Geometria II

Esercitazione 26 Marzo 2013

Luca Tasin

Esercizio 1. *Sia $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ il piano euclideo reale dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y) e sia $\mathcal{C}$ la conica definita come*

$$\mathcal{C} : x^2 + y^2 + 4xy - 2y + 1$$

1. *Si dimostri che $\mathcal{C}$ è un'iperbole e se ne trovi il centro.*
2. *Si calcoli la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$, determinando un'isometria diretta $S : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ tale che $S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.*

Soluzione.

1. Siano
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
le matrici associate a $\mathcal{C}$. Poiché $\det A = -4 \neq 0$ e $\det A_0 = -3 < 0$ deduciamo che $\mathcal{C}$ è un'iperbole non degenere.

   Otteniamo le equazioni del centro O di $\mathcal{C}$ risolvendo il sistema
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
che dà $O = (2/3, -1/3)$.

2. Per trovare l'isometria cercata partiamo calcolando una rotazione R che ci consenta di avere gli assi di $\mathcal{C}$ paralleli agli assi coordinati. Questo corrisponde a trovare una base ortonormale di $\mathbb{E}^2$ che diagonalizza A_0.

   Cerchiamo quindi gli autovalori di A_0. Il polinomio caratteristico di A_0 è
$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$$
da cui $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$.

I corrispondenti autovettori normalizzati sono

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

e la matrice della rotazione R è

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Siano (x_1, x_2) le nuove coordinate rispetto alla base (v_1, v_2). Allora abbiamo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ -x_1 + y_1 \end{pmatrix}$$

da cui, ponendo $\mathcal{C}_1 = R^{-1}(C)$, otteniamo che $\mathcal{C}_1$ ha equazione

$$(x_1+y_1)^2/2 + (-x_1+y_1)^2/2 + 4(x_1+y_1)(-x_1+y_1)/2 - 2(-x_1+y_1)/\sqrt{2} + 1$$
$$= -x_1^2 + 3y_1^2 + \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}y_1 + 1 = 0.$$

Scriviamo subito la matrice associata alla trasformazione R^{-1}, cioè

$$M^{-1} = M^t = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo ora trovare una traslazione che sposti il centro di $\mathcal{C}_1$ in $(0,0)$. Abbiamo due metodi.

Metodo del completamento dei quadrati

Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 : \quad & -x_1^2 + 3y_1^2 + \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}y_1 + 1 \\ & = -(x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{1}{2} + 3(y_1 - \frac{\sqrt{2}}{6})^2 - \frac{1}{6} + 1 = 0. \end{aligned}$$

Da cui otteniamo la traslazione

$$T : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_1 - \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$$

e la forma canonica

$$D = T(\mathcal{C}_1) : \ \frac{3}{4}x_2^2 - \frac{9}{4}x_2^2 = 1.$$

Abbiamo $S = T \circ R^{-1}$ e quindi

$$S : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_1 - \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x - y - 1 \\ x + y - \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Metodo del centro

Le coordinate del centro O_1 di $\mathcal{C}_1$ rispetto alla nuova base sono

$$O_1 = M^{-1} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \frac{1}{3}).$$

Dunque la traslazione che stiamo cercando è

$$T : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_1 - \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}.$$

Da cui, sostituendo in $\mathcal{C}_1$ $x_1 = x_2 + \sqrt{2}/2$ e $y_1 = y_2 + \sqrt{2}/6$, otteniamo la forma canonica di $\mathcal{C}$

$$D = T(\mathcal{C}_1) : \ \frac{3}{4}x_2^2 - \frac{9}{4}x_2^2 = 1$$

e l'isometria è

$$S : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_1 - \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x - y - 1 \\ x + y - \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 2. *Sia $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ lo spazio proiettivo complesso tridimensionale dotato del riferimento proiettivo standard $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Consideriamo la quadrica $\mathcal{C}(k)$ definita come*

$$\mathcal{C}(k) : \ x_0^2 + (k-1)x_1^2 - x_2^2 + 2kx_0x_3 + 2x_1x_2 = 0.$$

1. *Al variare di $k \in \mathbb{C}$ si determini la forma canonica $\mathcal{D}(k)$ di $\mathcal{C}(k)$.*

2. *Nel caso $k = 2$ si determini una proiettività $T : \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ tale che $T(\mathcal{C}(2)) = \mathcal{D}(2)$.*

Soluzione.

1. Nel proiettivo complesso la classe di ogni quadrica è determinata semplicemente dal rango della matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k \\ 0 & k-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché $\det A = k^3$ concludiamo che per $k \neq 0$ la quadrica $\mathcal{C}(k)$ ha rango 4 e dunque la sua forma canonica è

$$\mathcal{D}(k): \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Per $k = 0$ abbiamo invece $\mathrm{rk}A = 2$, da cui la forma canonica

$$\mathcal{D}(0): \quad x_0^2 + x_1^2 = 0.$$

2. Applichiamo il metodo del completamento dei quadrati.

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(2): \ & x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + 4x_0x_3 + 2x_1x_1 \\ =&(x_0 + 2x_3)^2 - 4x_3^2 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_2^2\end{aligned}$$

Possiamo dunque definire la proiettività

$$T : [x_0, x_1, x_2, x_3] \mapsto [X_0, X_1, X_2, X_3] = [x_0 + 2x_3, x_1 + x_2, i\sqrt{2}x_2, 2ix_3]$$

così che $T(\mathcal{C}(2)) = \mathcal{D}(2)$, dove

$$\mathcal{D}(2) = X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^3.$$

□