Esercitazioni di Geometria II

Letizia Pernigotti - pernigotti@science.unitn.it

11 maggio 2012

Esercizio 1. Sia $f : (\mathbb{R}, \tau_1) \to (\mathbb{R}, \tau_2)$ una funzione, con τ_1 la topologia $\mathcal{I}_s$ e τ_2 la topologia discreta. Dimostrare che f è continua se e solo se è costante.

※ **Esercizio 1.** Dimostriamo che, se f è costante, allora f è continua. Sia dunque $f(x) = a$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora si ha

$$f^{-1}(\{a\}) = \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(\{b\}) = \emptyset \quad \forall b \neq a.$$

Poiché nella topologia discreta ogni punto è un aperto, ciò conclude la dimostrazione della prima implicazione.

Dimostriamo ora il viceversa, cioè che se f è continua, allora è automaticamente costante. Sappiamo che una funzione è continua se e solo se la controimmagine di un aperto è un aperto. Di conseguenza, per ogni $y \in \mathbb{R}$, deve essere

$$f^{-1}(y) = (-\infty, \alpha_y) \quad \vee \quad f^{-1}(y) = \emptyset \quad \vee \quad f^{-1}(y) = \mathbb{R}.$$

Supponiamo che per qualche $y_0 \in \mathbb{R}$ sia

$$f^{-1}(y_0) = (-\infty, \alpha_0). \tag{1}$$

Ciò significa che, per ogni $x < \alpha_0$, si ha $f(x) = y_0$ e inoltre $f(\alpha_0) = y_1 \neq y_0$. Ma allora $f^{-1}(y_1)$ non può esser vuoto perché contiene α_0 e non può esser tutto $\mathbb{R}$ perché deve stare nel complementare di $(-\infty, \alpha_0)$. Allora deve essere

$$f^{-1}(y_1) = (-\infty, \alpha_1), \qquad \text{con } \alpha_1 > \alpha_0,$$

ma ciò è in contraddizione con l'equazione (1). Di conseguenza, per qualsiasi $y \in \mathbb{R}$, può solo essere

$$f^{-1}(y) = \emptyset \quad \vee \quad f^{-1}(y) = \mathbb{R}.$$

Poiché non può essere $f^{-1}(y) = \emptyset$ per ogni valore di y (altrimenti non avrei una funzione..), deve esistere un valore $y_0 \in \mathbb{R}$ tale per cui

$$f^{-1}(y_0) = \mathbb{R}, \qquad f^{-1}(y) = \emptyset \quad \forall y \neq y_0.$$

Ciò dimostra che f è costante e vale $f(x) = y_0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Dire, motivando la risposta, se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ sono o meno omeomorfi tra di loro:

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 2y^2 \leq 3\},$$
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 = 1\},$$
$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 3x^2 + y^2 \neq 2\}.$$

※ **Esercizio 2.** Osserviamo innanzitutto che l'insieme L è sconnesso in quanto

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 3x^2 + y^2 < 2\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 3x^2 + y^2 > 2\},$$

mentre gli insiemi H e K non lo sono. Quindi

$$L \not\approx H, \quad L \not\approx K.$$

Consideriamo allora i due insiemi K e H. Osserviamo che se K e H fossero omeomorfi e se $f : K \to H$ fosse l'omeomorfismo tra di loro, allora, dati due punti distinti $p_1, p_2 \in K$, anche

$$K \setminus \{p_1, p_2\} \to H \setminus \{f(p_1), f(p_2)\}$$

sarebbero omeomorfi sempre tramite $f_{|K \setminus \{p_1, p_2\}}$. Tuttavia ciò è impossibile, in quanto il primo insieme è sconnesso qualsiasi siano i due punti scelti, mentre il secondo non lo è mai. Un altro modo per vedere che i due insieme non sono omeomorfi è osservare che K ha interno vuoto, mentre H ha interno non vuoto (corrispondente alla palla unitaria aperta). Di conseguenza si ha anche

$$K \not\approx H.$$

Esercizio 3. Sia $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2-1=0\}$ con la topologia indotta dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^2$ e sia $f : \mathbb{R} \to C$ definita da

$$f(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si risponda ai seguenti quesiti.

