Esercizi per Geometria II
Geometria euclidea e proiettiva

Filippo F. Favale

10 aprile 2014

Esercizio 1
Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo tridimensionale dotato di un riferimento cartesiano ortonormale di coordinate (x, y, z). Si considerino il piano $\pi : 2x + y - z = 0$ e i punti $P = (-1, -2, 1)$, $Q = (0, -1, 4)$ e $R = (1, 1, 3)$.

- Ricavare tutti i piani che contengono i tre punti P, Q ed R. Tra questi piani dire se ce ne sono passanti per l'origine del sistema di coordinate.
- Scrivere delle equazioni cartesiane per la retta r per P e Q. Calcolare la distanza di π da P e di π da r.
- Sia s la retta ortogonale a π e passante per R. Si scriva l'equazione cartesiana del piano τ contenente s e passante per Q.
- Si ricavi la proiezione ortogonale di Q sul piano π.

Esercizio 2
Sia $\mathbb{P}^3$ lo spazio proiettivo reale dotato del riferimento proiettivo di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Si consideri, al variare del parametro k, la quadrica $\mathcal{C}_\|$ di equazione

$$\mathcal{C}_k : x_0^2 - x_1^2 + (k-2)x_3^2 + 2(k-1)x_0x_1 + 2x_2x_3 = 0.$$

- Si dica per quali valori di k, $\mathcal{C}_k$ è non degenere.
- Per questi valori, si scriva la forma canonica di $\mathcal{C}_k$.
- Scrivere una proiettività che mandi $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{-2}$ nella sua forma canonica.
- Rispondere alle stesse domande nel caso in cui il campo è $\mathbb{C}$ invece di $\mathbb{R}$.

Esercizio 3
Si consideri $\mathbb{E}^2$ dotato di un riferimento cartesiano ortonormale di coordinate (x, y) e origine O. Si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione

$$x^2 + xy + y^2 - 2y - x = 0.$$

- Si dimostri che $\mathcal{C}$ è non degenere e dire di che tipo di conica si tratta.
- Descrivere esplicitamente un'isometria che manda la conica nella sua forma canonica.
- Scrivere le equazioni cartesiane degli assi di $\mathcal{C}$ nelle coordinate (x, y).

Soluzione esercizio 1. Se i tre punti sono allineati ci saranno infiniti piani che li contengono, i piani del fascio che contiene la retta su cui giacciono P, Q e R. In caso contrario esiste un unico piano che li contiene. Siccome

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, 1, 3)$$

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (2, 3, 2)$$

abbiamo che i tre punti non sono allineati e quindi esiste un solo piano che li contiene. Questo può essere descritto come l'unico piano che ha giacitura generata da $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ passante per P. Seguiamo una strada alternativa: ricaviamo un vettore n non nullo ortogonale alla giacitura. Avremo $n = (a, b, c)$ con $< n, \overrightarrow{PQ} >= a + b + 3c = 0$ e $< n, \overrightarrow{PR} >= 2a + 3b + 2c = 0$. Da queste due condizioni si deduce

$$n = (-7c, 4c, c)$$

quindi possiamo prendere come vettore normale il vettore $n = (-7, 4, 1)$. Il piano cercato è quindi descritto da

$$< \overrightarrow{x} - P, n >= 0 \Longrightarrow -7x + 4y + z = 0.$$

Da questo ricaviamo anche che l'origine vi appartiene. Potevamo accorgercene subito infatti sappiamo che P, Q e R appartengono al piano e che

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 3) = \overrightarrow{OR}.$$

Delle equazioni parametriche per r sono

$$r : \begin{cases} x = -1 + \alpha \\ y = -2 + \alpha \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases}$$

dalle quali si può ricavare (esplicitando ad esempio $\alpha = x + 1$ dalla prima equazione)

$$r : \begin{cases} \alpha = 1 + x \\ x - y - 1 = 0 \\ 3x - z + 4 = 0 \end{cases}$$

ottenendo le seguenti equazioni cartesiane $x - y - 1 = 3x - z + 4 = 0$.

Una direttrice di r è $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 3)$ che è ortogonale al vettore $n_\pi = (2, 1, -1)$ che identifica la direzione ortogonale a π. Questo ci dice che r è parallela a π o è contenuta nel piano. Osservando che $P \in r$ e che le coordinate di P non soddisfano l'equazione cartesiana di π deduciamo che r non è contenuta in π. Questo ci permette di affermare che

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|-2-2-1|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}.$$

Il piano τ avrà giacitura generata da n_π e da $\overrightarrow{RQ} = (1, 2, -1)$. Un vettore normale al piano sarà quindi del tipo $n_\tau = (a, b, c)$ con $2a + b - c = a + 2b - c = 0$: possiamo prendere ad esempio $n_\tau = (1, 1, 3)$. Avremo quindi

$$\tau : (x-1) + (y-1) + 3(z-3) = x + y + 3z - 11 = 0.$$

Per ricavare la proiezione ortogonale di Q su π basta scrivere la retta t ortogonale a π per Q e ricavare l'intersezione con π.

