Esercitazioni di Geometria A: curve algebriche

24-25 maggio 2016

Esercizio 1
Sia $\mathbb{P}^2$ il piano proiettivo complesso munito delle coordinate proiettive $(x_0 : x_1 : x_2)$. Sia r_∞ la retta proiettiva di equazione $x_0 = 0$ e si consideri il piano affine complesso $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \{r_\infty\}$ munito delle coordinate affini (y_1, y_2) con $y_i = x_i/x_0$ per $i = 1, 2$. Si considerino le curve proiettive $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ descritte dalle relazioni

$$\mathcal{C} : f(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - x_0x_2 - x_0^2 = 0$$

$$\mathcal{D} : g(x_0, x_1, x_2) = x_2^2 - 2x_1^2 - x_0x_2 + 2x_0^2 = 0.$$

- Si dica se esiste una proiettività che manda $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$. Si scrivano le forme canoniche delle due curve;
- Si considerino le *tracce affini* delle due curve, cioè le curve affini $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cap \mathbb{A}^2$ e $\mathcal{D}' = \mathcal{D} \cap \mathbb{A}^2$. Se ne scrivano le equazioni nelle coordinate (y_1, y_2);
- Dire se esiste un'affinità che manda $\mathcal{C}'$ in $\mathcal{D}'$. Si scrivano le forme canoniche delle due curve;
- Calcolare con il metodo del risultante le intersezioni tra $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{D}'$ e le molteplicità di intersezione di $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{D}'$ nei vari punti. Dedurre i punti di intersezione tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.

Soluzione dell'esercizio 1
Le due curve sono coniche proiettive. Le matrici associate sono

$$A_{\mathcal{C}} = \left[\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad A_{\mathcal{D}} = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & -2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

e hanno determinante $\mathrm{Det}(A_{\mathcal{C}}) = -1/4$ e $\mathrm{Det}(A_{\mathcal{D}}) = -7/2$ quindi sono entrambe coniche non degeneri. Siccome sul campo complesso l'unico invariante delle coniche è il rango della matrice associata abbiamo che le due coniche sono proiettivamente equivalenti e quindi esiste una proiettività che trasformi una nell'altra. La forma canonica di entrambe le coniche è $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$.

Le equazioni delle tracce affini sono

$$f_1 = y_1^2 - y_2 - 1 = 0$$

$$g_1 = y_2^2 - 2y_1^2 - y_2 + 2 = 0.$$

Si vede facilmente che con il cambio di coordinate $y_2' = y_2 + 1$ la prima è ridotta a forma canonica ($Y = X^2$): si tratta di una parabola non degenere. La seconda conica, che sappiamo essere non degenere, è una conica a centro con equazione canonica $X_2^2 + Y_2^2 = 1$

poichè il determinante della matrice dei termini quadratici è non nullo. Pertanto le due coniche affini non sono equivalenti e non esiste un'affinità che mandi una nell'altra.

Calcoliamo il risultante dei polinomi f_1 e g_1 rispetto alla variabile y_1:

$$\mathrm{Res}(f_1, g_1) = \left| \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -(y_2+1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -(y_2+1) \\ \hline -2 & 0 & y_2^2 - y_2 + 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & y_2^2 - y_2 + 2 \end{array} \right] \right| =$$

$$= \left| \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -(y_2+1) \\ \hline 0 & y_2^2 - y_2 + 2 & 0 \\ -2 & 0 & y_2^2 - y_2 + 2 \end{array} \right] \right| - 2 \left| \left[\begin{array}{ccc} 0 & -(y_2+1) & 0 \\ 1 & 0 & -(y_2+1) \\ \hline -2 & 0 & y_2^2 - y_2 + 2 \end{array} \right] \right| =$$

$$= (y_2^2 - y_2 + 2) \left| \left[\begin{array}{cc} 1 & -(y_2+1) \\ -2 & y_2^2 - y_2 + 2 \end{array} \right] \right| - 2(y_2+1) \left| \left[\begin{array}{cc} 1 & -(y_2+1) \\ -2 & y_2^2 - y_2 + 2 \end{array} \right] \right| =$$

