

Geometria A
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI TRENTO
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA
A.A. 2024/2025
Provetta - 4 Giugno 2025

Esercizio 1.

Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo tridimensionale di origine O rispetto al prodotto scalare standard, dotato della base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Si considerino poi il punto $P = (1, 1, 1)$ e la retta $r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases}$.

- (1) Si determini l'equazione del piano Π passante per P e perpendicolare a r .
- (2) Si scriva una base ortonormale della giacitura di Π .

(3) Definito $\Pi' : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = -2 + t - s \\ z = 5 - t + s \end{cases}$, si trovi l'angolo compreso tra Π e Π' .

- (4) Si trovi tra i piani paralleli a Π quelli che distano $\sqrt{2}$ dal punto $Q = (1, 1, 0)$.

Esercizio 2.

Sia $C_{a,b} \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ il fascio di curve algebriche dato dall'equazione

$$f_{a,b}(x, y) : y^3 - 3(a - 2)x^2 + (b - 1)x^2y = 0$$

con $a, b \in \mathbb{C}$.

- (1) Trovare i valori di $a, b \in \mathbb{C}$ per i quali la retta all'infinito è tangente alla chiusura proiettiva $\bar{C}_{a,b} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Studiare, per i suddetti valori, i casi in cui il punto di tangenza risulti singolare per $\bar{C}_{a,b}$.
- (2) Trovare i valori di $a, b \in \mathbb{C}$ per i quali la curva $C_{a,b}$ passi per il punto $P = (1, 1)$ con tangente la retta di equazione $x + y - 2 = 0$.
- (3) Studiare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui la curva ammette un unico punto di flesso reale.

Soluzione 1:

- (1) Dalla condizione di perpendicolarità, risulta che la normale $\mathbf{n}$ al piano Π coinciderà con la direzione della retta, data dai coefficienti di t . Si ottiene quindi $\mathbf{n} = (-1, 2, 1)$. Sostituendone le componenti nel generico piano $ax + by + cz + d = 0$ otteniamo

$$\Pi_d : -x + 2y + z + d = 0$$

Ora resta solo da imporre il passaggio per il punto P per esplicitare d . Risulta:

$$-1 + 2 + 1 + d = 0 \iff d = -2$$

e otteniamo finalmente

$$\Pi : -x + 2y + z - 2 = 0$$

- (2) Per ottenere una base della giacitura di Π , conviene anzitutto convertire l'equazione del piano appena trovata da cartesiana a parametrica. Posti $y = t$, $z = s$ si ottiene:

$$\Pi : \begin{cases} x = -2 + 2t + s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

La giacitura di Π è data dai vettori delle componenti di t ed s , ottenendo quindi la coppia di vettori di giacitura data da $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$.

Trovata la base per la giacitura, rimane da rendere la stessa ortonormale. Procediamo col metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Results:

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (2, 1, 0)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle} \mathbf{w}_1 = (1, 0, 1) - \frac{2}{5} \cdot (2, 1, 0) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1\right)$$

Per semplicità, liberiamoci delle frazioni sostituendo $\mathbf{w}_2$ con $5 \cdot \mathbf{w}_2 = (1, -2, 5)$.

Resta solo da normalizzare i vettori, dividendoli ciascuno per la propria norma.

Si ha $\|\mathbf{w}_1\| = \sqrt{4 + 1 + 0} = \sqrt{5}$, $\|\mathbf{w}_2\| = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$.

Otteniamo quindi

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0) \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, -2, 5)$$

- (3) Per definizione, l'angolo tra due piani è dato dall'angolo tra le loro normali. Avendo ottenuto al punto precedente $\mathbf{n} = (-1, 2, 1)$ normale a Π , per ottenere la normale $\mathbf{n}'$ a Π' o convertiamo l'equazione del piano in cartesiana e ripetiamo in maniera analoga come sopra, oppure calcoliamo il prodotto vettoriale tra i vettori della sua giacitura. Si ha

$$\mathbf{n}' = (1, 1, -1) \wedge (1, -1, 1) = (0, -2, -2)$$

Dove i vettori moltiplicati sono ovviamente dati dai coefficienti di t ed s nell'equazione parametrica di Π' . Si ha che

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'}{\|\mathbf{n}\| \cdot \|\mathbf{n}'\|} = \frac{-6}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Per cui $\theta = \frac{5}{6}\pi$.

