Geometria II

Esercitazioni 25-03-2013

Luca Tasin

Esercizio 1. *Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo tridimensionale reale dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z). Siano $P = (2, 2, 3)$ e $Q = (0, 1, 2)$ punti di $\mathbb{E}^3$ e sia $\pi(k)$ il piano di equazione*

$$kx + y = 0.$$

1. *Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si determini l'equazione cartesiana del piano passante per P e parallelo a $\pi(k)$.*
2. *Sia r la retta passante per P e Q. Si determini il valore di k per cui r e $\pi(k)$ sono paralleli. Si determini l'angolo convesso formato da r e $\pi(1)$.*
3. *Si determini il valore di $k \in \mathbb{R}$ per cui la distanza fra Q e $\pi(k)$ è massima.*
4. *Per ogni $k \in \mathbb{R}$ si determini, in equazioni cartesiane, la retta $r(k)$ passante per Q e perpendicolare a $\pi(k)$.*
5. *Per ogni $k \in \mathbb{R}$ sia $Q(k)$ la proiezione ortogonale di Q su $\pi(k)$ (cioè il punto di intersezione fra $\pi(k)$ e la retta $r(k)$ del punto 2). Sia C il luogo dei punti dato da Q e da $Q(k)$ al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si scrivano le equazioni cartesiani di C. Hint: C è una circonferenza*

Soluzione.

1. Due piani in $\mathbb{E}^3$ sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura. Quindi per ogni $k \in \mathbb{R}$ abbiamo un fascio di piani paralleli a $\pi(k)$

   $$\tau(k, t) : kx + y + t = 0$$

   dipendenti dal parametro $t \in \mathbb{R}$. La condizione $P \in \tau(k, t)$ si traduce in

   $$2k + 2 + t = 0.$$

   Dunque per ogni $k \in \mathbb{R}$ il piano passante per P e parallelo a $\pi(k)$ ha equazione

   $$kx + y - 2k - 2 = 0.$$

2. Il vettore direzione della retta r e dato da $v = \overline{QP} = (2, 1, 1)$, mentre la direzione normale al piano $\pi(k)$ è data dal vettore $n(k) = (k, 1, 0)$.

   La retta r ed il piano $\pi(k)$ sono paralleli se e solo se

   $$0 = \langle v, n(k) \rangle = 2k + 1,$$

   da cui $k = -1/2$.

   L'angolo convesso α determinato da r a $\pi(1)$ è

   $$\alpha = \arcsin\left(\frac{\langle v, n(1) \rangle}{\|v\| \, \|n(1)\|}\right) = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{6 \cdot 2}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

3. Abbiamo

   $$d(P, \pi(k)) = \frac{|1|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

   Poiché $k^2 + 1 \geq 1$ per ogni $k \in \mathbb{R}$, la massima distanza è data da $k = 0$.

4. La direzione ortogonale al piano $\pi(k)$ è data dal vettore $n(k) = (k, 1, 0)$ e dunque la retta $r(k)$ è data parametricamente da $(kt, t+1, 2)$. In equazioni cartesiane otteniamo

   $$r(k) : \begin{cases} x - ky + k = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

5. (Da sistemare) Risolvendo il sistema

   $$\begin{cases} x - ky + k = 0 \\ z - 2 = 0 \\ kx + y = 0 \end{cases}$$

   si ottiene che il punto $Q(k)$ ha coordinate $(-k/(k^2 + 1), k^2/(k^2 + 1), 2)$. Tali coordinate soddisfano le equazioni

   $$C : \begin{cases} x^2 + y^2 - y \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

   Da qui si può poi concludere che C è una circonferenza nel piano $z = 2$.

   Potevamo procedere anche in un altro modo. Sia S la proiezione di Q su $\pi(0)$. Allora i punti $Q(k)$ sono punti sul piano $z = 2$ tali che l'angolo convesso fra $\overline{QQ(k)}$ e $\overline{SQ(k)}$ è retto. Questo implica che i punti $Q(k)$ sono sulla circonferenza in $z = 2$ con diametro il segmento SQ.

$\square$

Esercizio 2. *Sia $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ lo spazio proiettivo reale tridimensionale dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Sia r la retta passante per i due punti $P_1 = [1, 2, 3, 0]$ e $P_2 = [0, 0, 1, -1]$. Sia s la retta di equazioni*

$$s : \begin{cases} x_0 + x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

1. *Si scrivano delle equazioni cartesiane per r e si mostri che r ed s sono sghembe.*

2. *Sia $Q = [2, -1, -1, 1] \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ un punto. Siano π_1 il piano passante per Q e contenente s e π_2 il piano passante per Q e contenente r. Sia t la retta data dall'intersezione fra π_1 e π_2. Scrivere equazioni cartesiane per t.*

3. *Si dimostri che, in generale, date due rette sghembe r, s in $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ ed un punto Q non contenuto né in r né in s, esiste un'unica retta t passante per Q che interseca sia r sia s (Hint: costruire t come nel punto 2).*

Soluzione.

1. Possiamo ottenere delle equazioni per r imponendo che

$$\mathrm{rk} \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

da cui

$$r : \begin{cases} 2x_0 - x_1 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Le due rette r e s sono sghembe se e solo se non hanno punti in comune, cioè se

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Tale determinante è uguale a 4 e quindi r ed s sono in effetti sghembe.

2. Determiniamo il piano passante per Q ed r. Il fascio di piani passanti per r è dato da

$$\lambda(x_0 + x_2) + \mu x_1 = 0$$

con $(\lambda, \mu) \neq 0$. Imponendo il passaggio per Q otteniamo

$$\lambda - \mu = 0$$

da cui $\pi_1 : x_0 + x_1 + x_2 = 0$.

Allo stesso modo consideriamo il fascio di piani passanti per s

$$\lambda(2x_0 - x_1) + \mu(3x_1 - 2x_2 - 2x_3)$$

e imponiamo la condizione di passaggio per Q abbiamo

$$5\lambda - 3\mu = 0$$

da cui $\pi_2 : 3x_0 + 6x_1 - 5x_2 - 5x_3 = 0$.

La retta t ha quindi equazioni

$$r : \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_0 + 6x_1 - 5x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

3. (Da sistemare)Siano π_1 il piano passante per Q e contenente s e π_2 il piano passante per Q e contenente r. Poiché r ed s sono sghembe $\pi_1 \neq \pi_2$. Sia t la retta data dall'intersezione fra π_1 e π_2. Tale retta esiste sempre (siamo nello spazio proiettivo!). Allora $t \cap r \neq \emptyset$ e $t \cap s \neq \emptyset$ in quanto sono rette che giacciono rispettivamente nei piani proiettivi π_1 e π_2.

   Dimostriamo ora l'unicità di t. Sia v una retta con la proprietà di contenere P e intersecare r ed s. Allora v è contenuta nei piani π_1 e π_2 e dunque $v = \pi_1 \cap \pi_2 = t$.

   $\square$