# Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2019/2020
8 Febbraio 2021 - Quinto Appello

*Il tempo per la prova è di 2 ore.*

**Esercizio 1.** Sia $\mathbb{E}^4$ lo spazio euclideo in quattro dimensioni di coordinate $(x, y, z, w)$ rispetto al riferimento ortonormale standard $O\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4}$. Si considerino in $\mathbb{E}^4$ i seguenti sottospazi:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + u - v \\ y = 2u + 3v \\ z = -1 - u \\ w = 3 + 2v \end{cases} \quad u, v \in \mathbb{R} \quad \sigma_k : \begin{cases} kx - 5y + (k-2)z + 2w = 8 \\ (4k-3)y + 2z + (k-2)w = -k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$$

(i) Si stabiliscano le posizioni reciproche di $\pi$ e $\sigma_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

Si fissi $k = 2$.

(ii) Sia $A$ il punto di intersezione tra $\pi$ e $\sigma_2$ e sia $\tau$ l'iperpiano definito da

$$\tau : 3y + 4z + 1 = 0.$$

Si trovino le coordinate del punto $B \in \pi$ tale che:

- $d(A, B) = \sqrt{6}$,
- $d(B, \tau) = 1$,
- $B$ ha coordinate intere.

(iii) Dato il punto $C = (4, -2, 4, -5)$, si verifichi che il triangolo $ABC$ è rettangolo e se ne calcoli l'area.

**Soluzione dell'Esercizio 1.** (i) Notiamo innanzitutto che $\pi$ è un piano in $\mathbb{E}^4$ e per ogni $k \in \mathbb{R}$ anche $\sigma_k$ lo è: infatti la matrice dei suoi coefficienti è

$$\begin{pmatrix} k & -5 & k-2 & 2 \\ 0 & 4k-3 & 2 & k-2 \end{pmatrix},$$

in cui sono presenti un minore di determinante $2k$ (prima e terza colonna) ed uno di determinante $-13k + 16$ (seconda e quarta colonna) e non esiste un valore di $k \in \mathbb{R}$ che annulla contemporaneamente entrambi questi valori. Scriviamo le equazioni cartesiane di $\pi$:

$$\begin{cases} x = 1 + u - v \\ y = 2u + 3v \\ z = -1 - u \\ w = 3 + 2v \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u = -1 - z \\ v = -x - z \\ y = -2 - 2z - 3x - 3z \\ w = 3 - 2x - 2z \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 3x + y + 5z = -2 \\ 2x + 2z + w = 3. \end{cases}$$

Per trovare la posizione relativa dei due sottospazi, calcoliamo l'intersezione, trovando una soluzione per il sistema

$$\begin{cases} 3x + y + 5z = -2 \\ 2x + 2z + w = 3 \\ kx - 5y + (k-2)z + 2w = 8 \\ (4k-3)y + 2z + (k-2)w = -k. \end{cases}$$

Studiamo quindi la matrice dei coefficienti

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ k & -5 & k-2 & 2 \\ 0 & 4k-3 & 2 & k-2 \end{pmatrix},$$

di cui possiamo calcolare il determinante sviluppando secondo l'ultima colonna:

$$\begin{aligned} |M| = {} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ k & -5 & k-2 \\ 0 & 4k-3 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4k-3 & 2 \end{vmatrix} + (k-2) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \\ k & -5 & k-2 \end{vmatrix} = \\ & = [3(-10 - 4k^2 + 8k + 3k - 6) - k(2 - 20k + 15)] + \\ & - 2[3(-8k + 6) - 2(2 - 20k + 15)] + \\ & + (k-2)[-(2k - 4 - 2k) + 5(6 - 10)] = \\ & = -12k^2 + 33k - 48 - 17k + 20k^2 - 32k + 32 - 16k + 32 = \\ & = 8k^2 - 32k + 16 = 8(k^2 - 4k + 2). \end{aligned}$$

Questo valore si annulla solamente per $k = 2 \pm \sqrt{2}$, quindi se $k \neq 2 \pm \sqrt{2}$ la matrice dei coefficienti ha rango massimo e i due piani sono incidenti in un punto. Studiamo adesso il caso in cui $k = 2 \pm \sqrt{2}$, calcolando il rango della matrice completa

