Università degli Studi di Trento

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Relazione di Elementary Mathematics from a higher viewpoint II

Curve celebri e Lemniscata

Candidati:
Francesca Fusina
Matricola 166248

Federico Gionta
Matricola 165068

Anno Accademico 2013–2014

Indice

1 Introduzione

La derivata e l'integrale sono elementi fondamentali della meccanica, in quanto sono concetti legati al significato di *moto*: infatti la velocità è la derivata dello spostamento rispetto al tempo e lo spostamento è l'integrale della velocità.
Inoltre, la meccanica fu in passato l'unica fonte di curve non algebriche: basti pensare alla *cicloide*, curva generata dalla rotazione di un punto su una circonferenza che, oltre a ruotare, si muove lungo una linea. Queste curve furono molto importanti per lo sviluppo del *Calculus*, proprio perché non erano studiabili attraverso equazioni algebriche. Un ulteriore spinta fu data dallo studio della *meccanica continua*, la quale studia il comportamento di oggetti che si muovono con continuità nello spazio, come il moto di fluidi e il flusso del calore. La meccanica continua coinvolge funzioni di più variabili e le loro derivate, quindi le equazioni differenziali alle derivate parziali (PDE). Le PDE più famose sono quelle relative all'equazione dell'onda e a quella del flusso di calore, che non si possono separare dalle loro origini legate alla meccanica continua. Queste equazioni hanno portato i matematici che le hanno studiate a porsi delle domande sui fondamenti della matematica pura, ad esempio il significato di funzione.

1.1 Meccanica prima del Calculus

Come detto sopra il calculus è parte integrante della meccanica, ma senza la meccanica non si sarebbe giunti a uno sviluppo così importante del calculus. Quindi si vedrà la meccanica studiata prima del calculus, sottolineando come la meccanica sia un requisito fondamentale per il calculus stesso. Assumeremo come noti i concetti di tempo, spazio, velocità, accelerazione e forza, concentrandoci sulla matematica che emerge da queste nozioni. Mentre fino al XIX secolo la meccanica ha dato spunti per lo studio della matematica pura, negli ultimi cento anni il trend si è invertito: i concetti della meccanica del XX secolo, come la relatività e la meccanica quantistica, non si sarebbero potuti raggiungere senza le scoperte di matematica pura fatte nel secolo precedente.
Mentre il concetto di accelerazione costante veniva studiato teoricamente nel 1330, non era ancora chiaro che essa era presente in natura, come è visibile nei corpi in caduta libera. Solo con l'avvento degli studi di Galileo Galilei (1564-1642) si scoprì che lo spostamento di un corpo in caduta libera in

condizioni di riposo a $t = 0$ è proporzionale a t^2. All'inizio Galilei pensava che ciò dipendesse o da una velocità proporzionale al tempo, $v = kt$ (che indicherebbe l'accelerazione costante), oppure da una velocità proporzionale allo spazio percorso, $v = ks$. Solo nel 1638 Galilei comprese che la caduta libera di un corpo dipendeva da una velocità proporzionale al tempo, ovvero $v = kt$. Inoltre, attraverso la composizione della velocità verticale crescente e quella costante orizzontale, Galilei riuscì a tracciare per la prima volta la corretta traiettoria di un proiettile: la parabola. Questa fu una vera e propria rivoluzione: il moto di un proiettile fu studiato fin dall'antichità e le rappresentazioni del moto prima di Galilei erano completamente errate. Ciò dipendeva dal fatto che nella quotidianità era ancora forte il pensiero fisico di Aristotele, il quale affermava che il moto di un oggetto avviene sotto l'azione di una forza costante; per questo motivo la traiettoria veniva sempre disegnata in modo errato con la velocità orizzontale che diminuiva fino a diventare nulla. L'importanza di Galilei è stata proprio quella di aver compreso che la velocità è proporzionale al tempo, e non alla forza, affermando il *Principio di inerzia*: un corpo non soggetto a forze esterne viaggia a una velocità costante.

1.2 Curve meccaniche

Nel 1637 Cartesio volle limitare la sua opera *Le Géométrie* alle sole curve algebriche, decidendo di escludere certe particolari curve dal suo studio, affermando che:

> *"N'appartiennent qu'à la mécanique, et ne sont pas parmi les courbes que je pense devraient étre inclues ici, car elles doivent étre concues comme décrites par deux mouvementes distincts dont la relation n'admet pas de déterminer avec précision."*

Cartesio escluse le cosiddette *curve meccaniche*, ovvero quelle curve che i Greci definivano attraverso qualche semplice meccanismo come l'*epiciclo*, descritta ruotando senza strisciare un punto appartenente a un cerchio su un altro cerchio, oppure la *spirale di Archimede*, data dal movimento di un punto a velocità costante che ruota attorno a una linea (Figura 1). Cartesio aveva compreso come la spirale di Archimede fosse in realtà una curva trascendente, per il fatto che essa incontra una retta in infiniti punti. Questo, infatti, non avveniva nelle curve algebriche di equazione $p(x, y) = 0$, le quali

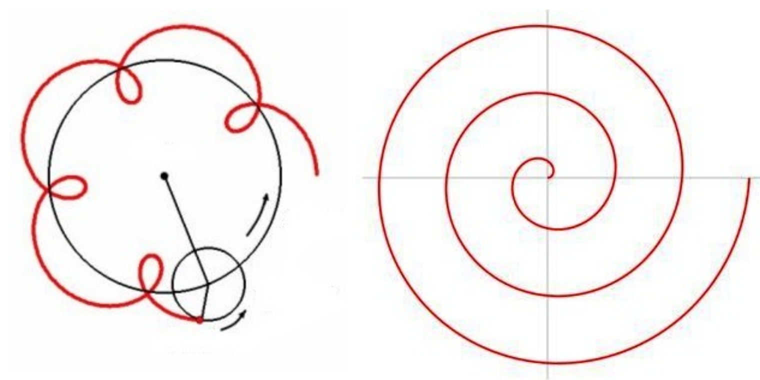


Figura 1: A destra la costruzione dell'epiciclo, a sinistra la spirale di Archimede.

incontrano in un numero finiti di punti la retta di equazione $y = mx + q$, corrispondenti alle soluzioni finite di $p(x, y = mx + q) = 0$. La definizione di curva trascendente viene esplicitata da Newton solamente nel 1687.
Non si sa come Cartesio riuscì a distinguere le curve algebriche da quelle trascendenti senza una definizione di queste ultime. Nel XVII secolo si sviluppò fortemente sia la meccanica sia il calculus, e risalgono a quegli anni le curve trascendenti più famose come la *catenaria* e la *cicloide*. Faremo una breve introduzione su queste due curve, per poi nei prossimi paragrafi trattarle in modo più rigoroso.

- CATENARIA
  E' una curva piana, descritta dall'andamento caratteristico di una fune omogenea, flessibile e non estensibile, i cui due estremi siano vincolati e che sia lasciata pendere, soggetta soltanto al proprio peso. Nel 1675 Hooke descrisse questa curva come un arco di pietre di grandezza infinitesima. In realtà la catenaria è molto simile ad una parabola e infatti una prima congettura di Galilei fu quella di scrivere l'equazione della catenaria come quella di una parabola. Ma nel 1646 il diciassettenne Huygens affermò che questa congettura di Galilei fosse sbagliata, senza però inizialmente riuscire a fornire l'equazione corretta della curva: egli mostrò come la parabola assume la forma di una corda flessibile con massa distribuita lungo la direzione orizzontale.
  Il problema della catenaria fu risolto in modo indipendente da Bernoulli, Huygens e Leibniz, tutti nel 1691, come risposta a una sfida lanciata da Jacob Bernoulli nel 1690. Johann Bernoulli mostrò che la curva

soddidfava l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{a},$$

dove a è una costante e s è la lunghezza dell'arco OP come si vede in Figura 2.

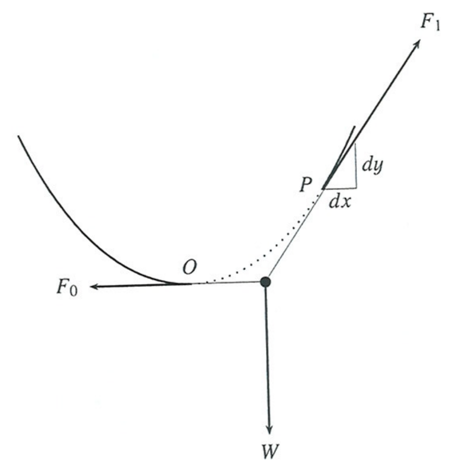


Figura 2: La catenaria.

