Esercitazioni di Geometria II

Letizia Pernigotti - pernigotti@science.unitn.it

22 marzo 2012

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^3$ il 3-spazio euclideo dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z) e sia $r_1(k)$ la retta passante per i punti

$$P_1(k) = (k, 1, 0), \quad P_2 = (0, 2, -1).$$

Sia r_2 la retta definita da:

$$r_2 : \begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}.$$

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Si determinino i valori di k tali per cui le rette $r_1(k)$ e r_2 siano sghembe.
(2) Per i valori di k determinati esclusi dal punto (1), calcolare l'equazione cartesiana del piano π che contiene entrambe le rette.
(3) Nel caso in cui le due rette siano incidenti, calcolare il punto di intersezione.
(4) Determinare l'equazione della retta r_3 passante per $P_3 = (0, 1, 1)$ ed ortogonale al piano π sopra determinato.
(5) Calcolare l'angolo convesso determinato dalla retta r_3 e dalla retta r_4 passante sempre per P_3 ma avente direzione $v_4 = (2, -1, 2)$
(6) Calcolare la distanza di P_3 da π.
(7) Determinare il punto $Q \in r_3$ a distanza $\frac{1}{2}d(P_3, \pi)$ da π e appartenente allo stesso semispazio (delimitato da π) a cui appartiene P_3.
(8) Determinare l'equazione del piano τ passante per P_3 e contenente la retta r_2.

※ Esercizio 1.

Per calcolare l'equazione della retta $r_1(k)$ possiamo osservare che la sua direzione è data dal vettore

$$v_1(k) = \overrightarrow{P_2P_1(k)} = (k, -1, 1).$$

Di conseguenza, un'equazione parametrica per $r_1(k)$ è

$$r_1(k) : \begin{cases} x = tk \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases}.$$

L'equazione parametrica della retta r_2 è data invece da

$$r_2 : \begin{cases} x + z = s \\ y = s \\ x + 1 = -s \end{cases} \quad \rightarrow \quad r_2 : \begin{cases} x = -1 - s \\ y = s \\ z = 1 + 2s \end{cases}$$

Procediamo con l'esercizio.

(1) Le due rette $r_1(k)$ e r_2 sono sghembe se e solo se non si intersecano e non sono parallele. Consideriamo dunque il sistema

$$\begin{cases} x = tk = -1 - s \\ y = 2 - t = s \\ z = -1 + t = 1 + 2s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} kt = -3 + t \\ s = 2 - t \\ t - 1 = 1 + 4 - 2t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} kt = -3 + t \\ s = 2 - t \\ 3t = 6 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2t = -1 \\ s = 0 \\ t = 2 \end{cases} \rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Per $k = -\frac{1}{2}$ le due rette si intersecano e sono dunque complanari. Se invece $-\frac{1}{2}$ le due rette non si intersecano e potrebbero essere parallele oppure sghembe. Consideriamo le direzioni delle due rette:

$$v_1(k) = (k, -1, 1), \qquad v_2 = (-1, 1, 2).$$

Qualunque sia il valore di k, i due vettori delle direzioni non saranno mai proporzionali (perché le ultime due componenti non lo sono). Di conseguenza, le due rette non saranno mai parallele.

Possiamo dunque concludere che $r_1(k)$ e r_2 sono sghembe se e solo se $k \neq -\frac{1}{2}$.

(2) Riscriviamo l'equazione parametrica della retta r_1 con il valore del parametro k identificato al punto precedente:

$$r_1(k) : \begin{cases} x = -\frac{1}{2}t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + t \end{cases} .$$

Il piano π contenente le due rette è il piano generato, per esempio, dai vettori $2v_1\left(-\frac{1}{2}\right)$ e v_2 e passante per uno dei punti appartenenti alle rette, per esempio $P_2 = (0, 2, -1)$. Ogni punto del piano π sarà dunque del tipo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

cioè

$$\begin{cases} x = -t - s \\ y = 2 - 2t + s \\ z = -1 + 2t + 2s \end{cases} .$$

Dobbiamo ora trovare l'equazione cartesiana:

$$\begin{cases} y - 2x = 2 + 3s \\ y + z = 1 + 3s \end{cases} \rightarrow y + z - y + 2x = -1$$

e dunque

$$\pi : \qquad 2x + z + 1 = 0.$$

(3) Il punto di intersezione delle due rette, nel caso $k = -\frac{1}{2}$, è dato dai valori di s e t ottenuti ponendo a sistema le equazioni parametriche delle due rette. Abbiamo già svolto tale conto: i valori ottenuti erano

$$s = 0, \qquad t = 2.$$

Il punto di intersezione P è dunque dato da

$$\begin{cases} x = tk = -1 - s = -1 \\ y = 2 - t = s = 0 \\ z = -1 + t = 1 + 2s = 1 \end{cases}$$

ovvero $P = (-1, 0, 1)$.

