Esercitazioni di Geometria II

Letizia Pernigotti - pernigotti@science.unitn.it

18 maggio 2012

Esercizio 1. [Metrica del riccio] Si considieri $\mathbb{R}^2$ munito della *metrica del riccio*, la quale è definita da

$$d(x,y) := \begin{cases} |y-x| & \text{se } x \text{ e } y \text{ sono proporzionali} \\ |x|+|y| & \text{se } x \text{ e } y \text{ non sono proporzionali} \end{cases},$$

dove $|\cdot|$ denota la metrica euclidea standard, e sia $X = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \leq 1\}$.

(1) Si dimostri che X è chiuso e limitato.
(2) Si dimostri che X non è compatto.

※ Esercizio 1.

(1) Osserviamo innanzitutto che

$$|x|_d = d(x,0) = \begin{cases} |x-0| \\ |x|+0 \end{cases} = |x|.$$

L'insieme X è quindi semplicemente la palla chiusa

$$\overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ d(x,0) \leq 1\}$$

di centro zero e raggio 1 nella metrica d. Ciò dimostra sia la chiusura sia la limitatezza.

(2) Essendo in uno spazio metrico, un insieme è compatto se e solo se è compatto per successioni. Cerchiamo quindi una successione $\{x_n\} \subset X$ che non ammetta alcuna sottosuccessione convergente. Chiaramente tale successione dovrà sfruttare la non proporzionalità tra i suoi elementi (se fossero proporzionali, la distanza tra essi sarebbe semplicemente la distanza euclidea e sappiamo che X nella metrica euclidea è compatto).

Definisco $\{x_n\}$ come

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \qquad n \geq 1.$$

La successione è dunque del tipo

$$x_1 = (0,1)\,, \quad x_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad x_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad x_4 = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \quad \cdots$$

Controlliamo che $\{x_n\} \subset X$:

$$|x_n| = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2-2n+2}{n^2}} \tag{1}$$

Ha senso poiché $n^2 - 2n + 2 > 0$ sempre ed inoltre $n^2 - (2n - 2) \leq n^2$ per ogni $n \geq 1$. Di conseguenza $\{x_n\} \subset X$.

Controlliamo eventuali relazioni di proporzionalità tra diversi elementi della successione:

$$x_n = \alpha x_m \iff \begin{cases} \frac{n-1}{n} = \alpha \frac{m-1}{m} \\ \frac{1}{n} = \alpha \frac{1}{m} \end{cases} \iff \alpha = \frac{m}{n} \quad \wedge \quad m = n.$$

Ciò significa che due elementi qualsiasi della nostra successione non sono mai proporzionali tra di loro.

Supponiamo ora che esista una sottosuccessione $\{x_{n_k}\} \in X$ convergente a un certo $y \in X$. Dall'equazione (1) si vede che

$$\lim_{k \to \infty} |x_{n_k}| = 1$$

e dunque, poiché la norma è sempre una funziona continua, si avrebbe $|y| = 1$. Osserviamo però che y, qualunque esso sia, può essere proporzionale al massimo ad un solo elemento della successione $\{x_{n_k}\}$, in quanto due qualsiasi elementi di tale successione non sono mai proporzionali tra di loro. Di conseguenza, per tutti i k tranne al massimo uno si avrebbe

$$d(x_{n_k}, y) = |x_{n_k}| + |y| = \sqrt{\frac{n_k^2 - 2n_k + 2}{n_k^2}} + 1 > 1$$

e dunque

$$\lim_{k \to \infty} d(x_{n_k}, y) = 2 \neq 0$$

il che contraddice l'ipotesi $y = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$.

Abbiamo esibito una successione priva di sottosuccessioni convergenti. Ciò dimostra che X non è compatto.

Esercizio 2. [NON SVOLTO, SOLO PER I CURIOSI] Si consideri $\mathbb{R}^2$ con la topologia standard e sia $E \subset [0,1] \times [0,1]$ il sottospazio definito da

$$E := \{(0,y) \ : \ y \notin \mathbb{Q}\} \cup \{(x,y) \ : \ x > 0, \quad y \in \mathbb{Q}\}.$$

(1) Si dimostri che E è connesso.
(2) Si dimostri che E è unione di una partizione numerabile di sottoinsiemi relativamente chiusi.

※ Esercizio 2.

(1) Osserviamo che $E_2 = \{(x,y) \ : \ x > 0, \quad y \in \mathbb{Q}\}$ è un unione numerabile di segmenti $\sigma_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in (0,1]\}$ al variare di $y \in \mathbb{Q}$. Ognuno di questi segmenti è ovviamente connesso e non si può esprimere come unione di due aperti.

Supponiamo ora per assurdo che $E = A_1 \cup A_2$ sia unione di due aperti A_1 e A_2 disgiunti. Essendo ogni segmentino σ_y connesso, ognuno di questi segmentini deve essere interamente contenuto o in A_1 oppure in A_2 (altrimenti questi due aperti sconnetterebbero σ_y per qualche y).