- La funzione f è continua, suriettiva ed aperta (manda aperti in aperti).
- Sia $\sim_f$ la relazione d'equivalenza indotta da f su $\mathbb{R}$. Dimostrare che $R/\sim_f$ e C sono omeomorfi.

※ Esercizio 3.

- Partiamo dal dimostrare la suriettività.

  Sia $(x,y) \in C$ un punto della circoferenza. Allora si ha
  $$|x| \leq 1, \qquad |y| \leq 1.$$
  Posso dunque definire $\theta := \arccos(x) \in [0,\pi] \subset \mathbb{R}$ e distinguere due casi:
  $$\begin{cases} y \geq 0 & \to f(\theta) = (\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta) = (x, \sqrt{1-x^2}) = (x,y) \\ y < 0 & \to f(-\theta) = (x, -\sqrt{1-x^2}) = (x,y). \end{cases}$$
  Abbiamo dimostrato che la funzione f è suriettiva e che ogni punto di C si può scrivere come $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ per qualche $\alpha \in [-\pi,\pi]$.

  Dimostriamo ora la continuità.

  Gli aperti di C sono dati dalla topologia indotta su C da quella euclidea. Poiché è sufficiente considerare una base, considero gli aperti di C del tipo
  $$A = C \cap B(x,r) \qquad \text{per qualche } x \in \mathbb{R}^2 \text{ e } r > 0.$$
  Le intersezioni di C con le palle aperte di $\mathbb{R}^2$ possono dar luogo solo all'insieme vuoto, a C stesso oppure agli archi aperti di circonferenza. Poiché abbiamo detto che ogni punto di C si può scrivere come $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ per qualche $\alpha \in [-\pi,\pi]$, una base di aperti di C è data (oltre a C stesso e all'insieme vuoto) da
  $$A_j = \{(\cos\alpha, \sin\alpha) \in C \mid \alpha \in (\theta_{j_1}, \theta_{j_2})\}, \qquad \theta_{j_1} < \theta_{j_2}.$$
  La controimmagine di un tale aperto è data da
  $$f^{-1}(A_j) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (\theta_{j_1} + 2k\pi, \theta_{j_2} + 2k\pi)$$
  il quale è un aperto in $\mathbb{R}$. Poiché $f^{-1}(C) = \mathbb{R}$ e $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, abbiamo dimostrato che la controimmagine di aperti è un aperto e che dunque la funzione f è continua.

  Dimostriamo ora che f è un aperta. Consideriamo la base della topologia euclidea data dagli aperti del tipo (a,b), con $a < b$. Allora si ha
  $$f\big((a,b)\big) = \{(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \mid x \in (a,b)\},$$
  il quale corrisponde ad un arco aperto di circonferenza o alla circonferenza stessa a seconda che $b-a$ sia minore o maggiore di 2π. In ambedue i casi rappresenta un aperto di C e dunque la funzione f è anche aperta.

- Ricordiamo che $\sim_f$ è definita da
  $$x \sim_f y \iff f(x) = f(y).$$
  Sia dunque
  $$\widetilde{f} : \mathbb{R}/\sim_f \quad \to \quad C$$

e sia
$$\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim_f$$
la proiezione naturale. Ricordiamo che gli aperti di $\mathbb{R}/\sim_f$ sono dati da tutti gli insiemi U tali che $\pi^{-1}(U)$ sia un aperto di $\mathbb{R}$. Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $[x] \in \mathbb{R}/\sim_f$ la sua classe nel quoziente. Osserviamo che
$$\begin{aligned} y \in [x] &\iff (\cos(x) = \cos(y)) \wedge (\sin(x) = \sin(y)) \\ &\iff x = y + 2k\pi \text{ per qualche } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$
Di conseguenza la controimmagine di un punto è data da
$$\pi^{-1}(x) = \{x + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
e dunque si ha
$$\pi^{-1}(\pi(a,b)) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (a + 2k\pi, b + 2k\pi).$$
Ricordando quando detto nel punto precedente, la funzione $\widetilde{f}$ risulta essere anch'essa continua, suriettiva e con inversa continua (*i.e.*, aperta). Basta dimostrare che $\widetilde{f}$ è anche iniettiva. Ma $\widetilde{f}$ è iniettiva proprio per definizione, in quanto se $f(x) = f(y)$ allora x e y appartengono, per definizione, alla stessa classe di equivalenza e dunque $[x] = [y]$ in $\mathbb{R}/\sim_f$. La circonferenza C e $\mathbb{R}/\sim_f$ sono dunque omeomorfi.