Egli ricavò questa equazione differenziale sostituendo alla porzione di corda OP, che è in equilibrio con la forza tangenziale F_1 applicata al punto P e la forza orizzontale F_0, che è indipendente dalla scelta del punto P, con una massa puntiforme W uguale alla massa di OP, quindi proporzionale a s, tenuta in equilibrio dalle stesse forze. Confrontando le direzioni e i moduli delle forze si ottiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{W}{F_0} = \frac{s}{a}.$$

Tramite ingegnose trasformazioni, Bernoulli ridusse l'equazione nella seguente forma:

$$dx = \frac{a\ dy}{\sqrt{y^2 - a^2}},$$

risolvibile tramite un integrale. Bernoulli, però, non conosceva ancora il calcolo integrale e questa soluzione è la più semplice a cui si potesse arrivare in quel tempo. Tuttavia, oggi dalla soluzione ricavata si può subito osservare che essa può essere riscritta nella forma più semplice:

$$y = a \cosh \frac{x}{a} - a.$$

- CICLOIDE
  Essa è la curva generata da un punto fisso su una circonferenza che rotola lungo una retta. Nonostante appartenga alla famiglia degli epicicli, la cicloide non venne studiata fino al XVII secolo, da quando divenne la curva preferita dei matematici dell'epoca. Questa curva è importante non solo per le sue notevoli proprietà geometriche ma anche per proprietà meccaniche fondamentali per le applicazioni. La prima proprietà geometrica della cicloide, scoperta da Huygens, è l'essere *tautocrona*, ovvero un corpo che percorre una traiettoria cicloidale impiega lo stesso tempo per arrivare al punto più basso, indipendentemente dal punto di partenza.
  Huygens costruì un pendolo che sfruttava questa proprietà: se il pendolo, costituito da un filo privo di massa con una massa puntiforme legata all'estremità, è costretto ad oscillare tra due "guance" cicloidali, così come le denomina Huygens, allora la massa puntiforme descriverà una traiettoria cicloidale, come si osserva in Figura 3.

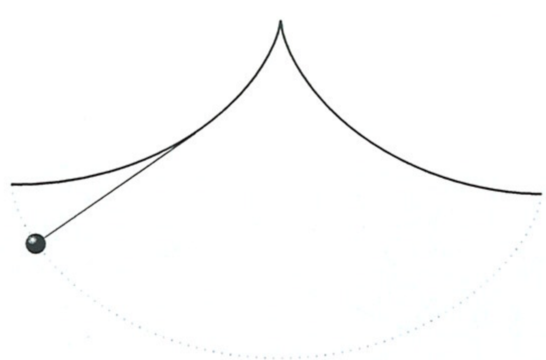


Figura 3: Il pendolo tautocrono.

Segue che il periodo del pendolo tautocrono è indipendente dall'ampiezza. Questa caratteristica è molto importante in quando differenzia questo tipo di pendolo da tutti gli altri, i quali presentano questa proprietà solamente per piccole ampiezze.

La seconda proprietà della cicloide è l'essere *brachistocrona*, ovvero è la curva che permette ad una massa puntiforme soggetta alla sola forza peso, dati due punti A e B, di compiere il percorso da A a B nel minor tempo possibile. Nel 1696 Johann Bernoulli lanciò una sfida, invitanto i matematici dell'epoca a trovare l'equazione di questa curva. L'anno successivo Jakob Bernoulli, l'Hôpital, Leibniz e Newton giunsero alla stessa soluzione in modo indipendente. Questo problema era più complicato rispetto a quello di trovare l'equazione della tautocrona, in quanto la cicloide doveva essere isolata fra tutte le possibile curve tra A e B. La soluzione di Jakob Bernoulli fu la più interessante poiché egli riuscì ad utilizzare la curva come una variabile del problema, e questo è oggi considerato il primo grande passo nello sviluppo del calcolo delle variazioni.

Oltre alle curve già citate in questo elaborato approfondiremo anche altre curve come l'*isocrona* e la *trattrice*.

1.3 I problemi di Florimond de Beaune

De Beaune nasce nel 1601 e vive per tutti i suoi anni a Blois, in Francia, dove muore nel 1652. Egli non è un vero e proprio matematico, ma si interessa di questa materia, ottenendo risultati molto importanti. Grande amico di Cartesio, con il quale ha sempre avuto una fitta corrispondenza, arriva alla scrittura delle equazioni di parabola, iperbole ed ellisse, nello stesso periodo di Cartesio. De Beaune si interessa anche di ottica e soprattutto di meccanica: infatti cerca di risolvere alcuni dei più famosi problemi di meccanica, cercando di trovare le curve che soddisfacevano alle proprietà richieste.
E' importate ricordare che de Beaune è il primo a scrivere un'equazione differenziale nella storia, anche se non sapeva risolverla, in quando nella sua epoca il calculus non era stato ancora scoperto.
Vediamo ora due semplici problemi di meccanica e le soluzioni di de Beaune.

- Problema 1
  Trovare l'equazione della curva $y = y(x)$ tale che in ogni punto P, la distanza fra T (punto di intersezione fra la tangente in P alla curva e l'asse delle ascisse) e N (proiezione del punto P sull'asse delle ascisse) è costante.

Per prima cosa diamo una visualizzazione grafica al problema come in figura 4:

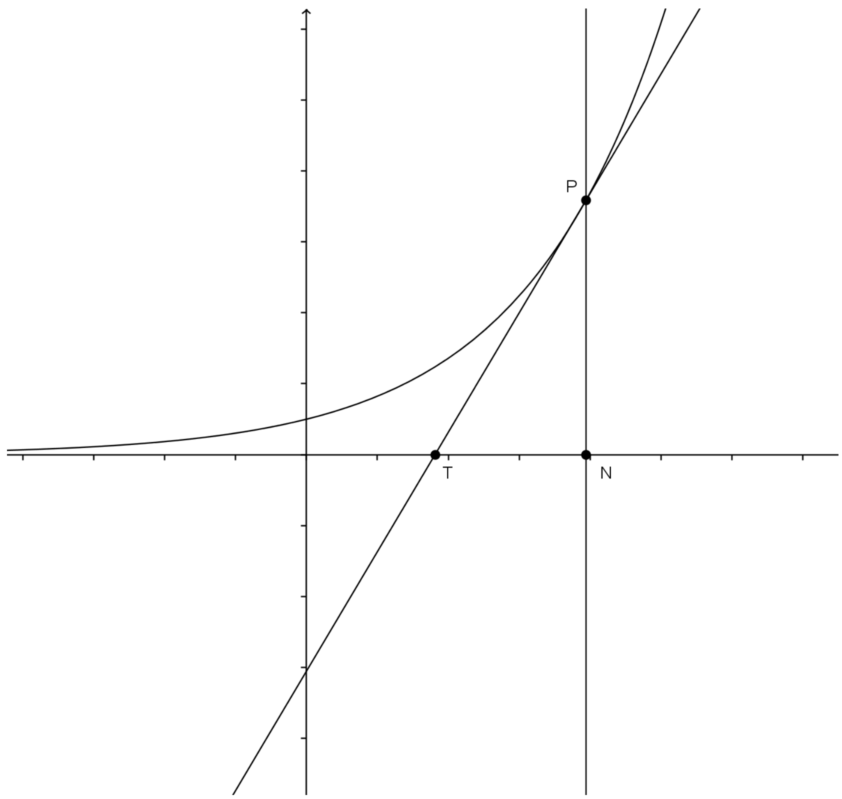


Figura 4: Problema 1 di de Beaune.

Sia il punto $P = (x, y(x))$ allora la tangente alla curva nel punto P ha equazione parametrica:

$$tan : (x, y) + t(1, \dot{y}(x)).$$

La tangente interseca l'asse delle ascisse, che denotiamo con X, nel punto T. Troviamo le coordinate di questo punto, ponendo $Y = 0$:

$$\begin{cases} X = x + t \\ Y = y + t\dot{y} = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione isoliamo la costante t, ottenendo:

$$t = -\frac{y}{\dot{y}},$$

quindi, riscrivendo X sostituendo il valore di t, si trova che le coordinate del punto T cercate sono:

$$T(x - \frac{y}{\dot{y}}).$$

L'altra condizione è che la la distanza fra T e N è costante, quindi:

$$d(T, N) = x - (x - \frac{y}{\dot{y}}) = \frac{y}{\dot{y}} = a,$$

dove a è una costante.
Dunque l'equazione della curva cercata è:

$$\dot{y} = \frac{y}{a}.$$

Questa è la prima equazione differenziale della storia. Quando de Beaune la scrisse non sapeva risolverla. Ora con un semplice integrale sappiamo che l'equazione della curva cercata è:

$$y(x) = e^{\frac{x}{a}}.$$

- PROBLEMA 2
  Trova l'equazione della curva $y = y(x)$ tale che

  $$\frac{PC}{CT} = \frac{b}{PI},$$

  dove b è una costante.
  Per prima cosa capiamo quali sono i punti intervengono nella condizione, che sono mostrati in Figura 5:

  1. P: un punto della curva;
  2. C: proiezione del punto P sull'asse delle ascisse;
  3. T: punto di intersezione fra la tangente alla curva in P e l'asse delle ascisse;
  4. I: punto di intersezione fra la bisettrice e la retta passante fra P e C.

