GEOMETRIA A 2016/17 – Esercizi 18-20 Dicembre 2017

Esercizio 1. Si determini, per ciascuno dei seguenti insiemi di vettori $\{v_1, \dots, v_3\} \in V$ e $\{w_1, \dots, w_3\} \in W$, quante applicazioni lineari $F\colon V \to W$ esistono tali che $\forall i\ F(v_i) = w_i$:

(1) $\{t^2+1, t+1, t^2+t\} \in V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $\{1, t-1, t^2-t\} \in W = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

(2) $\{t^2+1, t+1, t^2+t\} \in V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $\{1, t-1, t^2-t\} \in W = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$

(3) $\{t^2+1, t+1, t^2+t\} \in V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$, $\{1, t-1, t^2-t\} \in W = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

(4) $\{t^2-1, t+1, t^2+t\} \in V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $\{1, t-1, t^2-t\} \in W = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

(5) $\{t^2-1, t+1, t^2+t\} \in V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $\{(t-1)^2, t-1, t^2-t\} \in W = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

In ciascuno dei cinque casi si determino i possibili valori di $F(t^2)$ al variare di F tra le applicazioni lineari $F\colon V \to W$ tali che $\forall i\ F(v_i) = w_i$.

Esercizio 2. Si considerino le seguenti basi di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{b} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathbf{b}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Si calcoli $M_{\mathbf{b},\mathbf{b}'}(1_{\mathbb{R}^3})$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale con base $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e sia $F : V \to V$ l'endomorfismo definito da

$$F(x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3) = -2(x_2 + x_3)e_1 + 2(x_1 + 2x_2 + x_3)e_2 - 2(x_1 + x_2)e_3.$$

(1) Si determini la matrice $M_{\mathbf{e}}(F)$.

(2) Si determini la matrice $M_{\mathbf{v}}(F)$, con $\mathbf{v} = \{v_1 = -e_1 + e_3, v_2 = e_2 - e_3, v_3 = e_1 - e_2 + e_3\}$.

Esercizio 4. Si considerino:

- uno spazio vettoriale V con basi $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\mathbf{v} = \{v_1 = e_1 + e_3, v_2 = e_3, v_3 = e_1 + e_2\}$;
- uno spazio vettoriale W con basi $\mathbf{f} = \{f_1, f_2\}$ e $\mathbf{u} = \{u_1 = f_1 + 3f_2, u_2 = 2f_1 + f_2\}$;
- un'applicazione lineare $F : V \to W$ definita da $F(v_1) = f_1 + f_2$, $F(v_2) = f_1$ e $F(v_3) = 2f_1 + f_2$.

Determinare le matrici $M_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F)$ e $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(F)$.

Esercizio 5. Siano $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e $\{f_1, f_2, f_3\}$ le basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$ e sia f l'applicazione lineare definita da

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3 + we_4) = (2x - y + z + 5w)f_1 + (-x + 2y + 3z - 4w)f_2 + (x + 5z + 6w)f_3.$$

Determinare il nucleo e l'immagine di f.

Esercizio 6. Sia f un endomorfismo dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ definito da

$$f(1) = 1 + t + t^2, \quad f(t) = 1 - 2t, \quad f(t^2) = 1 - t + \frac{1}{3}t^2.$$

(1) Determinare il nucleo di f, una sua base e la sua dimensione.

(2) Determinare l'immagine di f, una sua base e la sua dimensione.

Esercizio 7. Stabilire se gli endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ definiti dalle seguenti matrici sono diagonalizzabili

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -10 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e, in caso di risposta positiva, calcolare una base diagonalizzante.

Esercizio 8. Stabilire se gli endomorfismi di $\mathbb{C}^4$ definiti dalle matrici A, B e C del precedente esercizio sono diagonalizzabili e, in caso affermativo, calcolare una base diagonalizzante.

Esercizio 9. Calcolare la matrice X^{100000} con

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 10. Si stabilisca se l'endomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[t]_{\leqslant 100} & \longrightarrow & \mathbb{K}[t]_{\leqslant 100} \\ P(t) & \longmapsto & P(t) + P'(t) \end{array}$$

è diagonalizzabile.