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2\pm\sqrt{2} & -5 & \pm\sqrt{2} & 2 & 8 \\ 0 & 5\pm 4\sqrt{2} & 2 & \pm\sqrt{2} & -2\mp\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & -13 \\ 0 & -7\mp\sqrt{2} & -6\mp 2\sqrt{2} & 4\pm\sqrt{2} & 13\pm\sqrt{2} \\ 0 & 5\pm 4\sqrt{2} & 2 & \pm\sqrt{2} & -2\mp\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 16 & -13\mp\sqrt{2} & -64\mp 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -16\mp 16\sqrt{2} & -15\pm 14\sqrt{2} & 61\pm 50\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 16 & -13\mp\sqrt{2} & -64\mp 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10\mp 18\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

che quindi ha rango 4 e di conseguenza il sistema risulta incompatibile ed i due piani sono sghembi. Quindi ricapitolando:

$$\boxed{\pi \text{ e } \sigma_k \text{ sono } \begin{cases} \text{incidenti in un punto se } k \neq 2\pm\sqrt{2}, \\ \text{sghembi se } k = 2\pm\sqrt{2}. \end{cases}}$$

(ii) Per trovare il punto $A$ possiamo utilizzare queste equazioni e sostituirle all'interno delle equazioni cartesiane del piano $\sigma_2$:

$$\begin{cases} 2(u) - 5(-2-3u-5v) + 2(3-2u-2v) = 8 \\ 5(-2-3u-5v) + 2v = -2 \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} 2u + 10 + 15u + 25v + 6 - 4u - 4v = 8 \\ -10 - 15u - 25v + 2v = -2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} 13u + 21v = -8 \\ -15u - 23v = 8 \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} u = -v \\ 13u + 21v = -8 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = -1, \end{cases}$$

portando a concludere che $\boxed{A = (1, 0, -1, 3).}$ Dalle equazioni parametriche di $\pi$ possiamo parametrizzare il punto $B$ come

$$B = (1 + \overline{u} - \overline{v}, 2\overline{u} + 3\overline{v}, -1 - \overline{u}, 3 + 2\overline{v}),$$

con $\overline{u}$ e $\overline{v}$ due parametri reali fissati.

Possiamo innanzitutto calcolare la distanza tra $B$ e l'iperpiano dato, utilizzando la formula per la distanza punto-iperpiano data da:

$$d(B,\tau) = \frac{|3(2\overline{u}+3\overline{v})+4(-1-\overline{u})+1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|2\overline{u}+9\overline{v}-3|}{5}.$$

Sappiamo che questa quantità deve essere uguale ad 1, allora abbiamo due possibili soluzioni per questa equazione lineare:

$$\begin{cases} 2\overline{u}+9\overline{v}-3=5 \\ 2\overline{u}+9\overline{v}-3=-5 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \overline{u}=4-\frac{9}{2}\overline{v} \\ \overline{u}=-1-\frac{9}{2}\overline{v}. \end{cases}$$

Sostituendo queste due relazioni all'interno della definizione di $B$ otteniamo che:

$$\begin{cases} x=5-\frac{11}{2}\overline{v} \\ y=8-6\overline{v} \\ z=-5+\frac{9}{2}\overline{v} \\ w=3+2\overline{v} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x=-\frac{11}{2}\overline{v} \\ y=-2-6\overline{v} \\ z=\frac{9}{2}\overline{v} \\ w=3+2\overline{v}. \end{cases}$$

Adesso possiamo calcolare la distanza tra $A$ e $B$ in entrambi i casi: se vale la prima relazione otteniamo che

$$\begin{aligned} d(A,B)^2 &= \left(4-\frac{11}{2}\overline{v}\right)^2+(8-6\overline{v})^2+\left(-4+\frac{9}{2}\overline{v}\right)^2+(2\overline{v})^2= \\ &= 16+\frac{121}{4}\overline{v}^2-44\overline{v}+64+36\overline{v}^2-96\overline{v}+16+\frac{81}{4}\overline{v}^2-36\overline{v}+4\overline{v}^2= \\ &= \frac{181}{2}\overline{v}^2-176\overline{v}+96. \end{aligned}$$