$$= (y_2^2 - y_2 + 2 - 2(y_2+1))(y_2^2 - y_2 + 2 - 2(y_2+1)) = y_2^2(y_2-3)^2.$$

Questo ci dice che i punti di intersezione tra le due curve sono da cercarsi in corrispondenza dei valori 0 e 3 della variabile y_2. Siccome $f_1(y_1, 0) = y_1^2 - 1 = (y_1+1)(y_1-1)$ e $g_1(y_1, 0) = 2(y_1+1)(y_1-1)$ abbiamo che i punti

$$P_{0\pm} : (\pm 1, 0)$$

sono punti comuni alle due curve e la molteplicità di intersezione delle due curve in questi due punti è 1. In modo del tutto analogo si dimostra che vale la stessa conclusione per i punti

$$P_{1\pm} : (\pm 2, 3).$$

Siccome abbiamo 4 punti come intersezione di due coniche affini avremo che l'intersezione delle coniche proiettive è data dagli stessi punti per il teorema di Bezout.

Esercizio 2
Sia $\mathbb{P}^2$ il piano proiettivo complesso munito delle coordinate proiettive (x_0, x_1, x_2). Sia r_∞ la retta proiettiva di equazione $x_0 = 0$ e si consideri il piano affine complesso $\mathbb{A}^2 = \mathbb{P}^2 \setminus \{r_\infty\}$ munito delle coordinate affini (y_1, y_2) con $y_i = x_i/x_0$ per $i = 1, 2$. Si consideri la cubica affine $\mathcal{C}$ di equazione

$$g(y_1, y_2) = a y_1^3 + b y_1^2 y_2 + c y_1 y_2 + d y_1^2 + e y_2 + f = 0$$

dove $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$ sono parametri complessi con a, b non entrambi nulli. Per quali valori dei parametri

- l'asse y_1 è una componente di $\mathcal{C}$?
- l'origine è un punto singolare per $\mathcal{C}$ e $2y_1 + 3y_2 = 0$ è una tangente principale?
- l'origine è un flesso liscio per $\mathcal{C}$?
- si ha $\mathcal{C} \cap r_\infty = \{[0,0,1], [0,3,4]\}$?

Si considerino dei valori dei parametri per cui $\mathcal{C}$ passa per $(0, 2)$, per cui $y_2 = 0$ è tangente all'infinito a $\mathcal{C}$ e per cui $x + y = 2$ è tangente a $\mathcal{C}$ in $P = (1, 1)$. Se ne ricavino gli eventuali punti singolari della chiusura proiettiva.

Soluzione dell'esercizio 2
L'asse y_1 ha equazione $y_2 = 0$ quindi la prima richiesta è soddisfatta quando riusciamo a scomporre g come un polinomio di secondo grado per y_2. Questo chiaramente avviene se e solo se $a = d = f = 0$.

Perchè l'origine sia un punto singolare si deve avere $f = 0$ (in modo che la cubica passi per $(0, 0)$) ed $e = 0$ in modo che il punto sia singolare. Le tangenti principali in $(0, 0)$ sono quindi $y_1 = 0$ e $dy_1 + cy_2 = 0$.Per soddisfare l'ultima richiesta dobbiamo quindi imporre $3d - 2c = 0$. Di conseguenza qualsiasi scelta dei parametri che soddisfa $f = e = 3d - 2c = 0$ soddisfa le richieste.

Siccome vogliamo che l'origine sia un punto liscio della curva avremo $f = 0$ e $e \neq 0$. In tal caso, l'unica tangente alla curva nell'origine è $y_2 = 0$. Per capire la molteplicità di intersezione nell'origine tra $\mathcal{C}$ e $y_2 = 0$ basta calcolare la molteplicità del fattore t nel polinomio

$$g(t, 0) = at^3 + dt^2 = t^2(at + d)$$

che è 2 se $d \neq 0$ e 3 altrimenti. Per avere un flesso dobbiamo quindi richiedere $d = f = 0$ e $e \neq 0$.

Omogeneizziamo l'equazione per ricavare l'equazione della chiusura proiettiva e poi poniamo $x_0 = 0$ per intersecare con la retta all'infinito ottenendo

$$ax_1^3 + bx_1^2x_2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1^2(ax_1 + bx_2) = 0$$

Il primo fattore ci da il punto $[0, 0, 1]$ mentre il secondo fattore $[0, b, -a]$. Dobbiamo quindi richiedere $3a + 4b = 0$.