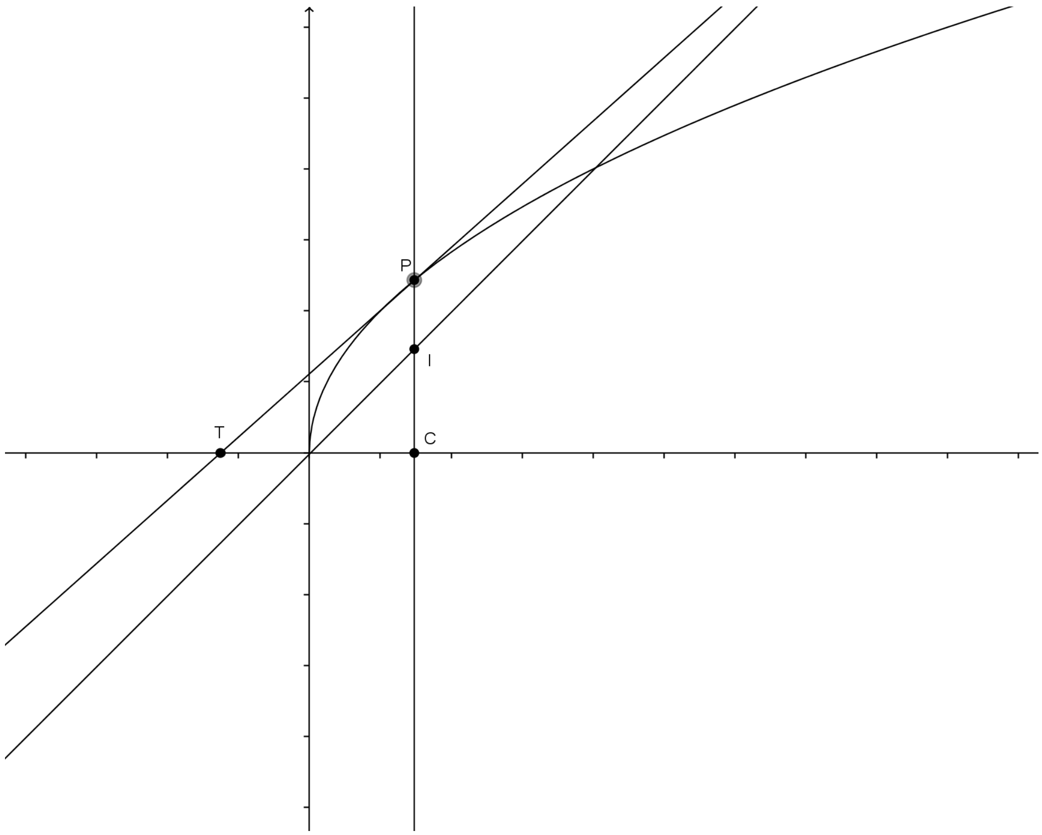


Figura 5: Problema 2 di de Beaune.

Per quanto visto nel primo problema, possiamo scrivere:

1. $PC = y$;
2. $CT = \dfrac{y}{\dot{y}}$;
3. $PI = y - x$.

Dunque sostituendo, otteniamo:

$$\dot{y} = \frac{b}{y - x}.$$

Anche in questo problema de Beaune si fermò alla trascrizione dell'equazione differenziale; ora vedremo che con un semplice cambio di variabile si può arrivare a una soluzione molto semplice. Poniamo $z(x) = y(x) - x$ (quindi $y(x) = z(x) + x$), allora:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} + \frac{dx}{x} = \frac{b}{z}.$$

Dunque, ricordando che $zdz + zdx = bdx$, possiamo riscrivere $dx = \frac{z}{b-z}dz$ e giungere alla soluzione tramite un semplice integrale:

$$x(t) - x(0) = \int_0^t \frac{z}{b-z}dz = -z + \ln \frac{b}{b-z}.$$

2 Richiami

In questa sezione riprenderemo alcune definizioni e concetti utili per gli argomenti che verranno trattati in questo elaborato.

2.1 Curve

Una curva è un oggetto unidimensionale e continuo, come ad esempio la circonferenza e la retta. Essa può giacere su un piano, nello spazio euclideo o in uno spazio topologico più generale.
Può essere pensata intuitivamente come la traiettoria descritta da un oggetto (puntiforme) che si muove con continuità in qualche spazio ben definito. Per i nostri fini, considereremo solamente curve piane giacenti nello spazio euclideo.

Definizione. Una curva piana è una curva $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ a valori nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Una curva nel piano $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ si può definire in tre differenti modi:

- **luogo di zeri di una funzione**: $\{(x, y)|f(x, y) = 0\}$;
- **grafico**: $\{(x, y)|y = y(x)\}$;
- **equazione parametrica**: $\{(x, y)|x = x(t)ey = y(t)\}$.

Quindi se abbiamo una stessa curva, ad esempio una retta, possiamo scrivere la sua equazione in tre modi differenti:

- come luogo di zeri di una funzione, $\{(x, y)|3x - 2y + 6 = 0\}$;
- come grafico di una funzione, $\{(x, y)|y = \frac{3}{2} + 3\}$;
- come equazione parametrica, $\{(x, y)|x = 2t + 2, y = 3t\}$.

Si può dimostrare che queste tre differenti forme sono equivalenti. Infatti la prima equivale alla seconda se e solo se la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ in ogni punto della curva, per il teorema del Dini. La terza equivale alla seconda se e solo se la funzione $t \to (x(t), y(t))$ è iniettiva e $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq (0, 0)$.

2.2 Equazioni differenziali ordinarie

Le curve che studieremo sono soluzioni di particolari *equazioni differenziali ordinarie.*

Definizione. Un'equazione differenziale ordinaria è una relazione della forma:

$$y' = f(x, y).$$

La soluzione di questa equazione è una funzione $y(x)$ tale che $y' = f(x, y)$ per ogni x in un dato intervallo.
Esistono diversi tipi di equazioni differenziali caratterizzate dal loro metodo di risoluzione. In questa trattazione utilizzeremo un solo tipo di equazioni differenziali, risolvibile tramite il metodo di *separazione delle variabili.*
Nel caso citato, l'equazione differenziale è della forma

$$y' = f(x)g(y).$$

Si risolve scrivendo $y' = \dfrac{dy}{dx}$, separando le variabili e integrando, ovvero:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \to \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C.$$

Se $G(y)$ e $F(x)$ sono primitive di $\dfrac{1}{g(y)}$ e $f(x)$ rispettivamente, allora la soluzione può essere espressa come $G(y) = F(x) + C$.

2.3 Evoluta

Per definire il concetto di *evoluta* abbiamo bisogno di due concetti fondamentali, il versore normale a una curva e la curvatura di una curva.
Il *versore normale* $n(t)$ è il vettore che costituisce con il versore tangente una base ortonormale positivamente orientata.
La curvatura di una curva $k(t)$ è data dalla formula $k(t) = \mathbf{P}''(t) \cdot n(t)$ e può assumere anche valori negativi. Si può inoltre dimostrare che vale anche $k(t) = \dfrac{\|\dot{\mathbf{P}}(t) \wedge \ddot{\mathbf{P}}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{P}}(t)\|^3}$.

Definizione. Sia $\mathbf{P} : J \to \mathbb{R}^2$ una curva regolare piana di classe C^3, con curvatura non costante e mai nulla. I centri delle circonferenze osculatrici $\mathbf{C}(t) = \mathbf{P}(t) + \dfrac{1}{k} \cdot n(t)$ definiscono una curva, detta evoluta.

3 Curve meccaniche

3.1 L'isocrona

"Solutio sit linea paraboloeides quadrato cubica ..." (Leibniz)

Galileo scoprì che un corpo, cadendo verticalmente dall'origine lungo l'asse y, aumenta la sua velocità secondo la legge $v = \sqrt{-2gy}$, dove g è l'accelerazione di gravità. Leibniz nel 1687, durante la sua disputa con Cartesio, pose il seguente problema:

Trovare una curva $y(x)$ tale che, mentre il corpo scivola lungo questa curva, la componente verticale della velocità $\dfrac{dy}{dt}$ è uguale a una data costante $-b$.