Questa quantità per ipotesi è 6, allora abbiamo la seguente relazione:

$$\frac{181}{2}\overline{v}^2-176\overline{v}+90=0 \iff 181\overline{v}^2-352\overline{v}+180=0.$$

Questa equazione ha discriminante $176^2-180\cdot 181<0$, quindi non esiste alcun punto reale utilizzando la prima parametrizzazione per $B$. Ripetiamo adesso il procedimento utilizzando la seconda parametrizzazione di $B$:

$$\begin{aligned} d(A,B)^2 &= \left(-1-\frac{11}{2}\overline{v}\right)^2+(-2-6\overline{v})^2+\left(1+\frac{9}{2}\overline{v}\right)^2+(2\overline{v})^2= \\ &= 1+\frac{121}{4}\overline{v}^2+11\overline{v}+4+36\overline{v}^2+24\overline{v}+1+\frac{81}{4}\overline{v}^2+9\overline{v}+4\overline{v}^2= \\ &= \frac{181}{2}\overline{v}^2+44\overline{v}+6. \end{aligned}$$

Nuovamente uguagliamo questa quantità a 6, allora abbiamo la seguente relazione:

$$\frac{181}{2}\overline{v}^2+44\overline{v}=0 \iff \overline{v}=0 \lor \overline{v}=-\frac{88}{181}.$$

Le uniche coordinate intere per $B$ sono date dal valore $\overline{v}=0$, che fornisce quindi le coordinate $\boxed{B=(0,-2,0,3).}$

(iii) Consideriamo i due vettore direzione $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ e verifichiamo che essi sono perpendicolari:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

e si ottiene che $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle = -4 + 0 + 4 + 0 = 0$, quindi i due vettori sono ortogonali e $ABC$ è rettangolo. L'area è data quindi da $A = \frac{d(A,B) \cdot d(B,C)}{2}$. Sappiamo che $d(A, B) = \sqrt{6}$, mentre

$$d(B, C) = \sqrt{16 + 16 + 64} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}.$$

Allora l'area del triangolo $ABC$ è

$$\boxed{A = \frac{\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{6}}{2} = 12.}$$

**Esercizio 2.** Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ il piano proiettivo complesso di coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si consideri la curva $\mathcal{C}$ nel piano $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ definita dal polinomio

$$\mathcal{C} : F(x_0, x_1, x_2) = 5x_1^4x_2 + x_2^5 + 2x_1^2x_2^3 - 2x_0x_1^4 - 2x_0x_2^4 - 4x_0x_1^2x_2^2 + x_0^2x_1^2x_2 + x_0^2x_2^3 = 0.$$

(i) Si verifichi che la curva possiede un solo punto improprio che ammette coordinate reali.

(ii) Si trovino i punti singolari della curva.
(*Suggerimento: Si verifichi prima che nessun punto improprio è singolare.*)

(iii) Per ognuno dei punti singolari, si trovi la sua molteplicità e le sue tangenti principali.

**Soluzione dell'Esercizio 2.** (i) Per trovare i punti impropri troviamo l'intersezione tra la curva e la retta $x_0 = 0$, ottenendo:

$$\begin{aligned} F(0, x_1, x_2) &= 5x_1^4x_2 + x_2^5 + 2x_1^2x_2^3 = 0 \\ &= x_2(5x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2x_2^2). \end{aligned}$$

Il primo fattore si annulla per $x_2 = 0$, mentre il secondo fattore è una somma di quadrati ed ha quindi solamente soluzioni complesse. L'unico punto improprio che ammette coordinate reali è quindi $\boxed{P = [0, 1, 0].}$

(ii) Calcoliamo le derivate parziali della curva:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_0} &= -2x_1^4 - 2x_2^4 - 4x_1^2x_2^2 + 2x_0x_1^2x_2 + 2x_0x_2^3 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 20x_1^3x_2 + 4x_1x_2^3 - 8x_0x_1^3 - 8x_0x_1x_2^2 + 2x_0^2x_1x_2 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= 5x_1^4 + 5x_2^4 + 6x_1^2x_2^2 - 8x_0x_2^3 - 8x_0x_1^2x_2 + x_0^2x_1^2 + 3x_0^2x_2^2. \end{aligned}$$