$$t : \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = -1 + \alpha \\ z = 4 - \alpha \end{cases}$$

Sostituendo queste espressioni parametriche nell'equazione cartesiana di π otteniamo

$$4\alpha - 1 + \alpha - 4 + \alpha = 0$$

da cui $\alpha = 5/6$ e $t \cap \pi = (5/3, -1/6, 19/6)$. $\square$

Soluzione esercizio 2. Consideriamo, prima di tutto, la matrice associata alla quadrica nelle coordinate proiettive assegnate:

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & k-1 & 0 & 0 \\ k-1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & k-2 \end{bmatrix}.$$

Per il calcolo del determinante notiamo che è una matrice diagonale a blocchi quindi possiamo calcolare il determinante facendo il prodotto dei due determinanti 2x2:

$$\mathrm{Det}(A_k) = \mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} 1 & k-1 \\ k-1 & -1 \end{bmatrix}\right) \mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & k-2 \end{bmatrix}\right) = k^2 - 2k + 2.$$

Per $k \in \mathbb{R}$ abbiamo che $\mathrm{Det}(A_k) > 0$ poichè il discriminante dell'equazione è negativo: questo vuol dire che per ogni $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_k$ è non degenere.

Per scrivere la forma canonica al variare di $k \in \mathbb{R}$ ci basta determinare la segnatura di A_k come forma quadratica reale e per farlo ci servono i segni degli autovalori. Scriviamo il polinomio caratteristico di A_k:

$$p_{A_k}(\lambda) = \mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & k-1 & 0 & 0 \\ k-1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & k-2-\lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & k-1 \\ k-1 & -1-\lambda \end{bmatrix}\right) \mathrm{Det}\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & k-2-\lambda \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (\lambda^2 - (k^2 - 2k + 2))(\lambda^2 - \lambda(k-2) - 1).$$

Notiamo che il primo fattore, siccome il termine noto è sempre positivo, si spezza come

$$(\lambda - \sqrt{k^2 - 2k + 2})(\lambda + \sqrt{k^2 - 2k + 2})$$

e quindi produce un autovalore positivo e uno negativo. Potremmo procedere in modo simile per il secondo fattore ma possiamo utilizzare un piccolo trucco: chiamiamo λ_1 e λ_2 i due zeri del primo fattore di $p_{A_k}(\lambda)$ e λ_3 e λ_4 quelli del secondo. Sappiamo che $\mathrm{Det}(A_k) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 > 0$ e che $\lambda_1\lambda_2 < 0$. Di conseguenza $\lambda_3\lambda_4$ deve essere negativo quindi le segnatura della matrice A intesa come forma quadratica reale è $(2, 2)$. Questo ci permette di concludere che la forma canonica di $\mathcal{C}_k$ è, indipendentemente da k, la seguente:

$$\mathcal{D} : x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Poniamo $k = -2$ e usiamo il completamento dei quadrati per ridurre $\mathcal{C}_{-2}$ a forma canonica.

$$
\begin{aligned}
&x_0^2 - x_1^2 - 4x_3^2 - 6x_0x_1 + 2x_2x_3 = \\
&= (x_0^2 - 6x_0x_1 - x_1^2) - (4x_3^2 - 2x_2x_3) = \\
&= (x_0^2 - 6x_0x_1 - x_1^2 + 10x_1^2 - 10x_1^2) - \left(4x_3^2 - 2(2x_3)\frac{x_2}{2} + \frac{x_2^2}{4} - \frac{x_2^2}{4}\right) = \\
&= (x_0^2 - 6x_0x_1 + 9x_1^2) - 10x_1^2 - \left(4x_3^2 - 2(2x_3)\frac{x_2}{2} + \frac{x_2^2}{4}\right) + \frac{x_2^2}{4} = \\
&= (x_0 - 3x_1)^2 - (\sqrt{10}x_1)^2 - \left(2x_3 - \frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{4}\right)^2
\end{aligned}
$$

Se definiamo la proiettività T come segue

$$
T : \begin{cases} X_0 = x_0 - 3x_1 \\ X_1 = \frac{x_2}{4} \\ X_2 = \sqrt{10}x_1 \\ X_3 = 2x_3 - \frac{x_2}{2} \end{cases}
$$

abbiamo che $\mathcal{C}_{-2}$ viene mandata nella sua forma canonica. Si ha infatti

$$
\begin{aligned}
&x_0^2 - x_1^2 - 4x_3^2 - 6x_0x_1 + 2x_2x_3 = [...] = \\
&= (x_0 - 3x_1)^2 - (\sqrt{10}x_1)^2 - \left(2x_3 - \frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{4}\right)^2 = \\
&= X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2.
\end{aligned}
$$

Vediamo ora di rispondere alle stesse domande nel caso in cui il campo è $\mathbb{C}$ invece di $\mathbb{R}$. Per scrivere la forma canonica su $\mathbb{C}$ al variare di $k \in \mathbb{C}$ ci basta determinare il rango di A. Siccome $\mathrm{Det}(A_k) = k^2 - 2k + 2$ ha discriminante negativo sappiamo che esistono esattamente due valori complessi $k_1 \neq k_2$ (non reali) che annullano $\mathrm{Det}(A_k)$ e che quindi rendono degenere la quadrica. Per tutti gli altri valori di k la quadrica è non degenere. Calcoliamo il rango di A_k quando il determinante è uguale a 0.