Osserviamo inoltre che

$$\overline{E_2} = \bigcup_y \overline{\sigma_y} = \{(x,y) \ : \ x \geq 0, \quad y \in \mathbb{Q}\}$$

e, di conseguenza,

$$\overline{E_2} \cap (\{0\} \times [0,1]) = (\{0\} \times [0,1]) \setminus E_1,$$

ovvero ogni punto nel complementare di E_1 in $\{0\} \times [0,1]$ appartiene alla frontiera di E_2

Supponiamo che A_1 contenga un punto $(0,y_0) \in A$. Allora per densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ l'aperto A_1 è forzato a contenere anche qualche punto del tipo $(0,y)$ con $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tale punto $(0,y) \in A_1$ sta nella frontiera di E_2 e dunque, per definizione di frontiera, l'aperto A_2 deve contenere anche punti di E_2, che saranno del tipo (x,y) per qualche $x > 0$. Per le ragioni di connessione dette prima, questo forza A_2 a contenere tutti i segmentini σ_y per ogni y tale che $(0,y) \in A_1$.

L'unica possibilità affinché E sia sconnesso è che i due insiemi A_1 ed A_2 siano del tipo

$$A_1 = \{(x,y) \in E \ : \ y > \alpha_1\}, \qquad A_2 = \{(x,y) \in E \ : \ y < \alpha_2\}$$

ma ciò è impossibile, perché, per ragiondi di densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, si dovrebbe avere $\alpha_1 = \alpha_2$ altrimenti tutti i punti di E_1 corrispondenti ai valori $y \in [\alpha_2, \alpha_1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e tutti i segmenti σ_y con $y \in [\alpha_2, \alpha_1] \cap \mathbb{Q}$ rimarrebbero esclusi da $A_1 \cup A_2 = E$. Chiamiamo $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$. Anche in questo caso otteniamo un assurdo, in quanto rimarrebbe ugualmente esclusa una parte di E: se $\alpha \in \mathbb{Q}$, il segmento $\sigma_\alpha \subset E_2$ e se $\alpha \notin \mathbb{Q}$ il punto $(0,\alpha) \in E_1$.

Si è quindi giunti ad un assurdo e ciò prova che E è connesso.

(2) Ricordiamo che C si dice *relativamente chiuso* se è chiuso nella topologia indotta da E. In altre parole, C è relativamente chiuso se

$$C = E \cap Q, \qquad Q \text{ chiuso di } \mathbb{R}^2.$$

Abbiamo osservato nel punto precedente che

$$E = E_1 \cup E_2 = E_1 \cup_{y \in \mathbb{Q}} \sigma_y.$$

Il primo insieme è lui stesso relativamente chiuso, in quanto

$$E_1 = E \cap (\{0\} \times [0,1]).$$

Anche i vari segmenti σ_y sono relativamente chiusi poiché

$$\sigma_y = E \cap ([0,1] \times \{y\}).$$

Poiché $\mathbb{Q}$ è numerabile ed ognuno degli elementi di $\{E_1, \{\sigma_y\}_{y \in \mathbb{Q}}\}$ è disgiunto dagli altri, la tesi è dimostrata.

Esercizio 3. Si consideri $\mathbb{R}^2$ munito della topologia standard e sia $X = A \cup B$ definito dall'unione di

$$A = \{0\} \times [0,1], \qquad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \in (0,1]\right\}.$$

(1) Dimostrare che X è connesso.
(2) X è connesso per archi?

※ Esercizio 3.

(1) L'insieme A è connesso e così pure l'insieme B (è il grafico di una funzione continua con dominio connesso). L'unica possibilità affinché $X = A \cup B$ sia sconnesso è che A e B siano due aperti disgiunti di X, cioè che esistano due aperti U_1 e U_2 di $\mathbb{R}^2$ tali che

$$A = X \cap U_1, \qquad B = X \cap U_2.$$

Consideriamo un punto $p = (0, y_0) \in A$ con $y_0 \in [0,1]$ e sia

$$\alpha := \arccos(y_0) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Si ha $x_0 := 1/\alpha \in \left[\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right] \subset (0,1]$.

Chiaramente U_1 è un intorno di p. Definiamo la successione

$$x_n := \frac{1}{\alpha + 2n\pi}, \qquad p_n = (x_n, y_0), \qquad n \geq 1.$$

Si ha $p_n \in B$ per ogni n perché per costruzione $\cos(1/x_n) = \cos(\alpha+2n\pi) = y_0$ ed inoltre $p_n \to p$ per $n \to \infty$. Ciò significa che , in quanto limite, p è punto di accumulazione per l'insieme $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e dunque

$$U_1 \cap \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \neq \emptyset.$$

Poiché $U_1 \cap \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset U_1 \cap B$, ciò significa che

$$U_1 \cap B \neq \emptyset$$

e dunque

$$A \cap B = (X \cap U_1) \cap B = X \cap (U_1 \cap B) \neq \emptyset,$$

il che è un assurdo. L'insieme X è dunque connesso.

(2) L'insieme X non è connesso per archi perché, dati due punti distinti $x \in A$ e $y \in B$, non è possibile trovare un cammino in X che li connetta. Tale cammino dovrebbe infatti "saltare" da A su B.