Per trovare i punti singolari dobbiamo uguagliare a zero queste tre equazioni, iniziamo ponendo $x_0 = 0$:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_1^4 + 2x_2^4 + 4x_1^2x_2^2 = 0 \\ 20x_1^3x_2 + 4x_1x_2^3 = 0 \\ 5x_1^4 + 5x_2^4 + 6x_1^2x_2^2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ (x_1^2 + x_2^2)^2 = 0 \\ x_1x_2(5x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ 5x_1^4 + 5x_2^4 + 6x_1^2x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Notiamo che la seconda e la terza equazione ammettono come unica soluzione $x_1 = x_2 = 0$, che non è un punto dello spazio proiettivo e quindi, nessun punto improprio è singolare. Possiamo quindi imporre $x_0 = 1$ senza perdere di generalità in modo da semplificare i conti. Otteniamo quindi che le derivate parziali si annullano se:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ -2x_1^4 - 2x_2^4 - 4x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_2 + 2x_2^3 = 0 \\ 20x_1^3x_2 + 4x_1x_2^3 - 8x_1^3 - 8x_1x_2^2 + 2x_1x_2 = 0 \\ 5x_1^4 + 5x_2^4 + 6x_1^2x_2^2 - 8x_2^3 - 8x_1^2x_2 + x_1^2 + 3x_2^2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ (x_1^2 + x_2^2)^2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ x_1(10x_1^2x_2 + 2x_2^3 - 4x_1^2 - 4x_2^2 + x_2) = 0 \\ 5x_1^4 + 5x_2^4 + 6x_1^2x_2^2 - 8x_2^3 - 8x_1^2x_2 + x_1^2 + 3x_2^2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 - x_2) = 0 \\ x_1(10x_1^2x_2 + 2x_2^3 - 4x_1^2 - 4x_2^2 + x_2) = 0 \\ 5x_1^4 + 5x_2^4 + 6x_1^2x_2^2 - 8x_2^3 - 8x_1^2x_2 + x_1^2 + 3x_2^2 = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione si annulla quindi per $x_1 = \pm ix_2$ e se $x_1^2 = x_2 - x_2^2$. Sostituendo la prima relazione si ottiene:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = \pm ix_2 \\ x_1(10x_1^2x_2 + 2x_2^3 - 4x_1^2 - 4x_2^2 + x_2) = 0 \\ 5x_1^4 + 5x_2^4 + 6x_1^2x_2^2 - 8x_2^3 - 8x_1^2x_2 + x_1^2 + 3x_2^2 = 0. \end{cases}$$

Otteniamo quindi una prima soluzione quando $x_1 = x_2 = 0$, cioè abbiamo che $\boxed{A = [1, 0, 0] \text{ è un punto singolare.}}$ Supponendo $x_1 \neq 0$, possiamo effettuare le sostituzioni

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = \pm ix_2 \\ -10x_2^3 + 2x_2^3 + x_2 = 0 \\ 10x_2^4 - 6x_2^4 - 8x_2^3 + 8x_2^3 - x_2^2 + 3x_2^2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = \pm ix_2 \\ x_2(-8x_2^2 + 1) = 0 \\ 2x_2^2(2x_2^2 + 1) = 0. \end{cases}$$

Dalle ultime due equazioni risulta evidente che l'unica soluzione plausibile è $x_2 = 0$, che ci riporta a trovare il punto $A$. Sostituiamo adesso la seconda relazione ed otteniamo che il sistema

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1^2 = x_2 - x_2^2 \\ x_1(10x_1^2x_2 + 2x_2^3 - 4x_1^2 - 4x_2^2 + x_2) = 0 \\ 5x_1^4 + 5x_2^4 + 6x_1^2x_2^2 - 8x_2^3 - 8x_1^2x_2 + x_1^2 + 3x_2^2 = 0 \end{cases}$$