Notiamo che la terza e la quarta colonna di A_k sono indipendenti: generano uno spazio vettoriale di dimensione 2. Le prime due colonne di A_k, per $k = k_i$, devono essere dipendenti ma sono sicuramente non identicamente nulle. Questo vuol dire che la dimensione dello spazio vettoriale generato dalle colonne di A_k è 3 per $k = k_i$. Di conseguenza la forma canonica di $\mathcal{C}_k$ è

$$
\mathcal{D}_k : \begin{cases} \text{se } k \neq k_i & x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \\ \text{se } k = k_i & x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}
$$

Per scrivere la proiettività che trasforma in forma canonica $\mathcal{C}_{-2}$ nel caso complesso basta considerare la seguente proiettività

$$
T' : \begin{cases} X_0 = x_0 - 3x_1 \\ X_1 = \frac{x_2}{4} \\ X_2 = i\sqrt{10}x_1 \\ X_3 = i\left(2x_3 - \frac{x_2}{2}\right) \end{cases}
$$

infatti abbiamo

$$\begin{aligned} x_0^2 - x_1^2 - 4x_3^2 - 6x_0x_1 + 2x_2x_3 = [...] = \\ = (x_0 - 3x_1)^2 - (\sqrt{10}x_1)^2 - \left(2x_3 - \frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{4}\right)^2 = \\ = X_0^2 + X_1^2 - (-i)^2X_2^2 - (-i)^2X_3^2 = X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2. \end{aligned}$$

□

Soluzione esercizio 3. La matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ è

$$A := \left[\begin{array}{c|cc} 0 & -1/2 & -1 \\ \hline -1/2 & 1 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1 \end{array}\right]$$

e ha determinante $\mathrm{Det}(A) = -3/4 \neq 0$ da cui si deduce che $\mathcal{C}$ è non degenere. Se chiamiamo A_0 la matrice dei termini quadratici abbiamo $\mathrm{Det}(A_0) = 3/4$ quindi $\mathcal{C}$ è un ellisse. Notiamo che è un'ellisse reale ad esempioaccorgendoci che non c'è il termine noto: l'origine è un punto della conica.

Ricaviamo il centro dell'ellisse. Per farlo basta risolvere il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

la cui soluzione è $(x, y) = (0, 1)$ che sono appunto le coordinate del centro. Trasliamo la conica in modo che il centro vada nell'origine. Per farlo basta considerare la traslazione

$$T : \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y - 1 \end{cases}$$

e andare a sostituire le nuove coordinate nell'espressione algebrica (in x e y) della conica:

$$\begin{aligned} 0 = x^2 + xy + y^2 - 2y - x = \\ = x_1^2+x_1(y_1+1)+(y_1+1)^2-2(y_1+1)-x_1 = x_1^2+x_1y_1+x_1+y_1^2+1+2y_1-2y_1-2-x_1 = \\ = x_1^2 + x_1y_1 + y_1^2 - 1 \end{aligned}$$

Per eliminare il termine misto in x_1y_1 dobbiamo diagonalizzare la matrice dei termini quadratici

$$A_0 := \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono 1/2 e 3/2. Gli autovettori associati sono

$$\tilde{v}_{3/2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \tilde{v}_{1/2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice di rotazione assumerà quindi la forma

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Chiamando (x_2, y_2) le coordinate di $\mathbb{E}^2$ ottenute ruotando il sistema di riferimento abbiamo

$$R : \begin{cases} x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1) \\ y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x_1 + y_1) \end{cases}$$

la cui inversa è

$$R^{-1} : \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_2 - y_2) \\ y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_2 + y_2) \end{cases} .$$

Andando a sostituire ricaviamo la forma canonica di $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} 0 = x^2 + xy + y^2 - 2y - x = [...] = x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 - 1 = \\ = \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2 - 2x_2 y_2) + \frac{1}{2}(x_2^2 - y_2^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2 + 2x_2 y_2) - 1 = \\ = \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - 1 \end{aligned}$$

che risulta quindi essere

$$\mathcal{D} : \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}y_2^2 = 1.$$

Nelle coordinate standare è facile scrivere gli assi di simmetria: le loro equazioni sono

$$x_2 = 0 \qquad \text{e} \qquad y_2 = 0.$$

Per ricavare l'espressione nelle coordinate iniziali basta sostituire ripercorrendo le due trasformazioni:

$$0 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + y_1) \Longrightarrow 0 = x_1 + y_1 = x + y - 1 \Longrightarrow y = -x + 1$$

$$0 = y_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x_1 + y_1) \Longrightarrow 0 = -x_1 + y_1 = -x + y - 1 \Longrightarrow y = x + 1.$$

□