- (4) I piani paralleli a Π saranno tutti quelli che mantengono gli stessi vettori direzione, ossia tutti quelli dati dall'equazione cartesiana del fascio di piani $\Psi_k : -x + 2y + z = k$ per $k \in \mathbb{R}$. Applicando la formula generale

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

per la distanza di un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ da un piano si ha:

$$\frac{|-1 + 2 + k|}{\sqrt{6}} = \sqrt{2} \iff |1 + k| = \sqrt{12} \iff k = -1 \pm \sqrt{12}.$$

Sostituendo nell'equazione i valori di k troviamo i piani richiesti.

Soluzione 2:

- (1) Per prima cosa identifichiamo lo spazio affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ di coordinate (x, y) con l'aperto affine $U_0 = \{[1, x, y]\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tramite la mappa

$$j_0 : \mathbb{A}^2(\mathbb{C}) \rightarrow U_0$$

definita da $j_0(x, y) = [1, x, y]$. Consideriamo quindi la chiusura proiettiva $\bar{C}_{a,b} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ della curva C . Omogeneizzando l'equazione della curva rispetto alla nuova variabile x_0 otteniamo l'equazione di $\bar{C}_{a,b}$:

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_2^3 - 3(a-2)x_0x_1^2 + (b-1)x_1^2x_2 = 0$$

La retta all'infinito è descritta dall'equazione

$$L : x_0 = 0$$

. Posto quindi $Q = [0, x_1(Q), x_2(Q)]$ un punto, la retta r_Q tangente alla chiusura proiettiva in Q sarà data dall'equazione

$$r_Q : \frac{\partial F}{\partial x_0}(Q) \cdot x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(Q) \cdot x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(Q) \cdot x_2$$

Affinché la retta all'infinito L sia tangente in Q dobbiamo imporre $r_Q = L$, ossia

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(Q) = 0 \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(Q) = 0$$

Ci riduciamo pertanto a risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ F(x_0, x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_2^3 - 3(a-2)x_0x_1^2 + (b-1)x_1^2x_2 = 0 \\ -6(a-2)x_0x_1 + 2(b-1)x_1x_2 = 0 \\ 3x_2^2 + (b-1)x_1^2 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo $x_0 = 0$ nella terza equazione otteniamo la condizione

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2) = 2(b-1)x_1x_2 = 0$$

da cui segue o $b \neq 1$ e $x_1 = 0 \vee x_2 = 0$, o $b = 1$. Distinguiamo pertanto 3 casi:

- $x_0 = x_1 = 0$. Allora dalla quarta equazione risulta anche $x_2 = 0$, soluzione non accettabile.
- $x_0 = x_2 = 0$. Analogamente a sopra, dalla quarta equazione risulta $x_1 = 0$ non accettabile.
- $x_0 = 0, b = 1$. Allora la quarta equazione comporta $x_2 = 0$. Siccome tutte le altre equazioni risultano soddisfatte, otteniamo il punto $Q = [0, 1, 0]$.

Nota che

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(Q) = -3(a - 2) = 0 \iff a = 2$$

Abbiamo pertanto che la retta all'infinito L è tangente alla curva proiettiva solo per $b = 1$ e $a \neq 2$, in quanto se $a = 2$ il punto risulta singolare con tangente principale $x_2 = 0$.

- (2) La curva $C_{a,b}$ passa per il punto $P = (1, 1)$ se il polinomio $y^3 - 3(a - 2)x^2 + (b - 1)x^2y$ valutato in P è nullo. Imponendo questa condizione, otteniamo

$$f_{a,b}(1, 1) = 0 \iff b - 3a + 6 = 0$$

In più, la direzione data dalla retta tangente a $C_{a,b}$ in P è definita dal vettore $(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1))$. Poiché abbiamo già che la retta passa per il punto $P = (1, 1)$, basta imporre la proporzionalità delle due direzioni (quella della retta data e quella della tangente alla curva nel punto) per avere l'uguaglianza.