ha una soluzione evidente per $x_1 = 0$, che riduce il sistema a

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 0 \\ x_2 - x_2^2 = 0 \\ x_2^2(5x_2^2 - 8x_2 + 3) = 0 \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $\boxed{\text{il punto singolare } B = [1, 0, 1].}$ Possiamo quindi supporre $x_1 \neq 0$ e vedere se esistono altre soluzioni:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1^2 = x_2 - x_2^2 \\ 10x_2^2 - 10x_2^3 + 2x_2^3 - 4x_2 + 4x_2^2 - 4x_2^2 + x_2 = 0 \\ 5(x_2 - x_2^2)^2 + 5x_2^4 + 6x_2^3 - 6x_2^4 - 8x_2^2 + x_2 - x_2^2 + 3x_2^2 = 0 \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1^2 = x_2 - x_2^2 \\ x_2(8x_2^2 - 10x_2 + 3) = 0 \\ x_2(4x_2^3 - 4x_2^2 - x_2 + 1) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1^2 = x_2 - x_2^2 \\ (2x_2 - 1)(4x_2 - 3) = 0 \\ (x_2 - 1)(2x_2 - 1)(2x_2 + 1) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1^2 = \frac{1}{4} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = \pm\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Quindi gli ultimi punti singolari sono $\boxed{C = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \text{ e } D = \left[1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].}$

(iii) Scriviamo la disomogeneizzazione della curva $\mathcal{C}$ rispetto alla variabile $x_0$:

$$f(x, y) = 5x^4y + y^5 + 2x^2y^3 - 2x^4 - 2y^4 - 4x^2y^2 + x^2y + y^3 = 0.$$

Per trovare la molteplicità del punto $A$, che corrisponde all'origine del piano affine, è sufficiente vedere quali sono i termini di $f$ di grado più basso ed annullarli. Queste saranno anche le sue tangenti principali. Nello specifico notiamo che i termini di $f$ di grado più basso hanno grado 3 e quindi $\boxed{m(A) = 3}$ e si annullano per

$$x^2y + y^3 = 0 \iff y(y + ix)(y - ix) = 0.$$

Quindi abbiamo tre tangenti principali per il punto $A$

$$\boxed{\begin{aligned} t_1 &: y = 0 \\ t_2 &: y = ix \\ t_3 &: y = -ix, \end{aligned}}$$

che risulta quindi un punto triplo ordinario. Per trovare la molteplicità di $B$, che corrisponde al punto $(0, 1)$ del piano affine, riscriviamo le equazioni di $f$, applicando la traslazione

$$\begin{cases} \overline{x} = x \\ \overline{y} = y - 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = \overline{x} \\ y = \overline{y} + 1. \end{cases}$$

Quindi il polinomio che definisce la curva diventa

$$5\overline{x}^4(\overline{y}+1) + (\overline{y}+1)^5 + 2\overline{x}^2(\overline{y}+1)^3 - 2\overline{x}^4 - 2(\overline{y}+1)^4 + \\ -4\overline{x}^2(\overline{y}+1)^2 + \overline{x}^2(\overline{y}+1) + (\overline{y}+1)^3 = 0.$$

Calcoliamo i termini di grado più basso a partire dal grado 0 fino a che non si annullano per trovare la molteplicità del punto:

- Grado 0:
$$1 - 2 + 1 = 0.$$
- Grado 1:
$$5\overline{y} - 8\overline{y} + 3\overline{y} = 0.$$
- Grado 2:
$$10\overline{y}^2 + 2\overline{x}^2 - 12\overline{y}^2 - 4\overline{x}^2 + \overline{x}^2 + 3\overline{y}^2 = \overline{y}^2 - \overline{x}^2 = (\overline{y} - \overline{x})(\overline{y} + \overline{x}).$$

Quindi abbiamo che $\boxed{m(B) = 2}$ e le sue tangenti principali sono

$$\boxed{\begin{aligned} r_1 &: \overline{y} = \overline{x} \rightsquigarrow y = x + 1 \\ r_2 &: \overline{y} = -\overline{x} \rightsquigarrow y = -x + 1 \end{aligned}}$$

ed il punto $B$ risulta quindi un punto doppio ordinario. Prima di ripetere il procedimento per $C$ e $D$, notiamo che il polinomio $f$ è simmetrico rispetto all'asse delle $x$, quindi possiamo ragionare su $C$ e il risultato sarà analogo su $D$, sostituendo ad $x$ il valore $-x$. Il punto $C$ corrisponde sul piano affine al punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e come prima, consideriamo la traslazione che porta $C$ nell'origine:

$$\begin{cases} \overline{x} = x - \frac{1}{2} \\ \overline{y} = y - \frac{1}{2} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = \overline{x} + \frac{1}{2} \\ y = \overline{y} + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

