Esercizi per Geometria II
Geometria affine e euclidea

Filippo F. Favale

4 marzo 2014

Esercizio 1
Si dica, per ciascuno dei seguenti casi, se A ha la struttura di spazio affine o euclideo su V.

- $A = \mathbb{R}^3$ con coordinate cartesiane ortonormali (x, y, z), $V = \mathbb{R}^2$ con l'applicazione $\phi : A \times A \to V$ che associa a due punti (P, Q) la proiezione del vettore $\overrightarrow{PQ}$ sul piano $z = 0$.
- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \in \mathbb{Q}\}$, $V = \mathbb{Q}$ inteso come spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$ con l'applicazione $\phi : A \times A \to V$ che associa alla coppia di punti $((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ il numero razionale $(x_1 - y_1) - (x_2 - y_2)$.
- $A = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq 3 \text{ e } p(0) = 1\}$, $V = \{M \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid M^T = M\}$. Definisco $p(x) + M$ come il polinomio
$$q(x) := p(x) + x \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2
Sia $\mathbb{A}^3$ lo spazio affine tridimensionale reale dotato di un riferimento cartesiano di coordinate (x, y, z) e origine O. Si considerino le rette r_1 e r_2 di equazioni parametriche

$$r_1 : \begin{cases} x = & 1 + s \\ y = & -1 + s \\ z = & 1 + s \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = & 2 + s \\ y = & -2 - s \\ z = & 1 \end{cases}$$

e la retta r_3 passante per il punto $P = (2, -4, -1)$ e $Q = (-1, -1, -1)$.

- Dopo avere ricavato la giacitura delle tre rette, descriverne la posizione reciproca.
- Siano Π_1 e Π_2 rispettivamente i piani contenenti la coppia di rette parallele e la coppia di rette incidenti. Supponendo di essere in $\mathbb{E}^3$ con un sistema di coordinate ortonormali, scrivere le equazioni cartesiani dei piani Π_1 e Π_2 e delle equazioni cartesiane per le rette s_1 e s_2 tali che s_i è ortogonale a Π_i e passa per il punto $R = (0, -2, 1)$.

Esercizio 3
Sia $\mathbb{E}^4$ lo spazio euclideo di dimensione reale dotato di un riferimento cartesiano ortonormale di coordinate (x, y, z, w) e centro O. Si considerino il punto P di coordinate $(1, 0, -1, 0)$ e il vettore v di coordinate $(0, 1, 0, 1)$. Si considerino inoltre i punti Q ed R tali che

$$Q - O = v \quad \text{e} \quad R - P = v.$$

- Scrivere le coordinate di Q ed R e le coordinate del vettore $\overrightarrow{PQ}$.
- Scrivere delle equazioni cartesiane per la retta r passante per Q e R.
- Si dimostri che O, P, Q e R sono complanari. Si scrivano delle equazioni parametriche e cartesiane per il piano Π che contiene i quattro punti.
- Dimostrare che il quadrilatero $\Gamma = OPRQ$ è un quadrato.

Soluzione esercizio 1. Incominciamo a trattare il primo caso. Dobbiamo verificare che $A = \mathbb{R}^3$ è uno spazio affine su $V = \mathbb{R}^2$ quando definiamo il vettore tra due punti come la proiezione di $\overrightarrow{PQ}$, vettore tridimensionale, sul piano $z = 0$ che identifichiamo con $\mathbb{R}^2$. Se $\underline{x} = (x, y, z)$ è il vettore $\overrightarrow{PQ}$ si ha quindi $\phi(P, Q) = (x, y)$. Mostriamo che (A, ϕ) non è uno spazio affine.

Mostriamo che $\phi(P, \cdot)$ non è biettiva come applicazione da A a V. Si vede facilmente infatti che per ogni punto sull'asse z si ha $\phi(P, Q) = (0, 0)$.