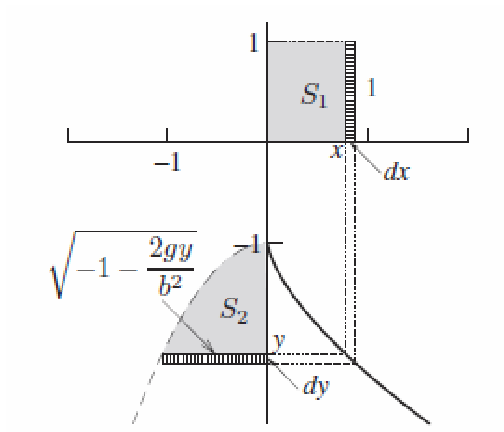


Figura 6: L'isocrona di Leibinz

Nel 1689 Huygens trovò una soluzione, che venne dimostrata e pubblicata da Leibniz nello stesso anno, ma non venne considerata soddisfacente, in quanto frutto di un'intuizione verificata successivamente. Un metodo rigoroso per trovare la soluzione grazie al calcolo differenziale venne pubblicata da Jacob Bernoulli nel 1690, che diede il via ad un'era di straordinarie scoperte compiute da Jacob e Johann Bernoulli prima, e Daniel Bernoulli ed Eulero nei decenni successivi. Riscriviamo la formula di Galileo come

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = -2gy$$

dove s è la lunghezza dell'arco percorsa dal corpo, raccogliamo $(\frac{dy}{dt})^2$, e otteniamo

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dy^2} \cdot \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} = (\frac{dy}{dt})^2 \cdot \left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1\right] = -2gy.$$

Ora dividiamo per $(\frac{dy}{dt})^2 = +b^2$ (ricordando la condizione iniziale $\frac{dy}{dt} = -b$), ottenendo

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1 = \frac{-2gy}{b^2},$$

da cui ricaviamo l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{-1 - 2gy/b^2}}.$$

Per riuscire a comprendere l'intuizione di Bernoulli, la riscriviamo come

$$dx = -\sqrt{-1 - \frac{2gy}{b^2}}dy,$$

la quale descrive il fatto che i due rettangoli contrassegnati a strisce in figura hanno sempre la stessa area. In merito a questo Jacob Bernoulli scrisse *"Ergo et horum Integralia aequantur"* (è la prima volta che viene utilizzata la parola "integrale"), volendo affermare che l'area S_1 e l'area S_2 devono a loro volta essere uguali. Integrando si trova la soluzione:

$$x(y) = \frac{b^2}{3g}\left(-1 - \frac{2gy}{b^2}\right)^{3/2}.$$

3.2 La catenaria

"Linea Catenaria vel Funicularis" (Leibniz)

Nel 1638 Galileo pose il seguente problema

Trovare una curva $y = y(x)$ che descrive una catena sospesa tra due punti.

e successivamente affermò che la soluzione di questo quesito fosse esattamente un'arco di parabola; una ventina di anni dopo, un giovane Huygens scoprì che Galileo si sbagliava.

> *"Ma per meglio giudicare la qualità del tuo algoritmo aspetto impazientemente di vedere i risultati che hai ottenuti riguardo la forma della corda o catena appesa, della quale Bernoulli ti ha proposto di indagare, e di ciò gli sono molto riconoscente, perchè questa curva possiede notevoli proprietà. Meditai a in giovinezza, quando avevo solo 15 anni, e dimostrai a mio padre Mersenne che la curva non era una parabola ..."*
>
> (Lettera di Huygens a Leibniz, 9 ottobre 1690)

La soluzione corretta del problema arrivò solamente nel 1691 grazie a Leibniz e Johann Bernoulli. Vediamo il ragionamento di quest'ultimo.

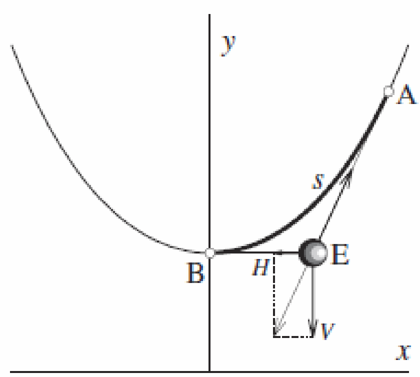


Figura 7: La catenaria

Sia B il punto di quota minore e A un punto arbitrario sulla curva. Tracciamo le tangenti alla curva in questi due punti e consideriamo il punto di intersezione E. Immaginiamo che la massa del tratto di catena di lunghezza s (tra A e B) sia concentrata nel punto E, appesa a due fili di massa trascurabile. Siccome la massa in E è proporzionale a s, il parallelogramma delle forze in E evidenzia che la pendenza in A è proporzionale alla lunghezza dell'arco, ovvero

$$c \cdot y' = s(x),$$

dove c è una costante. Infatti si ha che H, la componente orizzontale della forza, è costante in ogni punto, mentre V, la componente verticale della forza, dipende dalla lunghezza dell'arco $s(x)$. Si ottiene dunque

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{V}{H} = \frac{1}{c} \cdot s(x), \quad \text{da cui} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{c} \cdot s(x).$$

Osserviamo che la funzione $s(x)$ descrive la lunghezza della curva e vale dunque l'uguaglianza

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt, \quad \text{da cui} \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Unendo i risultati precedenti otteniamo l'equazione

$$\frac{dy}{dx} = c \cdot \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Da questo punto i calcoli di Johann Bernoulli diventano molto complicati. Diventa però tutto più semplice se teniamo conto dell'intuizione di Jacopo Riccati (un matematico italiano del XVIII secolo), il quale sostituì la derivata $y' = \frac{dy}{dx}(x)$ con una nuova funzione $p = p(x)$, da cui $c \cdot p(x) = c \cdot y' = s(x)$. Derivando l'equazione nella variabile x otteniamo

$$c \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad \text{ovvero} \quad c \cdot \frac{dp}{dx} = \sqrt{1 + p^2}.$$

Possiamo riscrivere l'equazione differenziale come $\dfrac{dx}{dp} = \dfrac{c}{\sqrt{1+p^2}}$, e integrando rispetto a p si ha $\displaystyle\int dx = \int \frac{c}{\sqrt{1+p^2}}\, dp$, da cui si ricava la soluzione dell'equazione differenziale precedente

$$x(p) = c \cdot \operatorname{arcsinh}(p) + K_1.$$

Calcolando la funzione inversa si ottiene $p(x) = \sinh\left(\dfrac{x - K_1}{c}\right)$, ovvero

$$\frac{dy}{dx}(x) = \sinh\left(\frac{x - K_1}{c}\right).$$

Ponendo la condizione $\dfrac{dy}{dx}(0) = 0$ (in quanto abbiamo assegnato al punto di quota minima della catena il valore di ascissa 0) si trova il valore della costante $K_1 = 0$, per cui $\dfrac{dy}{dx}(x) = \sinh\left(\dfrac{x}{c}\right)$. Integrando rispetto a x si ha $y(x) = c \cdot \cosh\left(\dfrac{x}{c}\right) + K_2$. Storicamente viene assegnato al parametro K_2 il valore 0, per cui l'equazione cartesiana della catenaria è data da

$$y(x) = c \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right).$$

3.3 La trattrice

Mentre Leibniz si trovava a Parigi (1672-1676) a seguire alcune lezioni di Huygens, l'architetto Claude Perrault gli pose il seguente problema:

Trovare quale è la curva la cui tangente in ogni punto P ha lunghezza costante tra il punto P e l'asse x.

Perrault informò inoltre Leibniz che nessun matematico di Parigi o Tolosa (riferendosi a Fermat) è stato in grado di trovare una formula risolutiva. Leibniz pubblicò una soluzione nel 1693, affermando di esserne a conoscenza da diverso tempo.

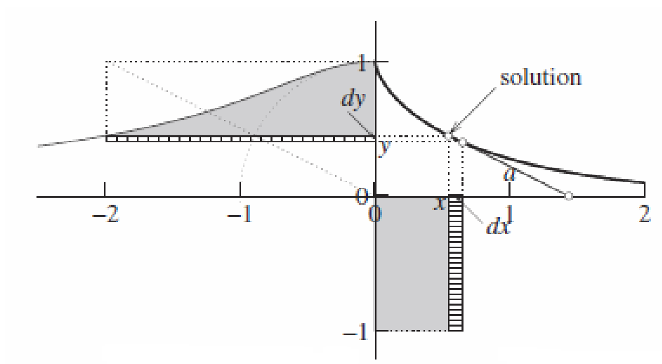


Figura 8: La trattrice

Poniamo a la lunghezza costante del segmento di tangente alla curva in un generico punto P tra il punto P stesso e l'asse delle x. Fissiamo il valore di questa distanza in $a = 1$ e sia Q il punto sull'asse delle x corrispondente all'estremo di questo segmento, per cui $d(P, Q) = a = 1$. Allora la retta tangente alla funzione nel punto $P = (x, y(x))$ è descritta da $(x, y(x)) + t(1, \dot{y}(x))$ al variare del parametro t. Volendo trovare le coordinate del punto Q, che ha ordinata nulla, ci basta porre $y(x) + t\dot{y}(x) = 0$, da cui si ricava il valore del parametro $t = -\dfrac{y(x)}{\dot{y}(x)}$, e di conseguenza l'ascissa del punto Q è data da $(x + t) = \left(x - \dfrac{y(x)}{\dot{y}(x)}\right)$. Avendo le coordinate dei punti $P = (x, y(x))$ e