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6(a - 2)x + 2(b - 1)xy \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + (b - 1)x^2$$

Valutandole nel punto P otteniamo il vettore $(-6a + 10 + 2b, b + 2)$. Imponendo ora la proporzionalità delle direzioni otteniamo

$$\det \begin{pmatrix} -6a + 10 + 2b & 1 \\ b + 2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Che fornisce la condizione $-6a + b + 8 = 0$. Possiamo infine mettere a sistema la condizione appena ottenuta con quella di passaggio della curva nel punto ottenuta all'inizio, per ottenere

$$\begin{cases} -3a + b + 6 = 0 \\ -6a + b + 8 = 0 \end{cases} \rightarrow a = \frac{2}{3}, \quad b = -4$$

- (3) Per studiare i punti di flesso, procediamo anzitutto col calcolo dell'Hessiana della curva. Si ha

$$H(F_{a,b}) = \begin{pmatrix} 0 & 6(a - 2) & 0 \\ 6(a - 2)x_1 & 6(a - 2)x_0 + 2(b - 1)x_0 & 2(b - 1)x_1 \\ 0 & 2(b - 1)x_2 & 6x_2 \end{pmatrix}$$

Sviluppando lungo la prima colonna, otteniamo $\det(H(F_{a,b})) = 6^3(a - 2)^2x_1^2x_2$. I punti di flesso sono quindi dati dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} \det(H(F_{a,b}(x_0, x_1, x_2))) = 0 \\ F_{a,b}(x_0, x_1, x_2) = 0 \\ \nabla F_{a,b}(x_0, x_1, x_2) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6^3(a - 2)^2x_1^2x_2 = 0 \\ x_2^3 - 3(a - 2)x_0x_1^2 + (b - 1)x_1^2x_2 = 0 \\ \nabla F_{a,b}(x_0, x_1, x_2) \neq 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione possiamo cominciare a distinguere diversi casi:

- **$a = 2$.** In tal caso la prima equazione risulta ovviamente soddisfatta. La seconda equazione risulta $x_2^3 + (b-1)x_1^2x_2 = x_2(x_2^2 + (b-1)x_1^2) = 0$. Distinguiamo subito due sottocasi:
 - $b \neq 1$. In questo caso abbiamo che la curva è riducibile nel prodotto delle rette $x_2 = 0$, $x_2 = \pm x_1\sqrt{1-b}$. Siccome la curva è riducibile, avendo come intersezione tra le tre componenti solo punti singolari, la curva non ha punti di flesso.
 - $b = 1$. Risulta $F(x_0, x_1, x_2) : x_2^3 = 0$ che è ovviamente una curva singolare che non ammette punti di flesso.
- **$a \neq 2$.** Abbiamo che la prima equazione è annullata solo per l'annullamento di una tra x_1 e x_2 . Distinguiamo:
 - $x_1 = 0$. Allora dalla seconda equazione torniamo a $x_2^3 = 0$ e otteniamo come unico punto $[1, 0, 0]$ che non è un punto di flesso in quanto singolare.
 - $x_2 = 0$. In questo caso la seconda equazione risulta $-3(a-2)x_0x_1^2 = 0$. Se imponiamo $x_1 = 0$ otteniamo lo stesso punto del caso precedente, ma posto $x_0 = 0$ otteniamo il punto $P : [0, 1, 0]$ che è un punto di flesso in quanto non annulla la derivata rispetto a x_0 del gradiente, siccome siamo nel caso $a \neq 2$.

Abbiamo pertanto che la curva ammette un flesso reale, con punto di flesso $P : [0, 1, 0]$ solo per $a \neq 2$, $\forall b \in \mathbb{R}$. Nota però che P non è un punto in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ e pertanto non appartiene alla curva $C_{a,b}$.