Esercizio 4. Sia $X = [0,2] \cup [4,6] \subset \mathbb{R}$ con la topologia indotta da quella euclidea. Sia definita in X la relazione d'equivalenza

$$x \sim y \iff \begin{cases} y = x & x \in [1,2] \cup [5,6] \\ y = x+4 & x \in [0,1) \\ y = x-4 & x \in [4,5) \end{cases} .$$

Si risponda ai seguenti quesiti.

- Si dimostri che $X/\sim$ è T_1, cioè dati due punti qualsiasi x, y in $X/\sim$ ognuno è contenuto in almeno un aperto che non contiene l'altro punto.
- Si dimostri che $X/\sim$ non è Hausdorff.

※ **Esercizio 4.** Osserviamo che nello spazio $Y = X/\sim$ gli intervalli $[1,2]$ e $[5,6]$ sono essenzialmente invariati, mentre ogni punto $x \in [0,1)$ è identificato con $x+4 \in [4,5)$. Cerchiamo di capire come sono fatti gli aperti di Y. Sia

$$\pi : [0,2] \cup [4,6] \to Y$$

la proiezione naturale. Si ha

$$\begin{cases} \pi^{-1}(y) = y & y \in [1,2] \cup [5,6], \\ \pi^{-1}(y) = \{y, y+4\} & y \in [0,1), \\ \big(\text{equival: } \pi^{-1}(y) = \{y, y-4\} & y \in [4,5)\big) \end{cases}$$

e si vede che gli aperti sono solo quelli del tipo $\pi(A)$, con A un aperto di X. Passiamo alla risoluzione dell'esercizio.

- Siano $[x] \neq [y]$ due punti di Y. Se $x, y \in (1,2] \cup (5,6]$ allora trovo due aperti $U_x \ni x$ e $U_y \ni y$ di X contenuti in $(1,2] \cup (5,6]$ e tali che $x \notin U_y$ e $y \notin U_x$. Poiché $\pi((1,2] \cup (5,6]) = (1,2] \cup (5,6]$, tale proprietà è conservata anche nel quoziente e $\pi(U_x)$ e $\pi(U_y)$ sono gli intorni cercati. Un discorso analogo si può fare per qualsiasi valore di x, y diverso da 1 o 5. L'unica combinazione potenzialmente problematica è $x = 1$ e $y = 5$, i quali sono due punti distinti in Y. Le controimmagini in X degli intorni di $[1]$ sono del tipo
$$U_1(\varepsilon) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \cup (5-\varepsilon, 5) \not\ni 5, \qquad \varepsilon > 0$$
mentre le controimmagini degli intorni di $[5]$ sono del tipo
$$U_5(\varepsilon) = (1-\varepsilon, 1) \cup (5-\varepsilon, 5+\varepsilon) \not\ni 1 \qquad \varepsilon > 0.$$
Posso quindi trovare due intorni come da ipotesi anche in questo caso prendendo $\pi(A_1(\varepsilon))$ e $\pi(A_2(\varepsilon))$ e ciò dimostra che Y è T_1.

- Osservando quando detto al punto precedente, si può osservare che nel caso $x = 1$ ed $y = 5$ non è possibile scegliere intorni U_1 ed U_5 rispettivamente di 1 e di 5 in modo tale che le loro proiezioni al quoziente siano disgiunte, in quanto queste devono esser della forma $\pi(U_1(\varepsilon))$ e $\pi(U_5(\varepsilon))$ per qualche $\varepsilon > 0$ e ciò significa che le parti "sinistre" dei due intorni si intersecano sempre. Ciò dimostra che Y non è Hausdorff.