(4) Per calcolare la retta r_3 osserviamo che un vettore ortogonale al piano π è dato da

$$v_3 = (2, 0, 1).$$

Di conseguenza un'equazione parametrica per r_3 è data da

$$r_3 : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$$

mentre un'equazione cartesiana è data, per esempio, da

$$r_3 : \begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ y = 1 \end{cases} .$$

(5) Ricordiamo che i vettori di direzione di r_3 e r_4 sono rispettivamente

$$v_3 = (2, 0, 1), \qquad v_4 = (2, -1, 2).$$

L'angolo convesso $\phi \in [0, \pi]$ determinato dalle due rette è dunque dato da

$$\cos\phi = \frac{\langle v_3, v_4 \rangle}{||v_3|| \cdot ||v_4||} = \frac{4+2}{\sqrt{5}\sqrt{9}} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

da cui

$$\phi \simeq 26,6^\circ$$

(6) La distanza di P_3 da π è data da

$$d(P_3, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{4 + 0 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(7) Il punto $Q = (x_0, y_0, z_0)$ deve appartenere alla retta r_3 ed essere a distanza $\frac{1}{\sqrt{5}}$ da π. Deve dunque verificare le condizioni

$$\begin{cases} x_0 = 2t \\ y = 1 \\ z_0 = 1 + t \end{cases} , \qquad \frac{|2 \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 + 1 \cdot z_0 + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

La seconda condizione diventa

$$|2x_0 + z_0 + 1| = 1 \quad \rightarrow \quad |2(2t) + 1 + t + 1| = 1 \quad \rightarrow$$

$$|5t + 2| = 1 \quad \rightarrow t = \frac{-2 \pm 1}{5}.$$

I due valori di t che si ottengono sono

$$t_1 = -\frac{3}{5}, \qquad t_2 = -\frac{1}{5}.$$

Poiché il valore di $t = 0$ corrisponde al punto P_3 e poiché noi stiamo cercando, tra i due punti a distanza $\frac{1}{\sqrt{5}}$ da π, quello più vicino a P_3, il valore da scegliere è t_2. Di conseguenza il punto Q è dato da

$$Q = \left(-\frac{2}{5}, 1, \frac{4}{5}\right).$$

(8) Osserviamo innanzitutto che $P_3 \notin r_2$ in quanto P_3 non appartiene al piano π che contiene r_2. Consideriamo il fascio di piani passanti per r_2:

$$\lambda(x - y + z) + k(x + y + 1) = 0, \qquad \lambda, k \in \mathbb{R}$$

e imponiamo la condizione di passaggio per $P_3 = (0, 1, 1)$:

$$0 + 2k = 0$$

Otteniamo $k = 0$. Scegliendo, per esempio, $\lambda = 1$, otteniamo l'equazione del piano τ:

$$\tau : \quad x - y + z = 0.$$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ il 2-spazio proiettivo dotato del riferimento standard di coordinate $[x_0, x_1, x_2]$ e si considerino i seguenti punti:

$$A = [1, 2, 2], \quad B = [3, 1, 4], \quad C = [2, -1, 2].$$

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Si dimostri che i tre punti sono allineati.
(2) Si calcoli l'equazione della retta r passante per i tre punti dati.

※ Esercizio 2.

(1) Per dimostrare che sono allineati, calcoliamo il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il rango di tale matrice è evidentemente 2 e dunque i tre punti sono allineati.

(2) Per calcolare l'equazione della retta r imponiamo

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

da cui

$$0 = x_0(8-2) - x_1(4-6) + x_2(1-6) = 6x_0 + 2x_1 - 5x_2$$

L'equazione della retta proiettiva r è data dunque da

$$r : \qquad 6x_0 + 2x_1 - 5x_2 = 0$$