$Q = \left(\left(x - \frac{y(x)}{\dot{y}(x)}\right), 0\right)$ è immediato calcolarsi la distanza

$$d(P,Q) = \sqrt{(y(x)-0)^2 + \left(x - \left(x - \frac{y(x)}{\dot{y}(x)}\right)\right)^2} = \sqrt{y(x)^2 + \left(\frac{y(x)}{\dot{y}(x)}\right)^2}$$

Dall'uguaglianza $d(P,Q) = 1$ (per ipotesi) si ottiene

$$y(x)^2 + \left(\frac{y(x)}{\dot{y}(x)}\right)^2 = 1$$

da cui ricaviamo l'equazione differenziale

$$\dot{y}(x)^2 = \frac{y(x)^2}{(1-y(x)^2)}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Riscritta come $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{y}$ e integrando rispetto a y abbiamo che la soluzione è data da

$$\begin{aligned}
x(y) &= \int_y^1 -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\,dy = -\sqrt{1-y^2} - \ln\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} \\
&= -\sqrt{1-y^2} + \ln\frac{y}{1-\sqrt{1-y^2}} = -\sqrt{1-y^2} + \ln\left(\frac{1}{y} + \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\right) \\
&= -\sqrt{1-y^2} + \operatorname{arcsech}(y)
\end{aligned}$$

A questo punto è possibile, e anche conveniente, parametrizzare la curva ponendo $y = y(t) = \operatorname{sech}(t) = \dfrac{1}{\cosh(t)}$, dato che la coordinata y assume valori compresi tra 0 (escluso) e 1 (incluso). Questa sostituzione nell'equazione precedente porta ad avere l'uguaglianza

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\sqrt{1 - \frac{1}{\cosh^2(t)}} + t = -\sqrt{\frac{\cosh^2(t) - 1}{\cosh^2(t)}} + t \\
&= -\sqrt{\frac{\sinh^2(t)}{\cosh^2(t)}} + t = -\tanh(t) + t
\end{aligned}$$

Abbiamo dunque ottenuto una parametrizzazione della curva data da

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) = \left(-\tanh(t) + t, \frac{1}{\cosh(t)}\right)$$

L'integrale precedente, $\displaystyle\int_y^1 -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\,dy$, non è però immediato da calcolare, allora si può seguire un procedimento alternativo; scriviamo l'equazione della curva in altra forma parametrica.
Sia $y = y(u) = e^{-u}$, con $u > 0$; allora $\dfrac{dy}{du} = -e^{-u}$ da cui

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{du} = -\frac{\sqrt{1-e^{-2u}}}{e^{-u}} \cdot (-e^{-u}) = \sqrt{1-e^{-2u}}.$$

Integrando troviamo $x(u) = \displaystyle\int_0^u \sqrt{1-e^{-2u}}\,dt$ per cui la curva è parametrizzata da

$$\begin{aligned}
\alpha(u) = (x(u), y(u)) &= \left(\int_0^u \sqrt{1-e^{-2u}}\,dt, e^{-u}\right) \\
&= \left(-\sqrt{1-e^{-2u}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-e^{-2u}}}{1-\sqrt{1-e^{-2u}}}\right), e^{-u}\right) \\
&= \left(-\sqrt{1-e^{-2u}} + \operatorname{arctanh}\left(\sqrt{1-e^{-2u}}\right), e^{-u}\right)
\end{aligned}$$

Notiamo che le due parametrizzazioni trovate sono equivalenti, infatti ponendo in quest'ultima $e^{-u} = \dfrac{1}{\cosh(t)}$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-e^{-2u}} &= \sqrt{1-\frac{1}{\cosh^2(t)}} = \sqrt{\frac{\cosh^2(t)-1}{\cosh^2(t)}} \\
&= \sqrt{\frac{\sinh^2(t)}{\cosh^2(t)}} = -\tanh(t)
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \left(-\tanh(t) + \operatorname{arctanh}(\tanh(t)), \frac{1}{\cosh(t)}\right) \\
&= \left(-\tanh(t) + t, \frac{1}{\cosh(t)}\right)
\end{aligned}$$

Si ha inoltre

$$\dot{\alpha}(u) = (\dot{x}(u), \dot{y}(u)) = \left(\sqrt{1-e^{-2u}}, -e^{-u}\right)$$
$$\ddot{\alpha}(u) = (\ddot{x}(u), \ddot{y}(u)) = \left(\frac{e^{-2u}}{\sqrt{1-e^{-2u}}}, e^{-u}\right)$$

Il versore normale è dato da

$$n(u) = \frac{(-\dot{y}(u), \dot{x}(u))}{\|\dot{\alpha}(u)\|} = \left(e^{-u}, \sqrt{1-e^{-2u}}\right)$$

La curvatura della curva è definita come

$$\kappa(u) = \frac{\dot{x}(u)\ddot{y}(u) - \dot{y}(u)\ddot{x}(u)}{\|\dot{\alpha}(u)\|^3} = \frac{e^{-u}}{\sqrt{1-e^{-2u}}}$$

Ora è possibile calcolare l'equazione parametrica di una nuova curva, l'evoluta della curva $\alpha(u)$ data da $\gamma(u) = \alpha(u) + \dfrac{1}{\kappa(u)} \cdot n(u)$, ovvero

$$\begin{aligned}
\gamma(u) &= \left(\int_0^u \sqrt{1-e^{-2u}}\, dt, e^{-u}\right) + \frac{\sqrt{1-e^{-2u}}}{e^{-u}} \cdot \left(e^{-u}, \sqrt{1-e^{-2u}}\right) \\
&= \left(\int_0^u \sqrt{1-e^{-2u}}\, dt, e^{-u}\right) + \left(\sqrt{1-e^{-2u}}, \frac{1-e^{-2u}}{e^{-u}}\right) \\
&= \left(\int_0^u \sqrt{1-e^{-2u}}\, dt + \sqrt{1-e^{-2u}}, \frac{1}{e^{-u}}\right) \\
&= \left(\operatorname{arctanh}(\sqrt{1-e^{-2u}}), \frac{1}{e^{-u}}\right)
\end{aligned}$$

Riconducendoci alla parametrizzazione in funzione di t effettuando la sostituzione $e^{-u} = \dfrac{1}{\cosh(t)}$ abbiamo che l'evoluta della trattrice è descritta dalla curva di equazione

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= \left(\operatorname{arctanh}(\tanh(t)), \frac{1}{\cosh(t)^{-1}}\right) \\
&= (t, \cosh(t))
\end{aligned}$$

Osserviamo che abbiamo ottenuto proprio l'equazione parametrica della catenaria descritta in precedenza, per cui l'evoluta della trattrice non è altro che la catenaria; e di conseguenza l'involuta (o evolvente) della catenaria è la trattrice.

3.4 La cicloide

"Quella curva arcuata, sono più di cinquant'anni che mi venne in mente il descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi di un ponte" (Galileo Galilei)

Immaginiamo una ruota che rotola senza strisciare su una linea retta. Un punto sul bordo esterno della ruota che curva descrive? Consideriamo il punto di contatto della ruota con la superficie. Dal momento che si stacca da terra, il punto si solleva quasi in verticale, salvo curvare nella direzione del moto fino ad arrivare ad un'altezza massima pari al diametro del cerchio, quindi ridiscende fino a toccare terra quasi in verticale. La curva descritta da questo moto è dunque definita come la traiettoria compiuta da un punto fisso su una circonferenza che rotola senza strisciare lungo una linea retta. Uno dei primi matematici a studiare questa curva fu Nicola Cusano nel XV secolo,seguito da Galileo, che le diede il nome di cicloide.
Il nome *cicloide* deriva dal greco *kykloeidés*, da *kyklos*=cerchio e *oeidés*=forma, ovvero formata da un cerchio.
Successivamente si dedicarono allo studio di questa curva e alla sue proprietà diversi matematici e fisici quali Torricelli, Fermat, Cartesio, Roberval, Pascal, Wallis, Huygens, Leibniz, Bernoulli e Newton.

