Esercitazioni di Geometria II

Letizia Pernigotti - pernigotti@science.unitn.it

30 marzo 2012

Esercizio 1. Sia $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ il piano proiettivo reale numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Definiamo le rette proiettive $r_1(k), r_2(k)$ come

$$r_1(k) : \begin{cases} x_0 + 2x_1 + (k-1)x_2 - x_3 = 0 \\ x_0 + x_2 = 0, \end{cases} \qquad r_2(k) = \begin{cases} -kx_0 + x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

e siano dati i punti di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$

$$A = [1, 2, 2, -1], \quad B = [1, 3, -1, 0], \quad C(s) = [3, 1, -1, s+2]$$

Si risponda ai seguenti quesiti:

(1) Determinare i valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ tali per cui le rette $r_1(k)$ e $r_2(k)$ siano incidenti non coincidenti.
(2) Determinare, se esistono, i valori del parametro reale $s \in \mathbb{R}$ tali per cui i tre punti A, B e $C(s)$ sono allineati.
(3) Per i valori di $s \in \mathbb{R}$ tali per cui non sono allineati, calcolare l'equazione del piano $\pi(s)$ che li contiene.
(4) Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la retta $r_2(k)$ è contenunta in $\pi(0)$.
(5) Determinare, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali per cui la retta per A e B è sghemba con la retta $r_1(k)$.

※ **Esercizio 1.**

(1) Le due rette si intersecano se e solo se il sistema

$$\begin{cases} x_0 + 2x_1 + (k-1)x_2 - x_3 = 0 \\ x_0 + x_2 = 0 \\ -kx_0 + x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

ammette una soluzione non banale, il che equivale a chiedere

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & k-1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -k & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Svolgendo i calcoli

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k-1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -k & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -k & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1+k \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = k$$

Le due rette sono dunque sempre incidenti se e solo se $k = 0$. Osserviamo però che, per $k = 0$, la prima equazione della retta $r_2(k)$ viene a coincidere con la seconda equazione. Ciò significa che, per $k = 0$, la retta $r_2(k)$ è in realtà un piano proiettivo. Per controllare che non siano coincidenti (in questo caso, controllare che non siano "coincidenti" significa controllare che la retta $r_1(0)$ non sia contenuta nel piano $r_2(0)$), bisogna verificare che il rango della matrice sia 3. Svolgendo i calcoli:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

la quale ha evidentemente rango 3. Di conseguenza le due rette non sono mai incidenti e, per $k = 0$, la retta $r_2(0)$ diventa in realtà un piano che interseca la retta $r_1(0)$ senza contenerla.

(2) I tre punti sono allineati se e solo se

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & s+2 \end{pmatrix} = 2.$$

Svolgiamo un po' di calcoli:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & s+2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & -7 & s+5 \end{pmatrix}$$

Poiché le ultime due righe non sono proporzionali, tale matrice ha sempre rango 3 e di conseguenza i tre punti sono non allineati per qualsiasi valore del parametro $s \in \mathbb{R}$.

(3) Per calcolare l'equazione del piano $\pi(s)$ poniamo

$$0 = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & s+2 \end{pmatrix}$$

Coefficiente di x_0:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ 1 & -1 & s+2 \end{vmatrix} = -3(2s+4-1) - (2s+4+1) = -8s - 14$$

Coefficiente di x_1:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ 3 & -1 & s+2 \end{vmatrix} = (2s+4-1) + (s+2+3) = 3s + 8$$

Coefficiente di x_2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 3 & 1 & s+2 \end{vmatrix} = -(2s+4+1) + 3(s+2+3) = s + 10$$

Coefficiente di x_3:

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = -(-7-15) = 22$$

L'equazione del piano proiettivo $\pi(s)$ è dunque:

$$\pi(s): \quad -(8s+14)x_0 + (3s+8)x_1 + (s+10)x_2 + 22x_3 = 0$$

(4) Riscriviamo l'equazione del piano $\pi(0)$ corrispondente al valore $s = 0$ del parametro reale s:

$$\pi(0): \quad -7x_0 + 4x_1 + 5x_2 + 11x_3 = 0$$

La retta $r_2(k)$ è contenuta in $\pi(0)$ se e solo se la matrice ottenuta dalle equazioni della retta e del piano

$$A = \begin{pmatrix} -k & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -7 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

ha rango due. Eseguiamo un po' di passaggi (che non modificano il rango):

$$\begin{pmatrix} -k & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -7 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{scambio righe}} \begin{pmatrix} -7 & 4 & 5 & 11 \\ -k & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\xrightarrow{\text{scambio col.}} \begin{pmatrix} 4 & -7 & 5 & 11 \\ 1 & -k & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 11 & -7 & 5 & 4 \\ 0 & -k & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha rango 2 se e solo se $k = 0$. Tuttavia, per $k = 0$, $r_2(0)$ definisce un piano e non una retta. Ciò significa che per $k = 0$ i piani $r_2(0)$ e $\pi(0)$ sono incidenti non coincidenti e per $k \neq 0$ la retta $r_2(k)$ non è mai contenuta nel piano $\pi(0)$.