Il passaggio per $(0, 2)$ dà come condizione $2e + f = 0$. Il punto all'infinito della retta $y_2 = 0$ è $[0, 1, 0]$. Possiamo omogeneizzare g e poi deomogeneizzare rispetto alla variabile x_1 in modo da studiare l'equazione della cubica in uno spazio affine coordinato diverso in cui $[0, 1, 0]$ è un punto al finito e, per la precisione, è l'origine. Otteniamo

$$\tilde{g}(x_0 : x_1 : x_2) = ax_1^3 + bx_1^2x_2 + cx_0x_1x_2 + dx_0x_1^2 + ex_0^2x_2 + fx_0^3 = 0$$

e, deomogeneizzando e definendo $w_i = x_i/x_1$ con $i = 0, 2$

$$g'(w_0, w_2) = \tilde{g}(x_0/x_1 : 1 : x_2/x_1) = a + bw_2 + dw_0 + cw_0w_2 + ew_0^2w_2 + fw_0^3.$$

Il passaggio per $(0 : 1 : 0)$ equivale a chiedere $a = 0$ mentre la condizione di tangenza per la retta $y_2 = 0$ diventa la condizione di tangenza per la retta $w_2 = 0$: dobbiamo chiedere quindi $d = 0$. Per il punto $(1, 1)$ conviene traslare la cubica in modo che il punto $(1, 1)$ vada nell'origine. L'equazione della cubica traslata (poniamo già $a = d = 0$ per semplificarci i conti) è quindi

$$g(x + 1, y + 1) = (b + c + e + f) + x(2b + c) + y(b + c + e) + H.O.T.$$

Vogliamo quindi $b + c + e + f = 0$ e $2b + c = b + c + e$ cioè $b = e$. Riassumendo ci vanno bene i parametri che soddisfano

$$a = d = 2e + f = b + c + e + f = b - e = 0.$$

Questo sistema ha soluzione parametrica $(a, b, c, d, e, f) = (0, b, 0, 0, b, -2b)$ che quindi da luogo ad un'unica cubica possibile: quella di equazione

$$y_1^2y_2 + y_2 - 2 = 0$$

o, se vogliamo la sua chiusura proiettiva,

$$\tilde{g} = x_1^2 x_2 + x_0^2 x_2 - 2x_0^3 = 0.$$

Il gradiente di questo polinomio omogeneo è

$$(2x_0(x_2 - 3x_0), 2x_1x_2, x_1^2 + x_0^2)$$

e l'unico punto proiettivo che lo annulla, nonchè unico punto singolare della cubica, è $(0, 0, 1)$.

Esercizio 3
Si consideri la curva curva algebrica affine $\mathcal{C}$ definita dall'equazione

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^3 - 2y^2 + 2x = 0$$

dove x e y sono coordinate affini su $\mathbb{A}^2$. Studiare $\mathcal{C}$ e la sua chiusura proiettiva.

Soluzione dell'esercizio 3
Incominciamo calcolando i punti singolari della curva. Questi si ottengono come soluzioni del sistema

$$f(x, y) = f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$$

dove $f_x = \partial f/\partial x$ e $f_y = \partial f/\partial y$ sono le derivate parziali. Il gradiente è

$$\nabla f = (4x^3 - 6x^2 + 2, 4y^3 - 4y) = ((x - 1)^2(4x - 2), 4y(y - 1)(y + 1))$$

quindi i punti singolari sono da cercare tra quelli con ascissa 1 o $-1/2$ e ordinata $0, 1$ o -1. Andando a sostituire si vede che gli unici punti singolari sono

$$P_1 = (1, 1) \quad \text{e} \quad P_2 = (1, -1)$$

mentre gli altri punti non appartengono alla curva.