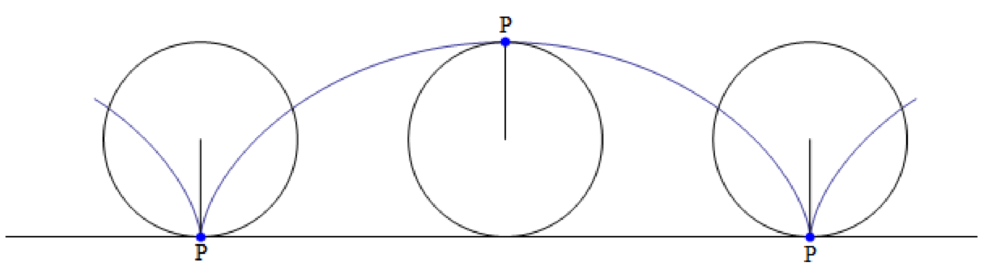


Figura 9: La cicloide

Dalla descrizione precedente della curva, ponendo inizialmente il punto fisso nell'origine degli assi cartesiani e facendo ruotare la circonferenza nel verso delle ascisse positive, si può arrivare facilmente alle equazioni parametriche

$$x(t) = rt - r\sin(t) = r(t - \sin(t))$$
$$y(t) = r - r\cos(t) = r(1 - \cos(t))$$

dove r è il raggio della cerchio e t è il valore, in radianti, dell'angolo compreso tra il punto fisso in rotazione e il punto di contatto della circonferenza con la superficie (l'asse delle ascisse). Dopo aver percorso un angolo pari a 2π il punto torna alla situazione iniziale di contatto con l'asse x, precisamente nel punto $(2\pi a, 0)$, per poi ripetere la stessa traiettoria ciclicamente, descrivendo un nuovo arco di cicloide. Ci interessa ora studiare l'evoluta delle cicloide; ricordo che l'evoluta di una curva $\alpha(t)$ è data da $\gamma(t) = \alpha(t) + \dfrac{1}{\kappa(t)} \cdot n(t)$, dove $n(t)$ è il versore normale e $\kappa(t)$ è la curvatura della curva. Si ha

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (r(t - \sin(t)), r(1 - \cos(t)))$$

$$\dot{\alpha}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (r(1 - \cos(t)), r\sin(t))$$

$$\ddot{\alpha}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t)) = (r\sin(t), r\cos(t))$$

$$n(t) = \frac{(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{\|\dot{\alpha}(t)\|} = \frac{(-r\sin(t), r(1 - \cos(t)))}{r\sqrt{2(1 - \cos(t))}}$$

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3} = -\frac{1}{2r\sqrt{2(1 - \cos(t)}}$$

da cui

$$\gamma(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \cdot n(t) = (r(t + \sin(t)), r(\cos(t) - 1))$$

Abbiamo dunque trovato l'equazione dell'evoluta della cicloide iniziale, e possiamo osservare che questa curva è ancora una cicloide, traslata rispetto alla prima di πr lungo l'asse x e di $-2r$ lungo l'asse y.

La cicloide è un curva con notevoli proprietà, le quali furuno al centro di innumerevoli dispute tra gli scienziati dell'epoca; in particolare le sue proprietà

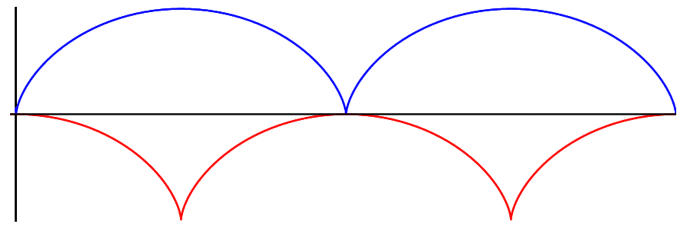


Figura 10: L'evoluta della cicloide (in rosso) è ancora una cicloide

fisico-matematiche hanno scatenato le più accese sfide in quel periodo.
Un pendolo che percorre una traiettoria cicloidale è isocrono (dal greco *isos*=uguale e *chronos*=tempo), ovvero il suo periodo rimane costante indipendentemente dall'ampiezza delle oscillazioni.
Una cicloide è inoltre tautocrona (dal greco *tauto*=identico e *chronos*= tempo), poichè due oggetti uguali posti a varie altezze e lasciati cadere, raggiungono il punto di quota minima nello stesso istante. Queste due proprietà sono simili e fu Huygens ad accorgersi di entrambe. In precedenza si pensava che fosse un arco di circonferenza ad avere queste proprietà (di questo era convinto anche Galileo), ed in effetti per piccole oscillazioni la cicloide è approssimabile ad una circonferenza.
Infine la cicloide è anche brachistocrona (dal greco *brachistos*=più corto e *chronos*=tempo), per cui è la curva su cui una massa che scivola impiega meno tempo per percorre il tragitto tra due punti (non allineati verticalmente). I primi ad accorgersi di questo fatto furono i fratelli Bernoulli che confutarono la credenza più intuitiva come fosse il segmento di retta collegante i due punti il cammino percorribile nel più breve tempo possibile.

La brachistocrona

Nel 1696 Johann Bernoulli lanciò una sfida ai matematici dell'epoca proponendo questo problema:

Dati due punti A e B in un piano verticale, determinare il cammino (ovvero la curva) lungo la quale la particella M in movimento, partendo da A e scendendo solamente sotto l'influenza del proprio peso, raggiunge B nel tempo più breve.

Il problema venne risolto l'anno successivo in maniera indipendente da Newton, Leibniz, de l'Hopital, Jacob Bernoulli e lo stesso Johann Bernoulli.
Questa questione non era però nuova; infatti nel 1638 Galileo aveva già considerato il problema, proponendo erroneamente come soluzione un arco di circonferenza.
Di quelle citate in precedenza, la soluzione proposta da Johann Bernoulli è sicuramente la più elegante, che ora andiamo a descrivere. Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano tale che il punto A sia l'origine del riferimento, ovvero $A = (0, 0)$, e che l'asse y sia rivolto verso il basso. Il primo passo, dovuto a Galileo, consiste nel provare che in ogni momento della discesa vale l'uguaglianza $v = \sqrt{2gy}$, dove y è la coomponente ordinata della particella, v è la sua velocità e g è l'accelerazione di gravità. Questo fatto si ricava dalla legge di conservazione dell'energia; infatti si ha che $E_c + E_p = costante$, ovvero $\frac{1}{2}mv^2 + mgy = costante$. Avendo scelto come origine il punto $(0, 0)$ e supponendo che la particella inizialmente sia ferma, quindi $v = 0$, otteniamo $\frac{1}{2}mv^2 + mgy = 0$, da cui $v^2 = 2gy$.

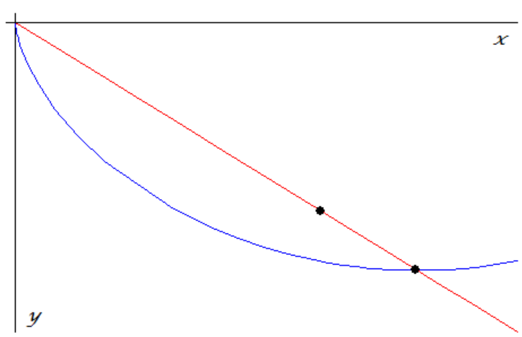
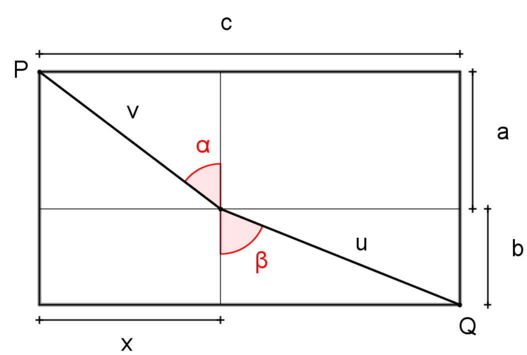


Figura 11: La curva in blu è la brachistocrona

Bernoulli discretizza il problema, dividendo il piano in strisce orizzontali e assumendo che in ogni striscia la particella si muova in linea retta. Passando al limite, facendo tendere a zero lo spessore delle strisce, si ottiene la curva cercata. A questo punto il problema consiste nel determinare l'angolo che ogni tratto rettilineo forma con la verticale. É qui che sta l'ingegno di Bernoulli, il quale utilizza un risultato proveniente dalla fisica, il Principio di Fermat o legge di Snell, che descrive le modalità di rifrazione di un raggio luminoso; infatti la luce segue naturalmente il cammino più breve possibile.



Sia u la velocità in una striscia con angolo α e v la velocità nella striscia successiva con angolo β. Per la legge di Snell vale dunque l'uguaglianza

$$\frac{v}{\sin\alpha} = \frac{u}{\sin\beta}.$$

Infatti, indichiamo il il tempo impiegato dalla particella per andare da P a Q con

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{v} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}}{u}.$$

Il tempo è minimo quando si annulla $\dot{T}(x)$, per cui

$$\dot{T}(x) = \frac{1}{v}\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{1}{u}\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2 + b^2}} = \frac{\sin\alpha}{v} - \frac{\sin\beta}{u} = 0,$$

da cui appunto

$$\frac{v}{\sin\alpha} = \frac{u}{\sin\beta}.$$

Passando al limite α è l'angolo formato dalla tangente alla curva con la verticale, e si ottiene $\dfrac{v}{\sin\alpha} = K$, dove K è una costante. Valgono inoltre le uguaglianze $\dot{y} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ e $\dfrac{1}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = \sin\alpha$, da cui

$$v = K \sin\alpha = K \frac{1}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}.$$

Ricordando che $v = \sqrt{2gy}$ otteniamo

$$2gy(1+\dot{y}^2) = K^2$$

$$\dot{y}^2 = \frac{c-y}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{c-y}{y}}$$

dove c è una costante il cui valore è dato da $c = \dfrac{K^2}{2g}$. Possiamo riscrivere l'ultima equazione differenziale come

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{y}{c-y}}$$

Considerando la sostituzione

$$y = y(u) = c \sin^2 u = \frac{c}{2} - \frac{c}{2} \cos 2u$$

si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{du} = 2c \sin^2 u$$

ed integrando rispetto a u si trova come soluzione

$$x(u) = \frac{c}{2} 2u - \frac{c}{2} \sin 2u.$$

A questo punto Bernoulli conclude affermando

"ex qua concludo Curvam Brachystochronam esse Cycloidem vulgarem"

ovvero la curva brachistocrona trovata non è altro che la volgare cicloide. Infatti

$$(x(u), y(u)) = \left(\frac{c}{2}(2u - \sin 2u), \frac{c}{2}(1 - \cos 2u) \right)$$

è una parametrizzazione della cicloide, come visto in precedenza.