Anche nel secondo caso (A, ϕ) non è uno spazio affine. Infatti, malgrado la proprietà

$$\phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + \phi((x_2, y_2), (x_3, y_3)) = \phi((x_1, y_1), (x_3, y_3))$$

sia banalmente vera, cade ancora la richiesta sulla biettività dell'applicazione $\phi(P, \cdot)$:

$$\phi((0, 0), (1, 0)) = 0 - (1 - 0) = 0 - ((x + 1) - (x)) = \phi((0, 0), (x, x + 1))$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Mostriamo invece che nel terzo caso abbiamo una struttura di spazio affine. Ricordiamo che

$$A = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq 3 \ \text{ e } p(0) = 1\} = \{p(x) = 1 + ax + bx^2 + cx^3 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

e che V è lo spazio vettoriale reale delle matrici simmetriche 2x2. Per ipotesi, se

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

si ha che

$$p(x) + M := p(x) + x \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = p(x) + x(a_{11} + 2a_{12}x + a_{22}x^2).$$

Si vede facilmente che

$$(p(x) + M) + N = \left(p(x) + x \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \right) + x \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} N \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} =$$

$$= p(x) + x \left(\begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} N \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \right) =$$

$$= p(x) + x \left(\begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} (M + N) \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \right) = p(x) + (M + N)$$

quindi rimane da dimostrare che, per ogni $p_1(x)$ fissato, l'applicazione che associa a $M \in V$ il polinomio $p_2(x) := p_1(x) + M$ è una biezione con A.

Mostriamo che questa ha un'inversa: mostriamo che, fissato $p_1(x) \in A$ per ogni $p_2(x) \in A$ esiste un unico $M \in V$ tale che $p_1(x) + M = p_2(x)$. Sapendo che $p_i \in A$ possiamo assumere

$$p_i = 1 + a_i x + b_i x^2 + c_i x^3$$

per opportuni valori reali. Dovendo essere

$$p_2(x) = p_1(x) + M = p_1(x) + x(a_{11} + 2a_{12}x + a_{22}x^2)$$

otteniamo

$$p_2(x) - p_1(x) = x((a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)x + (c_2 - c_1)x^2) = x(a_{11} + 2a_{12}x + a_{22}x^2)$$

da cui ricaviamo che l'unica matrice in V tale che $p(x) + M = q(x)$ è

$$M = \begin{bmatrix} (a_2 - a_1) & \frac{b_2 - b_1}{2} \\ \frac{b_2 - b_1}{2} & (c_2 - c_1) \end{bmatrix}$$

Di conseguenza A è uno spazio affine (di dimensione 3). □

Soluzione esercizio 2. Indichiamo con W_i la giacitura di r_i. La giacitura di r_3 è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore

$$\overrightarrow{PQ} = (-1, -1, -1) - (2, -4, -1) = (-3, 3, 0).$$

Le altre due giaciture si deducono dalla forma parametrica di r_1 e r_2:

$$W_1 =< (1, 1, 1) > \quad W_2 =< (1, -1, 0) > \quad W_3 =< (-3, 3, 0) > .$$

Vediamo se le rette si intersecano o meno.

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} 1 + s = 2 + u \\ -1 + s = -2 - u \\ 1 + s = 1 \end{cases} = \begin{cases} u = -1 \\ s = 0 \end{cases}$$

quindi r_1 e r_2 si intersecano. Essendo $W_1 \neq W_2$, concludiamo che r_1 e r_2 sono incidenti (e non coincidenti). Scriviamo una rappresentazione parametrica per r_3:

$$r_3 : \begin{cases} x = -1 - 3s \\ y = -1 + 3s \\ z = -1 \end{cases} = \begin{cases} x = -1 - s \\ y = -1 + s \\ z = -1 \end{cases}$$

riscalando il parametro per semplificare i conti. Possiamo quindi calcolare le intersezioni di r_3 con r_1 e r_2:

$$r_1 \cap r_3 : \begin{cases} 1 + s = -1 - u \\ -1 + s = -1 + u \\ 1 + s = -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 = u \\ -2 = u \\ s = -2 \end{cases}$$

quindi r_1 e r_3 sono disgiunte. Siccome $W_1 \neq W_3$, concludiamo che r_1 e r_3 sono sghembe. Notiamo che l'equazione parametrica per r_2 per la variabile z è $z = 1$. Siccome per r_3 l'equazione corrispondente è $z = -1$ possiamo subito concludere che r_2 e r_3 sono disgiunte. Essendo $W_2 = W_3$ (poichè i generatori sono proporzionali) deduciamo che r_2 e r_3 sono parallele.