L'equazione del polinomio diventa quindi:

$$5\left(\overline{x}+\frac{1}{2}\right)^4\left(\overline{y}+\frac{1}{2}\right) + \left(\overline{y}+\frac{1}{2}\right)^5 + 2\left(\overline{x}+\frac{1}{2}\right)^2\left(\overline{y}+\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\overline{x}+\frac{1}{2}\right)^4 + \\ -2\left(\overline{y}+\frac{1}{2}\right)^4 - 4\left(\overline{x}+\frac{1}{2}\right)^2\left(\overline{y}+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\overline{x}+\frac{1}{2}\right)^2\left(\overline{y}+\frac{1}{2}\right) + \left(\overline{y}+\frac{1}{2}\right)^3 = 0.$$

Come prima, studiamo i gradi in ordine crescente di questo polinomio:

- Grado 0:

$$\frac{5}{2^5}+\frac{1}{2^5}+\frac{2}{2^5}-\frac{2}{2^4}-\frac{2}{2^4}-\frac{4}{2^4}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}=$$
$$=\frac{1}{2^5}\left(5+1+2-4-4-8+4+4\right)=0.$$

- Grado 1:

$$5\left(\frac{\overline{y}}{2^4}+\frac{\overline{x}}{2^2}\right)+\frac{5}{2^4}\overline{y}+2\left(\frac{\overline{x}}{2^3}+\frac{3}{2^4}\overline{y}\right)-2\frac{\overline{x}}{2}-2\frac{\overline{y}}{2}-4\left(\frac{\overline{x}}{4}-\frac{\overline{y}}{4}\right)+$$
$$+\frac{\overline{x}}{2}+\frac{\overline{y}}{2^2}+\frac{3}{2^2}\overline{y}=0$$

- Grado 2:

$$5\left(\frac{3}{4}\overline{x}^2+\frac{1}{2}\overline{xy}\right)+\frac{5}{2}\overline{y}^2+2\left(\frac{\overline{x}^2}{8}+\frac{3}{8}\overline{y}^2+\frac{3}{4}\overline{xy}\right)-2\left(\frac{3\overline{x}^2}{2}\right)+$$
$$-2\left(\frac{3\overline{y}^2}{2}\right)-4\left(\frac{\overline{x}^2}{4}+\frac{\overline{y}^2}{4}+\overline{xy}\right)+\frac{\overline{x}^2}{2}+\overline{xy}+\frac{3}{2}\overline{y}^2=$$
$$=\frac{1}{4}\left(15\overline{x}^2+10\overline{xy}+5\overline{y}^2+\overline{x}^2+3\overline{y}^2+6\overline{xy}-12\overline{x}^2-12\overline{y}^2-4\overline{x}^2-4\overline{y}^2\right)+$$
$$+\frac{1}{4}\left(-16\overline{xy}+2\overline{x}^2+4\overline{xy}+\overline{y}^2\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overline{x}^2+2\overline{xy}-\overline{y}^2\right).$$

Quindi abbiamo che $\boxed{m(C)=m(D)=2}$, che risultano punti doppi ordinari. Le tangenti principali relative a $C$ sono:

$$\boxed{\begin{aligned} s_1 &: \overline{x}+\overline{y}-\sqrt{2}\overline{y}=0 \rightsquigarrow x=\left(\sqrt{2}-1\right)y+1-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ s_2 &: \overline{x}+\overline{y}+\sqrt{2}\overline{y}=0 \rightsquigarrow x=-\left(\sqrt{2}+1\right)y+1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}}$$

mentre le tangenti principali relative a $D$ sono:

$$\boxed{\begin{aligned} s_3 &: x=-\left(\sqrt{2}-1\right)y-1+\frac{\sqrt{2}}{2} \\ s_4 &: x=\left(\sqrt{2}+1\right)y-1-\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}}$$