Esercizio 11. Si stabilisca per quali valori del parametro reale k l'operatore

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ky \\ ky \end{pmatrix}$$

su $\mathbb{R}^2$ è diagonalizzabile

Esercizio 12. Si stabilisca per quali valori del parametro k l'operatore

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ky \\ -kx \end{pmatrix}$$

su $\mathbb{R}^2$ è diagonalizzabile

Esercizio 13. Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(i) Si verifichi che $\mathcal{B} = \{e_1 + 2e_3, e_1 + e_2, e_2 + e_3\}$ sia una base.

(ii) Sia $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$M_{\mathcal{E}\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2h^2+1 & 1 & h^2 \\ 0 & h & h \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si trovi $M_{\mathcal{E}}(\varphi)$.

(iii) Si calcoli per quali $h \in \mathbb{R}$, φ non è suriettiva e si calcoli, in corrispondenza di tali valori, una base per l'Immagine ed il Nucleo di φ.

(iv) Si discuta la diagonalizzabilità di φ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

(v) Se possibile, per $h = 2$ si calcoli una base di autovettori per φ.

Esercizio 14. Sia $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo dato da:

$$f_a(x, y, z) = (x + y + (a-1)z, ax + 2y, x - 3y - z) \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

(i) Determinare per ogni $a \in \mathbb{R}$, i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f_a(v) = (0, -1, 9a-3)$ e indicarne la dimensione come sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$.

(ii) Calcolare la matrice associata all'endomorfismo f_a^2 rispetto alla base canonica.

(iii) Determinare per quali valori di a l'endomorfismo f_a^2 è iniettivo e per quali è suriettivo.

(iv) Calcolare il rango di f_a^2 per $a = \frac{2}{3}$.

Esercizio 15. Si considerino le funzioni lineari $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ associate, rispettivamente, alle matrici

$$A = M_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = M_g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare la dimensione e una base per $\mathrm{Ker}(g \circ f)$ e $\mathrm{Im}(g \circ f)$.

(ii) Sia H la giacitura dell'iperpiano di $\mathbb{R}^4$ con coordinate $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ di equazione cartesiana $x_4 = 0$. Determinare la dimensione e una base del sottospazio $G = H \cap \mathrm{Ker}(g \circ f)$.

(iii) Calcolare, se possibile, $(g \circ f)(H)$ e $(g \circ f)^{-1}(K)$, dove K è la giacitura dell'iperpiano di $\mathbb{R}^3$ con coordinate $\{x, y, z\}$ di equazione $y = 0$.

Esercizio 16. Sia $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ una base di $\mathbb{R}^4$ e sia $k \in \mathbb{R}$. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo con $v = -e_1 + e_3$ autovettore di autovalore k e

$$f(e_1) = e_1 + v, \qquad f(e_2 + e_3) = e_3 - e_4, \qquad f(e_3 + e_4) = e_1 + ke_4.$$

(i) Determinare il polinomio caratteristico e gli autovalori di f, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Scelto un autovalore λ di f con molteplicità algebrica diversa da 1, trovare una base per l'autospazio di f associato a λ.

(iii) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$, f è diagonalizzabile.

Esercizio 17. Si indichino con $\{e_1, e_2, e_3\}$ e $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ rispettivamente le basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e di $\mathbb{R}^4$ e siano $k, a \in \mathbb{R}$. Si considerino i vettori

$$v_1 = e_1 + e_3 \qquad v_2 = e_2 \qquad v_3 = e_1 - e_3 \qquad v_4 = e_3$$

$$v_1 = -kf_4 \qquad w_2 = -2f_1 + (k-4)f_2 - kf_3 - 2f_4 \qquad w_3 = 2f_1 + 4f_3 + (2+k)f_4 \qquad w_4 = -f_1 + af_3 - (k+1)f_4$$

(i) Si dica per quali valori dei parametri esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che $f(v_i) = w_i$ per ogni i. Si scriva la matrice rappresentativa di queste applicazioni lineari rispetto alle basi standard.

(ii) Per i valori ricavati nel punto precedente, esplicitare una base per $\mathrm{Ker}(f)$ e $\Im(f)$.

(iii) Si ponga $k = 0$ e si consideri l'applicazione $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g(f_i) = e_i$ per $i \leq 3$ e $g(f_4) = 0$. Si ricavi $\mathrm{Ker}(h)$ e $Im(h)$ per $h = g \circ f$ e $h = (g \circ f)^2$.