(5) Determiniamo l'equazione della retta r_3 passante per A e B. Tale equazione è data dalla condizione:

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Poiché una retta proiettiva è data da due equazioni, consideriamo due minori 3×3:

$$0 = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = x_0(-2-6) - x_1(-1-2) + x_2(3-2) =$$

$$= -8x_0 + 3x_1 + x_2$$

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -x_1 - 3x_2 + x_3(-2-6) =$$

$$= -x_1 - 3x_2 - 8x_3$$

La retta r_3 è descritta dunque dalle equazioni

$$r_3: \begin{cases} -8x_0 + 3x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \end{cases}$$

Le due rette $r_1(k)$ e r_3 sono sghembe se e solo se il determinante della matrice associata è non nullo. Calcoliamo

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k-1 & -1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ -8 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & k-1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -8 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & k+5 & 15 \\ 0 & -8 & 24 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 19 & -8 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 24k - 32 - 160 = 24k - 192$$

Di conseguenza le due rette sono sghembe se e solo se

$$k \neq \frac{192}{24} = 8$$

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ il piano proiettivo complesso numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Definiamo la conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ come

$$\mathcal{C}: \quad 3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_3 - 4x_0x_2 - 6x_0x_1 = 0$$

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Si determini la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$.
(2) Si determini la proiettività $S : \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ tale che $S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.

※ **Esercizio 2.**

(1) La matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ è data da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Calcoliamo il determinante di A utilizzando l'ultima riga:

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 21 = 25 \neq 0$$

Poiché $\det A \neq 0$, $\mathcal{C}$ è una conica generale di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ con forma canonica $\mathcal{D}$ data dall'equazione cartesiana

$$\mathcal{D}: \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \tag{1}$$

(2) Calcoliamo una proiettività $S : \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ tale che $S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$ mediante la tecnica di completamento dei quadrati:

$$\mathbf{3x_1^2} + x_2^2 \mathbf{- x_3^2} + \mathbf{2x_1x_3} - 4x_0x_2 - 6x_0x_1 =$$
$$= -(x_1 - x_3)^2 + 4x_1^2 + \mathbf{x_2^2} - \mathbf{4x_0x_2} - 6x_0x_1 =$$
$$= \Big(i(x_1 - x_3)\Big)^2 + (x_2 - 2x_0)^2 - 4x_0^2 + \mathbf{4x_1^2} - \mathbf{6x_0x_1} =$$
$$\Big(i(x_1 - x_3)\Big)^2 + (x_2 - 2x_0)^2 + \left(2x_1 - \frac{3}{2}x_0\right)^2 + \frac{9}{4}x_0^2 - 4x_0^2 =$$
$$= \Big(i(x_1 - x_3)\Big)^2 + (x_2 - 2x_0)^2 + \left(2x_1 - \frac{3}{2}x_0\right)^2 + \left(i\frac{\sqrt{7}}{2}x_0\right)^2 \tag{2}$$

Definiamo S ponendo ad esempio

$$S : [x_0, x_1, x_2, x_3] \mapsto \left[i\frac{\sqrt{7}}{2}x_0, \quad 2x_1 - \frac{3}{2}x_0, \quad x_2 - 2x_0, \quad i(x_1 - x_3)\right].$$

Per costruzione, se $w = [w_0, w_1, w_2, w_3] \in \mathcal{C}$ è un punto di $\mathcal{C}$ (cioè le sue coordinate soddisfano l'equazione (4)), allora $S(w) \in \mathcal{D}$, cioè le coordinate di $S(w)$ soddisfano l'equazione (3). Infatti

$$3x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_3 - 4x_0x_2 - 6x_0x_1 =$$
$$= \left(i\frac{\sqrt{7}}{2}x_0\right)^2 + \left(2x_1 - \frac{3}{2}x_0\right)^2 + (x_2 - 2x_0)^2 + \Big(i(x_1 - x_3)\Big)^2 =$$
$$= \big(S(x_0)\big)^2 + \big(S(x_1)\big)^2 + \big(S(x_2)\big)^2 + \big(S(x_3)\big)^2$$

In altri termini, $S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$, cioè S è la proiettività cercata.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ il piano proiettivo complesso numerico dotato del riferimento proiettivo standard di coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Definiamo la conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ come

$$\mathcal{C}: \quad 2x_1^2 - x_0^2 + 4x_0x_1 - 6x_0x_2 = 0$$

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Si determini la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$.
(2) Si determini la proiettività $S : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tale che $S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.

※ Esercizio 3.

(1) La matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ è data da

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Calcoliamo il determinante di A:

$$\det A = -3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$$

Poiché $\det A \neq 0$, $\mathcal{C}$ è una conica generale di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ con forma canonica $\mathcal{D}$ data dall'equazione cartesiana

$$\mathcal{D}: \quad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0. \tag{3}$$

(2) Calcoliamo una proiettività $S : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tale che $S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$ mediante la tecnica di completamento dei quadrati:

$$\begin{aligned} 2x_1^2 - x_0^2 + 4x_0x_1 - 6x_0x_2 &= 2(x_1 + x_0)^2 - 3x_0^2 - 6x_0x_2 = \\ &= 2(x_1 + x_0)^2 - 3(x_0 + x_2)^2 + 3x_2^2 = \\ &= \left(\sqrt{2}(x_0 + x_1)\right)^2 + \left(i\sqrt{3}(x_0 + x_2)\right)^2 + (\sqrt{3}x_2)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Definiamo S ponendo ad esempio

$$S : [x_0, x_1, x_2] \mapsto [\sqrt{2}(x_0 + x_1), i\sqrt{3}(x_0 + x_2), \sqrt{3}x_2].$$

Per costruzione, se $w = [w_0, w_1, w_2] \in \mathcal{C}$ è un punto di $\mathcal{C}$ (cioè le sue coordinate soddisfano l'equazione (4)), allora $S(w) \in \mathcal{D}$, cioè le coordinate di $S(w)$ soddisfano l'equazione (3). In altri termini, $S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$, cioè S è la proiettività cercata.