblica che la frontiera in matematica è ancora aperta e che in essa vi sono importanti problemi irrisolti; sottolineare ed enfatizzare l'importanza di lavorare per la soluzione dei problemi più profondi e difficili; riconoscere i risultati in matematica che hanno portata storica.

I premi sono legati alla soluzione di sette problemi, scelti e descritti da un comitato scientifico formato dai più autorevoli matematici in circolazione (http://www.claymath.org/millennium-problems). Uno di questi è la congettura di Poincaré.

Il 18 marzo 2010 l'Istituto Clay assegna uno dei premi per la soluzione della congettura di Poincaré a Perelman; la motivazione si conclude affermando che «siamo di fronte a uno dei più grandi passi avanti della matematica. Le sue idee e i suoi metodi hanno già trovato nuove applicazioni in analisi e in geometria; certamente nel futuro ce ne saranno molte altre».

Nel luglio 2010 Perelman rinuncia al premio, sostenendo che il suo contributo non è più importante di quello di Hamilton e in generale criticando le organizzazioni della comunità matematica e le loro decisioni. Al riguardo è da segnalare la forte ostilità di Shing-Tung Yau, Fields Medal nel 1982, nei confronti del lavoro di Perelman e un suo maldestro tentativo di attribuire i meriti della soluzione ad alcuni matematici cinesi a lui legati. Questo episodio è uno dei segnali della lotta in corso nel mondo per la leadership nel campo della ricerca scientifica.

Ad oggi la congettura di Poincaré è l'unico dei setti problemi del millennio risolto. Il più noto è probabilmente la *congettura di Riemann*, problema di analisi matematica e teoria dei numeri inserito da Hilbert all'inizio del '900 in una lista di 23 problemi che a suo dire i matematici avrebbero dovuto risolvere nello scorso secolo. Alcuni di questi sono stati risolti, altri dichiarati troppo generici, tre sono ancora aperti e tra questi la congettura di Riemann; l'Istituto Clay, nel bandire i premi, si è sicuramente ispirato all'idea di Hilbert.

La possibilità per uno studioso di geometria di guadagnare 1 milione di dollari non è svanita con la soluzione di Perelman. Tra i problemi irrisolti ve n'è infatti ancora uno in geometria, la *congettura di Hodge* (http://www.claymath.org/millennium-problems/hodge-conjecture).

William Hodge era un matematico inglese che, dopo aver studiato a Cambridge, passò un lungo periodo nelle università della *East Coast* degli Stati Uniti, tra le quali Princeton e la Johns Hopkins di Baltimora, per perfezionarsi con Solomon Lefschetz e Oscar Zariski. Questi due matematici furono i fondatori della scuola americana rispettivamente di topologia, analisi complessa e geometria algebrica; il loro lavoro risultò cruciale per affermare la leadership degli Stati Uniti in campo scientifico e tecnologico nella seconda metà del '900.

Hodge elaborò una linea di ricerca nello studio delle varietà algebriche che consisteva nell'utilizzo di strumenti di analisi complessa e topologia molto avanzati.

L'approccio iniziale di Poincaré di associare strutture algebriche a varietà topologiche, ad esempio il gruppo fondamentale, si era affermato come metodo generale e aveva dato origine a quella disciplina che oggi chiamiamo *topologia algebrica*. Considerando non solo curve ma sottovarietà topologiche di ogni dimensione, prese a meno di equivalenza topologica (più precisamente a meno di *equivalenza omologica*), si arriva ad associare a una varietà altri gruppi detti *gruppi di omologia* e i loro duali detti *gruppi di co-omologia*.

Si studiano quindi le condizioni sotto le quali questi gruppi determinano la varietà su cui sono definiti. Questo è un modo concreto per studiare le varietà di una data dimensione attraverso lo studio delle sue sottovarietà di dimensione più bassa; un approccio induttivo, partendo quindi dai punti, come Euclide, passando poi alle curve, alle superfici e via dicendo, con sempre maggiori difficoltà tecniche, a varietà di dimensione qualunque.

Hodge concentra la sua ricerca sulla struttura dei gruppi di co-omologia delle varietà algebriche definite sul campo dei numeri complessi, di cui abbiamo parlato in precedenza. Osserva come in questo caso le proprietà algebriche dei numeri complessi, la loro speciale moltiplicazione e l'operazione di coniugio, si sollevano a proprietà simili sui gruppi di co-omologia. Inoltre molti degli elementi di questi gruppi possono essere determinati da speciali equazioni differenziali sul campo dei complessi; tra questi particolare rilevanza hanno le così dette *classi di Hodge*.

In una varietà algebrica gli elementi più naturali dei gruppi di co-omologia sono gli elementi definiti da sottovarietà a loro volta algebriche, ovvero definite come zeri di polinomi; questi elementi vengono chiamati *cicli algebrici*.