[EVENTUALI DETTAGLI - NON SVOLTI IN CLASSE:

Supponiamo per assurdo che esista $\gamma : [0,1] \to X$ cammino continuo tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Poiché il cammino parte in A e finisce in B, dovrà esistere un valore $t' \in (0,1)$ tale che

$$\gamma(t' - \varepsilon, t') \in A, \quad \gamma[t', t' + \varepsilon) \in B \tag{2}$$

oppure

$$\gamma(t' - \varepsilon, t'] \in A, \quad \gamma(t', t' + \varepsilon) \in B \tag{3}$$

per qualche $\varepsilon > 0$. Sia $p = \gamma(t')$. Supponiamo di essere nel primo caso ($p \in B$). Allora $p = (x_p, y_p)$ con $x_p > 0$ e poiché (x_p, y_p) e $(0, y_p)$ sono due punti distinti di $\mathbb{R}^2$, il quale è Hausdorff, trovo un intorno U di p che non interseca A e dunque tale che

$$\gamma^{-1}(U) \ni [t', t' + \varepsilon'), \qquad \gamma^{-1}(U) \notin (t' - \varepsilon, t']$$

per la (2); un insieme di questo tipo non può essere un aperto in $[0,1]$. Supponiamo allora di essere nel secondo caso, cioè $p = \gamma(t') \in A$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, trovo un intorno U_n di p che non interseca la retta $x = x_n$. In altre parole

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists U_n \in \mathcal{N}_p \ \text{ t.c.}$$
$$U_n \cap \{x \geq x_n\} = \emptyset \ \wedge \ \gamma^{-1}(U_n) \supset (t' - \delta_n, t' + \delta_n).$$

In altri termini

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists \delta_n \ \text{ t.c.} \qquad \gamma(t' - \delta_n, t' + \delta_n) \cap \{x \geq x_n\} = \emptyset$$

Detto $\delta := \max_n \delta_n > 0$, si ha

$$\emptyset = \bigcup_n \big(\gamma(t' - \delta_n, t' + \delta_n) \cap \{x \geq x_n\}\big) = \gamma(t' - \delta, t' + \delta) \cap \{x > 0\}$$

e poiché $B \subset \{x > 0\}$, ciò implica $\gamma(t' - \delta, t' + \delta) \cap B = \emptyset$. Questo contraddice la (3) ed è dunque nuovamente un assurdo. (In altre parole, un cammino continuo che parte in A deve rimanere in A e analogamente un cammino continuo che parte o finisce in B deve essere interamente contenuto in B.)]

ALCUNI ESEMPI

Esercizio 4. Su $\mathbb{R}$ si consideri la topologia τ_1 generata da $\mathcal{B} = \{(a, b] \ : \ a < b\}$. Si dica se $(\mathbb{R}, \tau)$ è compatto, connesso o di Hausdorff.

※ Esercizio 4.

- $(\mathbb{R}, \tau)$ non è compatto perché il ricoprimento aperto $\{(n, n+1]\}_{n \in \mathbb{N}}$ non ammette sottoricoprimenti finiti.
- $(\mathbb{R}, \tau)$ non è connesso perché è scrivibile come $\mathbb{R} = (-\infty, b] \cup (b, +\infty)$ per qualsiasi $b \in \mathbb{R}$.
- $(\mathbb{R}, \tau)$ è Hausdorff perché, dati due punti $x < y$ in $\mathbb{R}$ e detto $m = (x+y)/2$ il loro punto medio, i due intorni $(x-1, m] \in \mathcal{U}_x$ e $(m, y+1] \in \mathcal{U}_y$ sono disgiunti.

Esercizio 5. Esempi di sottospazi di $\mathbb{R}^2$ compatti e non compatti.

※ Esercizio 5. In $\mathbb{R}^n$ con la topologia euclidea, un sottospazio è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Le coniche in $\mathbb{R}^2$ sono sottoinsiemi chiusi perché sono controimmagine di un chiuso attraverso una funzione continua. Per esempio, l'ellisse descritta da

$$\mathcal{C} : \quad x^2 + 3y^2 = 2$$

è la controimmagine di $\{0\}$ attraverso la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 2$. Poiché f è continua, manda chiusi in chiusi e poiché $\{0\}$ è un chiuso in $\mathbb{R}$, anche $\mathcal{C}$ è un chiuso in $\mathbb{R}^2$.

Le circonferenze e le ellissi sono sottoinsiemi compatti perché sono anche limitate. Esser limitato vuol dire esser contenuto in una palla $B_r(x_0)$ di raggio $r > 0$ e centro x_0 per qualche $r \in \mathbb{R}_{>0}$ e qualche $x_0 \in \mathbb{R}^2$ e questo, per circonferenze ed ellissi, è sempre vero. Parabole ed iperboli invece non sono compatte perché non sono limitate ("continuano fino all'infinito" e per tale motivo non è possibile trovare alcuna palla di $\mathbb{R}^2$ che le contiene).