La tautocrona

Nel 1673 Huygens si pose il seguente problema.

Modificare la traiettoria di un pendolo in modo tale che il periodo sia indipendente dall'ampiezza dell'oscillazione.

L'idea di Huygens fu di modificare la traiettoria circolare compiuta tradizionalmente dal pendolo, in modo che la forza di accelerazione sia proporzionale alla lunghezza dell'arco s. Il moto del pendolo verrà quindi descritto dall'equazione differenziale

$$\ddot{s} + K \cdot s = 0,$$

che ha come soluzione $s(t) = A\sin(\sqrt{K}t)$, dove A indica l'ampiezza iniziale.

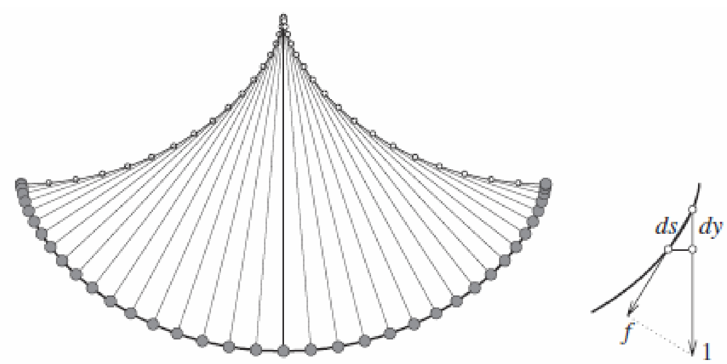


Figura 12: Il pendolo tautocrono di Huygens

Dalla figura a destra vediamo che i due triangoli sono simili. La forza di accelerazione, tangente alla curva in ogni punto, è data da $f = -\frac{dy}{ds}$; siccome l'accelerazione è data anche da $f = \ddot{s}$, combinando l'equazione di Huygens si ottiene $K \cdot s = -f = \frac{dy}{ds}$, da cui ricaviamo

$$dy = K \cdot sds.$$

Se poniamo $s = 0$ per $y = 0$, in modo che l'origine si nel punto più basso, integrando si ottiene

$$y = \frac{K}{2} \cdot s^2, \qquad \text{ovvero} \qquad s = \sqrt{\frac{2y}{K}}$$

Di conseguenza per questa curva l'altezza è proporzionale al quadrato della lunghezza dell'arco.

Inserendo infine il valore $s = \sqrt{\frac{2y}{K}}$ nell'equazione $dy = K \cdot sds$ si ottiene

$$dy = K \cdot \sqrt{\frac{2y}{K}} \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

da cui

$$dy^2 = 2K \cdot y(dx^2 + dy^2)$$

$$(\frac{1}{2K \cdot y} - 1)dy^2 = dx^2$$

$$(\frac{c}{y} - 1)dy^2 = dx^2$$

$$\sqrt{\frac{c-y}{y}}dy = dx$$

dove $c = \frac{1}{2K}$.

Dunque a meno di una traslazione in y, quella trovata è esattamente l'equazione della cicloide, come notò lo stesso Johann Bernoulli nel 1697 affermando

"animo revolvens inexpectatam illam identitatem Tautochronae Hugeniae nostrae que Brachystochronae"

4 Lemniscata

Per *funzione ellittica* si intende una funzione definita sul piano complesso che risulta periodica secondo due direzioni. Le funzioni ellittiche si possono considerare come una generalizzazione delle funzioni trigonometriche in quanto funzioni periodiche con un solo periodo. Storicamente le funzioni ellittiche sono state scoperte come funzioni inverse degli integrali ellittici i quali a loro volta sono stati studiati in connessione con il problema della lunghezza dell'arco dell'ellisse e proprio per questo si chiamano funzioni ellittiche.
La svolta per lo studio di queste funzioni ellittiche, che rappresentavano fino al 1800 un problema irrisolvibile, fu realizzata da Gauss il quale affermò che non si poteva studiare l'integrale ellittico $u = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}dt$, ma la sua funzione inversa x in funzione di u. Egli definì $x = sl(u)$ e trovò che sl, come la funzione seno, è periodica:

$$sl(u + 2\pi\omega) = sl(u)$$

dove ω è un numero reale.
La storia delle funzioni ellittiche è forse una delle più curiose di tutta la matematica: si passa da un'idea analitica molto complicata relativa a integrali nella forma $\int R(t, \sqrt{p(t)})dt$, dove R è una funzione razionale e p è un polinomio di terzo o quarto grado, ad un'idea geometrica come la superficie di un toro. La rappresentazione delle funzioni ellittiche attraverso la geometria è un passaggio molto importante che richiederà la scoperta dei numeri complessi e della loro natura geometrica. Infatti con lo sviluppo dei numeri complessi si arrivò a importanti risultati anche nel campo delle funzioni ellittiche.
Questi integrali vengono detti *integrali ellittici* perché il primo esempio si trova studiando la lunghezza dell'arco di un ellisse. Gli integrali in questione sono molto importanti sia in geometria e in meccanica in quanto utili per trovare la lunghezza dell'arco non solo dell'ellisse ma anche dell'iperbole, il periodo di un pendolo semplice e l'allungamento di un elastico. Quando vennero studiati nel diciassettesimo secolo questi problemi di natura geometrica e meccanica, si riscontrò subito che la definizione di integrale di Leibniz non veniva soddisfatta. Liebniz considerava soluzione di un integrale della forma $\int f(x)dx$ una certa funzione conosciuta $g(x)$ tale che $g(x)' = f(x)$: questa funzione $g(x)$ era conosciuta e poteva essere algebrica, esponenziale e rispettive inverse. Il problema fondamentale è che con gli integrali ellittici

la primitiva relativa all'integrale non era del tipo richiesto da Liebniz. Bernoulli fu il primo a studiare questi tipi di integrali non elementari e la chiave di svolta sullo studio di questi integrali avvenne con lo studio di una curva particolare, detta *lemniscata*.
La lemniscata fu descritta dal grande matematico svizzero Jakob Bernoulli, da cui prende il nome, nel'Acta Eruditorum (giornale scentifico tedesco) nel 1694. Tuttavia egli non era a conoscenza del fatto che 14 anni prima l'italiano Giovanni Cassini, nella ricerca della traiettoria relativa della terra intorno al sole, aveva studiato una famiglia di curve, chiamate ovali di Cassini, di cui la lemniscata di Bernoulli era un caso particolare. Nel 1750 Giovanni Fagnano scoprì altre proprietà della curva, le quali appena un anno dopo portarono Eulero a porre le basi per lo studio delle funzioni ellittiche. Anche McLaurin, Abel e Watt si interessarono alla curva. Il nome lemniscata fu dato alla curva proprio da Bernoulli, e deriva dal latino lemniscus che nell'antica Roma era un nastro pendente dalle corone.

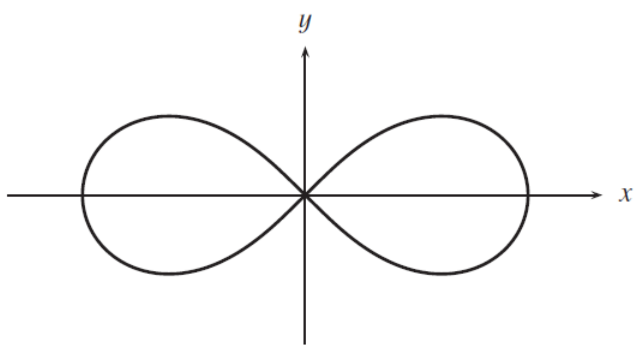


Figura 13: La lemniscata di Bernoulli.