Per descrivere il piano che contiene r_1 e r_2 possiamo scriverlo in forma parametrica. Sappiamo infatti che la giacitura di Π è generata dalle direzioni delle due rette (perchè sono incidenti).

$$\Pi_1 : \begin{cases} x = 1 + s + u \\ y = -1 + s - u \\ z = 1 + s \end{cases}$$

Non possiamo usare lo stesso metodo con il piano Π_2. Sappiamo però che $(1, -1, 0)$, un generatore di $W_2 = W_3$, è un vettore parallelo al piano e che i punti $Q = (-1, -1, -1)$ e $R = (2, -2, 1)$ (punto che si ricava ponendo a 0 il parametro su r_2) devono appartenere al piano. Di conseguenza anche $\overrightarrow{QR} = (3, -1, 2)$ è un vettore parallelo al piano. Delle equazioni cartesiane per Π_2 sono quindi

$$\Pi_2 : \begin{cases} x = -1 + s + 3u \\ y = -1 - s - u \\ z = -1 + 2u \end{cases}$$

Ricavando i parametri e andando a sostituire otteniamo le equazioni cartesiane per i due piani:

$$\Pi_1 : x + y - 2z + 2 = 0 \quad \Pi_2 : x + y - z + 1 = 0.$$

Ricordando che (siamo in $\mathbb{E}^3$) i coefficienti dei termini di x, y e z nell'equazione cartesiana di un piano (in coordinate ortonormali) sono i coefficienti della normale al piano otteniamo le forme parametriche per le rette ortogonali passanti per il punto $T = (0, -2, 1)$:

$$\begin{cases} x = s \\ y = -2 + s \\ z = 1 - 2s \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = s \\ y = -2 + s \\ z = 1 - s \end{cases}$$

□

Soluzione esercizio 3. Per definizione, le coordinate di Q sono le coordinate del vettore $\overrightarrow{OQ} = Q - O = v$ quindi $Q = (0, 1, 0, 1)$. R è il punto tale che $R = P + v$ e quindi le sue coordinate sono $(1, 1, -1, 1)$. Infine il vettore $\overrightarrow{PQ}$ ha coordinate date dalla differenza delle coordinate di Q e P: $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 1, 1)$.

Il vettore $\overrightarrow{QR}$ è $R - Q = (1, 0, -1, 0)$ quindi delle equazioni parametriche per r sono

$$r : \begin{cases} x = a \\ y = 1 \\ z = -a \\ w = 1 \end{cases}$$

dalle quali si può ricavare il parametro (ad esempio, $a = x$) andando ad ottenere

$$r : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ z + x = 0 \\ w - 1 = 0 \end{cases}$$

che sono delle equazioni cartesiane per r.

Il piano Π per O, P e Q (univocamente determinato perchè i punti sono banalmente affinemente indipendenti) ha la seguente espressione parametrica:

$$\Pi : \begin{cases} x = a \\ y = b \\ z = -a \\ w = b \end{cases}$$

Si vede facilmente che delle equazioni cartesiane per Π sono $x+z = y-w = 0$ (due perchè siamo in $\mathbb{E}^4$ e il piano ha dimensione 2). Per vedere se $R = (1, 1, -1, 1)$ appartiene a Π basta controllare che le sue coordinate soddisfino le equazioni cartesiane appena ricavate: è facile vedere che $R \in \Pi$ e quindi che i quattro punti O, P, Q ed R sono complanari.

Vogliamo mostrare che il quadrilatero OPRQ è un quadrato. Sappiamo che $\overrightarrow{PR} = v = (0, 1, 0, 1) = \overrightarrow{OQ}$ e che $\overrightarrow{QR} = (-1, 0, 1, 0) = P - O = \overrightarrow{OP} := w$. La norma di v è $|v| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ e coincide con la norma di w quindi il quadrilatero è almeno un rombo. Per calcolare l'angolo tra due lati possiamo calcolare il prodotto interno tra v e w. Si vede facilmente che $< v, w >= 0$ quindi due lati adiacenti sono perpendicolari. Questo basta per concludere che Γ è un quadrato. $\square$