Nel 1950 Hodge fu uno dei relatori principali dell'International Congress of Mathematicians, che si tenne a Cambridge, Massachusetts. Si tratta del più importante convegno in matematica, organizzato ogni quattro anni dall'Unione matematica internazionale, nel quale vengono assegnate anche le Fields Medals.

La sua relazione ha un forte impatto sugli studi successivi in geometria algebrica; in particolare l'importanza delle classi di Hodge per la classificazione delle varietà algebriche, compatte e lisce, viene universalmente riconosciuta.

In quell'occasione Hodge espone una sua convinzione che non è però in grado di provare.

Congettura di Hodge. In una varietà algebrica complessa definita in uno spazio proiettivo ogni ciclo di Hodge è omologo a una combinazione a coefficienti razionali di cicli algebrici.

Hodge propose una versione più forte di questa congettura, che risultò falsa, ovvero che ogni ciclo di Hodge fosse algebrico.

L'ipotesi che la varietà sia algebrica e in uno spazio proiettivo è necessaria: questo è stato dimostrato recentemente, con un controesempio, dalla matematica francese Claire Voisin.

La congettura è nei progetti di ricerca di molti matematici, alcuni cercano una prova, altri invece un controesempio. In entrambi i casi al «vincitore» spetterà il premio di 1 milione di dollari, ma soprattutto la fama e l'onore spettanti a chi ha risolto uno dei più difficili problemi della geometria moderna.

Bibliografia essenziale

Bibliografia essenziale

Archimede, *Opere*, a cura di A. Frajese, Torino, UTET, 1974.

– *Opere*, a cura di E.J. Dijksterhuis, Firenze, Mondadori, 1989.

E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*, in «Giornale di Matematiche», vol. VI, 1868, pp. 284-322.

Cartesio, *Opere scientifiche*, a cura di E. Lojacono, Torino, UTET, 1983.

– *Vita e Opere*, a cura di E. Garin, Roma-Bari, Laterza, 2014.

H. Clemens e M. Clemens, *Geometry for the Classroom*, New York, Springer, 1991.

V. De Risi, *Leibniz on the Parallel Postulate and the Foundations of Geometry*, Basel-Boston, Birkhäuser, 2015.

M.P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Mineola-New York, Dover Publications, 2016.

F. Enriques, voci *Curve* e *Superfici* della *Enciclopedia Italiana di Scienze, Lettere ed Arti*, Roma, Istituto Treccani, 1925 ss.

Euclide, *Tutte le opere*, a cura di F. Acerbi, Milano, Bompiani, 2014.

P. Fermat, *Osservazioni su Diofanto*, trad. it. M. Michetti, Torino, Boringhieri, 1959.

G. Galilei, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica ed i movimenti locali*, Torino, Einaudi, 1990.

C.F. Gauss, *Disquistiones generales circa superficies curvas*, Göttingen, Typis Dieterichianis, 1828.

F. Klein, *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche contemporanee*, traduzione del Programma di

Erlangen di G. Fano, in «Annali di Matematica Pura ed Applicata», vol. 17, n. 1, 1889, pp. 307-343.

W. Leibniz, *The Oxford Handbook of Leibniz*, a cura di M.R. Antognazza, parte III: *Mathematics*, a cura di V. De Risi, Oxford, Oxford University Press, 2018.

Platone, *Menone*, Roma-Bari, Laterza, 1997.

H. Poincaré, *Analysis Situ*, in «Journal de l'École Polytechnique», 2, 1, 1895, pp. 1-123.

B. Riemann, *The Mathematical Papers of Georg Friedrich Bernhard Riemann*, http://www.emis.de/classics/Riemann/.

– *Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria e altri scritti*, a cura di R. Pettoello, Torino, Bollati Boringhieri, 1994.

E. Sernesi, *Geometria 1*, Torino, Bollati Boringhieri, 2000.

J. Stillwell, *The Four Pillars of Geometry*, New York, Springer, 2005.

– *Mathematics and Its History. Undergraduate Text in Mathematics*, New York, Springer, 2010.

Indice dei nomi

Indice dei nomi

Finito di stampare nel febbraio 2019
presso la Tipografia Casma, Bologna

Stampato su carta Arcoprint Milk di Fedrigoni S.p.A.
prodotta nel pieno rispetto del patrimonio boschivo

DTP: Liligraf sas, San Lazzaro di Savena (Bo), www.liligraf.it

Intersezioni

ultimi volumi pubblicati:

462. Vincenzo Barone e Giulio Giorello, *La matematica della natura*
463. Eugenio Lecaldano, *Sul senso della vita*
464. Massimo Cacciari e Paolo Prodi, *Occidente senza utopie*
465. Fabio Paglieri, *La cura della ragione. Esercizi per allenare il pensiero*
466. Paolo Legrenzi e Carlo Umiltà C., *Una cosa alla volta. Le regole dell'attenzione*
467. Paolo de Bernardis, *Solo un miliardo di anni?. Viaggio al termine dell'universo*
468. Claudio Bartocci, Piero Martin, Andrea Tagliapietra, *Zerologia. Sullo zero, il vuoto e il nulla*
469. Franco Cardini, *Samarcanda. Un sogno color turchese*
470. Simon Critchley, *Bowie*
471. Alessandro Vanoli, *L'ignoto davanti a noi. Sognare terre lontane*
472. Laura Catastini, *Noi e la matematica. Un divertimento a ostacoli*
473. Angela Vettese, *Venezia vive. Dal presente al futuro e viceversa*
474. Pietro Trifone, *Pocoinchiostro. Storia dell'italiano comune*
475. Claudio Cuccia, *Le parole del cuore. Glossario semiserio su un organo quasi perfetto*
476. Gabriele Lolli, *Ambiguità. Un viaggio fra letteratura e matematica*
477. Fabio Isman, *L'Italia dell'arte venduta. Collezioni disperse, capolavori fuggiti*
478. Grazia Attili, *Il cervello in amore. Le donne e gli uomini ai tempi delle neuroscienze*
479. Attilio Brilli, *Quando viaggiare era un'arte*
480. Attilio Brilli, *In viaggio con Leopardi*
481. Maria Serena Mazzi, *Donne in fuga. Vite ribelli nel Medioevo*
482. Anna Vanzan, *Diario persiano. Viaggio sentimentale in Iran*
483. Giorgio Manzi, *Ultime notizie sull'evoluzione umana*
484. Marco Pivato e Stefano Pivato, *I comunisti sulla Luna. L'ultimo mito della Rivoluzione russa*
485. Claudio Giunta, *E se non fosse la buona battaglia? Sul futuro dell'istruzione umanistica*
486. Remo Bodei, *Le forme del bello*
487. Emanuele Felice, *Storia economica della felicità*

488. Piero Boitani, *Dieci lezioni sui classici*
489. Franco Cardini e Alessandro Vanoli, *La via della seta. Una storia millenaria tra Oriente e Occidente*
490. Giovanni Brizzi, *Ribelli contro Roma. Gli schiavi, Spartaco, l'altra Italia*
491. Franco Brevini, *Simboli della montagna*
492. Guido Barbujani e Andrea Brunelli, *Il giro del mondo in sei milioni di anni*
493. Gabriele Lolli, *Matematica come narrazione*
494. Gabriella Turnaturi, *Non resta che l'amore. Paesaggi sentimentali italiani*
495. Jan Assmann, *Verso l'unico dio. Da Ekhnaton a Mosè*
496. Roberto Escobar, *Il buono del mondo. Le ragioni della solidarietà*
497. Giovanni Destro Bisol e Marco Capocasa, *Intervista impossibile al DNA. Storia di scienza e umanità*
498. Claudio Ferlan, *Sbornie sacre, sbornie profane. L'ubriachezza dal Vecchio al Nuovo Mondo*
499. Enzo Bianchi, *La vita e i giorni. Sulla vecchiaia*
500. Vittorio Coletti, *L'italiano scomparso. Grammatica della lingua che non c'è più*
501. Attilio Brilli, *Gli ultimi viaggiatori. Nell'Italia del Novecento*
502. Stefano Massini, *55 giorni. L'Italia senza Moro*
503. Elizabeth Leake, *Tex Willer. Un cowboy nell'Italia del dopoguerra*
504. Laura Catastini e Franco Ghione, *Geometrie senza limiti. I mondi non euclidei*
505. Emanuele Coccia, *La vita delle piante. Metafisica della mescolanza*
506. Marta Boneschi, *Il comune senso del pudore*
507. Umberto Bottazzini, *Infinito*
508. Vittorio Emiliani, *Roma capitale malamata*
509. Maria Serena Mazzi, *La mala vita. Donne pubbliche nel Medioevo*
510. Luca Amendola, *L'altra faccia dell'universo. I segreti della materia e dell'energia oscura*
511. Paolo Legrenzi e Carlo Umiltà, *Molti inconsci per un cervello. Perché crediamo di sapere quello che non sappiamo*
512. Paolo Macry, *Napoli. Nostalgia di domani*
513. Alessandro Vanoli, *Inverno. Il racconto dell'attesa*
514. Franco Cardini, *Andalusia. Viaggio nella terra della luce*
515. Gianfranco Pacchioni, *L'ultimo Sapiens. Viaggio al termine della nostra specie*
516. Giuseppe Cambiano, *Sette ragioni per amare la filosofia*
517. Ettore Perozzi, *La luna nuova. Tra mito e scienza dalle eclissi alle basi lunari*
518. Marco Andreatta, *La forma delle cose. L'alfabeto della geometria*