La lemniscata fu descritta da Bernoulli, come variazione del metodo di costruzione di un ellisse: infatti, mentre quest'ultima è il luogo dei punti per cui la somma delle distanze dai due fuochi è costante, la lemniscata è il luogo dei punti per i quali il prodotto di queste distanze è costante. Detti F e F' i fuochi, a la loro distanza dal centro, la lemniscata di Bernoulli è il luogo dei punti tali che:

$$\overline{PF} \cdot \overline{PF'} = a^2.$$

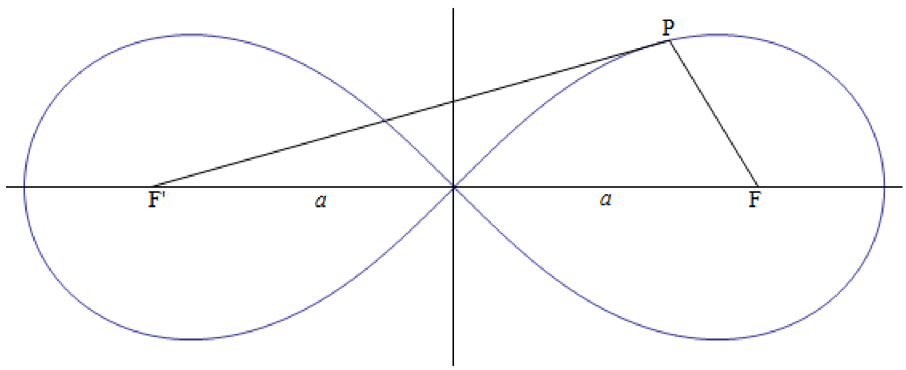


Figura 14: Costruzione geometrica della lemniscata.

La lemniscata di Bernoulli è una quartica razionale, ovvero ammette una equazione algebrica di quarto grado, con un punto doppio nodale nel centro, cioè nel punto alla stessa distanza dai due fuochi. La sua equazione algebrica è:

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

e riscritta in coordinate polari diventa:

$$r^2 = \cos 2\theta.$$

Bernoulli mostrò che la lunghezza dell'arco di questa curva è data dall'integrale ellittico $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$, detto *integrale della lemniscata.*
Come abbiamo detto la lemniscata è un caso particolare di *ovali di Cassini*, luogo dei punti i cui prodotti delle distanze dai fuochi è costante: nel caso particolare della lemniscata questa costante è uguale al quadrato della semi distanza tra i fuochi. Negli ovali di Cassini se la costante è maggiore si ottengono degli ovali, se minore si ottengono due figure simili a piccole gocce fino ad arrivare al caso di due circonferenze. Inoltre, come si può vedere dalla Figura 15, gli ovali di Cassini sono le curve risultanti dalle intersezioni di un toro, con un piano parallelo all'asse di rotazione: in particolare la lemniscata di Bernoulli è l'intersezione di un toro con un piano parallelo all'asse di rotazione e tangente al punto interno del toro.

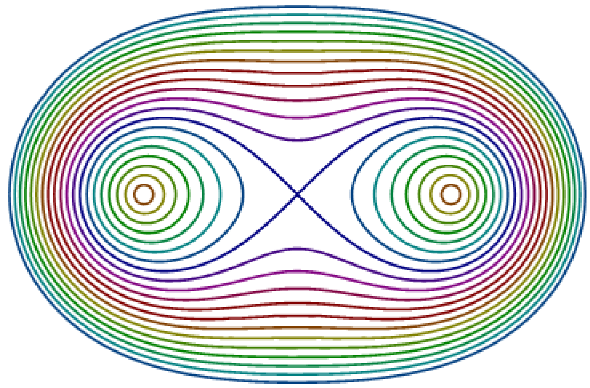


Figura 15: Gli ovali di Cassini.

Con lo sviluppo della teoria relativa agli integrali ellittici e alle funzioni ellittiche si trovò una corrispondenza fra la lemniscata e l'integrale della lemniscata. Dopo l'integrale dell'arcoseno $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, l'integrale della lemniscata è molto semplice da manipolare. Proprio per questo motivo dall'integrale della lemniscata è possibile ricavare alcune proprietà generali degli integrali ellittici, come il teorema dell'addizione.

4.1 Duplicazione dell'arco della lemniscata

Il teorema dell'addizione è espresso dalla formula $f(u_1 + u_2)$ in termini di $f(u_1)$ e $f(u_2)$. Per esempio, la formula d'addizione per il seno è data da:

$$\sin(u_1 + u_2) = \sin u_1 \cos u_2 + \sin u_2 \cos u_1.$$

Dalla relazione fra seno e coseno, ovvero $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$ si può riscrivere la formula nel seguente modo:

$$\sin(u_1 + u_2) = \sin u_1 \sqrt{1 - \sin^2 u_2} + \sin u_2 \sqrt{1 - \sin^2 u_1}.$$

Per semplificare i conti analizzeremo un caso particolare:

$$\sin 2u = 2 \sin u \sqrt{1 - \sin^2 u}. \tag{1}$$

Se poniamo

$$u = \sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

e quindi

$$2u = 2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Ma per (1) si ha anche che

$$2u = sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}),$$

in questo modo

$$2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{2x\sqrt{1-x^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Considerando che $\sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ rappresenta l'angolo u mostrato in Figura 16, l'equazione appena vista ci fa osservare che l'angolo (o la lunghezza dell'arco) u è doppio in quanto va da x a $2x\sqrt{1-x^2}$. Il secondo estremo, ottenuto tramite operazioni razionali, è costruibile partendo da x con la riga e il compasso.

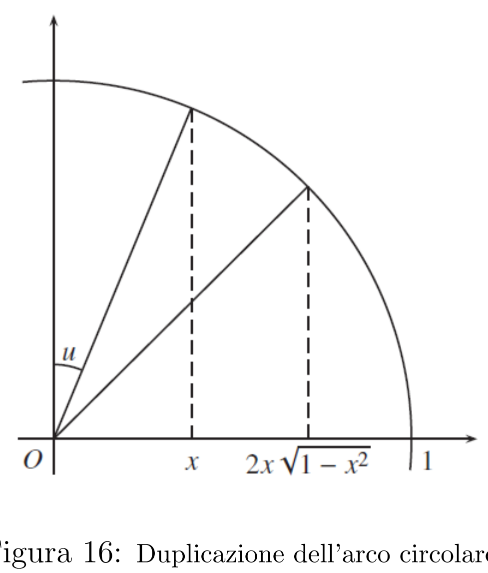


Figura 16: Duplicazione dell'arco circolare.

Fagnano nel 1718 dimostra che l'arco di lemniscata si può duplicare con riga e compasso nel seguente modo:

$$2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{2x\frac{\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Se infatti $g(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ e $f(u) = g^{-1}(u)$ allora

$$f(2u) = \frac{2f(u)\sqrt{1-f(u)^4}}{1+f(u)^4}.$$

Calcoliamo

$$l(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

Tenuto conto del seguente cambio di variabile:

$$t^2 = \frac{2v^2}{1+v^4}$$

$$t(v) = \sqrt{2}\frac{v}{\sqrt{1+v^4}}$$

attraverso alcuni passaggi otteniamo

$$2t = \frac{4v(1+v^4) - 4v^3(2v^2)}{(1+v^4)^2}\frac{dv}{dt} = \frac{4v - v^5}{1+v^4}\frac{dv}{dt} = \frac{4v(1-v^4)}{(1+v^4)^2}\frac{dv}{dt}.$$

Allora

$$\int_0^x \frac{dv}{\sqrt{1+v^4}} = \int_0^{t(x)} \frac{1}{\sqrt{1+v^4}}\frac{dv}{dt}dt = \int_0^{\sqrt{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}} \frac{1}{\sqrt{1+v^4}}\frac{2t(1+v^4)^2}{4v(1-v^4)}dv$$

dove

$$\frac{dt}{dv} = \frac{4v(1-v^4)}{(1+v^4)^2}\frac{1}{2t} = \frac{4v(1-v^4)}{(1+v^4)^2}\frac{\sqrt{1+v^4}}{2\sqrt{2}v} = \sqrt{2}\frac{1-v^4}{(1+v^4)\sqrt{1+v^4}} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{1-t^4}}{\sqrt{1+v^4}}$$

dunque $\displaystyle\frac{dv}{dt}\frac{1}{\sqrt{1+v^4}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-t^4)}}$.
Dopo questa prima sostituzione si ottiene:

$$\int_0^x \frac{dv}{\sqrt{1+v^4}} = \int_0^{\sqrt{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}} \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

ovvero
$$\sqrt{2}\int_0^x \frac{dv}{\sqrt{1+v^4}} = \int_0^{\sqrt{2}\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$
Con un'ulteriore sostituzione $v^2 = \dfrac{2w^2}{1-w^4}$, si dimostra analogamente che:
$$\sqrt{2}\int_0^x \frac{dw}{\sqrt{1-w^4}} = \int_0^{v(x)} \frac{dv}{\sqrt{1+v^4}}.$$
Per duplicare la lemniscata devo fare la composizione di queste due sostituzioni:
$$2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$
con
$$t^2 = \frac{2v^2}{1+v^4} = \frac{2(\frac{2w^2}{1-w^4})}{1+(\frac{2w^2}{1-w^4})^2} = \frac{4w^2(1-w^4)}{(1+w^4)^2}.$$

Riferimenti bibliografici

[1] E. Hairer and G. Wanner, *Mathematics and Its History*, Springer, 2010.

[2] J. Stillwell, *Analysis and Its History*, Springer, 2008.