Ricaviamo i punti a tangente orizzontale, cioè i punti la cui tangente nel punto è dl tipo $y = k$. Questi sono tutti e soli i punti che soddisfano $f_x = f = 0$ (esclusi i punti singolari) e sappiamo già essere punti con ordinata 1 o $-1/2$. Se cerchiamo i punti con ascissa 1 che appartengono alla curva otteniamo solo i punti singolari (controllando direttamente o utilizzando il teorema di Bezout), che scartiamo. Poniamo quindi $x = -1/2$. I punti della curva che hanno ascissa $-1/2$ sono quelli che soddisfano la condizione

$$f(-1/2, 0) = y^4 - 2y^2 - 11/16 = 0.$$

Per risolvere l'equazione usiamo un piccolo trucco completando il quadrato:

$$y^4 - 2y^2 - 11/16 = y^4 - 2y^{+}1 - 27/16 = (y^2 - 1)^2 - 27/16$$

da cui si deduce che abbiamo due punti reali:

$$(-1/2, \sqrt{1 \pm 3\sqrt{3}/4})$$

e due punti immaginari le cui ordinate soddisfano $y^2 = 1 - 3\sqrt{3}/4$.

Passiamo alla chiusura proiettiva omogeneizzando il polinomio f e ottenendo l'equazione della chiusura proiettiva:

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - 2x_0x_1^3 - 2x_0^2x_2^2 + 2x_1x_0^3 = 0.$$

I punti singolari della chiusura proiettiva si ottengono annullando il gradiente di F:

$$\nabla F = (-2x_1^3 - 4x_2^2x_0 + 6x_1x_0^2, 4x_1^3 - 6x_1^2x_0 + 2x_0^3, 4x_2^3 - 4x_2x_0).$$

In realtà ci basta cercare i punti che stanno sulla retta all'infinito perchè abbiamo già tutte le soluzioni per i punti nell'affine: si ottengono scrivendo le coordinate proiettive di P_1 e P_2, cioè

$$[0, 1, 1] \quad \text{e} \quad [0, 1, -1].$$

Si vede facilmente che il sistema $\nabla F \equiv 0, x_0 = 0$ non ha nessuna soluzione a parte la terna $(0, 0, 0)$ che non da' luogo a nessun punto proiettivo.

Ricaviamo i punti all'infinito della quartica: per farlo basta risolvere il sistema $F = x_0 = 0$ che è equivalente a

$$x_1^4 + x_2^4 = x_0 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\left[0, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm i)\right].$$

Si tratta di 4 punti lisci e distinti.

Analizziamo in dettaglio i punti singolari. In realtà, siccome la quartica è simmetrica rispetto all'affinità $y \mapsto -y$, la quale scambia P_1 e P_2, ci basterà analizzarne uno solo. Trasliamo quindi $(1, 1)$ nell'origine e trasformiamo di conseguenza anche la quartica:

$$f(x-1, y-1) = f_1(x, y) = x^4 + 2x^3 + y^4 + 4y^3 + 4y^2.$$

Il complesso dei monimi di grado minimo è un quadrato (y^2) quindi avremo una sola tangente principale che, nelle coordinate traslate, ha equazione $y = 0$, mentre, se ritorniamo alle coordinate originali, è la retta $t_1 : y = 1$. Ricaviamo la molteplicità di intersezione tra la curva e la tangente considerando l'ordine di annullamento di t in $f(t, 1)$. Siccome

$$f(t, 1) = t^4 - 2t^3 + 2t - 1 = (t-1)^2(t+1)$$

avremo $I(\mathcal{C}, t_1, P_1) = 3$ quindi P_1 è una cuspide ordinaria (e lo stesso vale per P_2).

Infine ricaviamo i punti con ascissa nulla (tra cui c'è $(0, 0)$) e la molteplicità di intersezione tra la tangente in $(0, 0)$ e la quartica. I punti ad ascissa nulla si ottengono risolvendo

$$0 = f(0, y) = y^4 - 2y^2 = y^2(y^2 - 2)$$

sono cioè i punti $(0, 0)$ e $(0, \pm\sqrt{2})$. La tangente in $(0, 0)$ si ottiene annullando la parte lineare di f, cioè $t : x = 0$. Possiamo già concludere senza fare nessun conto grazie al teorema di Bezout: siccome $I(\mathcal{C}, t, (0, \pm\sqrt{2})) \geq 1$, $I(\mathcal{C}, t, (0, 0)) \geq 2$ e la somma di questi numeri deve dare al più 4 avremo che t ha molteplicità di intersezione 2 con $\mathcal{C}$ in $(0, 0)$.