Esercizi per Geometria II
Topologia generale

Filippo F. Favale

26 maggio 2014

Esercizio 1
Sia $B_r(P)$ la palla aperta di $\mathbb{R}^2$ avente centro P e raggio r e $D_r(P)$ la sua chiusura (rispetto alla topologia euclidea). Si considerino gli insiemi $X = B_1((0,0))$,

$$\mathcal{B}_1 := \{B_r(P) \,|\, B_r(P) \subset B_1(P) \setminus \{0\}\}$$

e

$$\mathcal{B}_2 := \{\{0\} \cup (X \setminus D_r((0,0))) \,|\, 0 < r < 1\}.$$

1) Si dimostri che $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ è una base. Nel seguito si indichi con τ la topologia generata dagli elementi di $\mathcal{B}$.

2) Si dica se (X, τ) è uno spazio topologico compatto.

3) Si dica se (X, τ) è T_0, T_1 o T_2.

4) Si ricavi chiusura (in X) e interno dei seguenti sottoinsiemi di X:

$$Y := D_{1/2}(0,0) \setminus \{(0,0)\}, Z := D_{1/2}(0,0), W := \{(x,y) \in X \,|\, y = \sqrt{2}/2\}.$$

Esercizio 2
Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x)x$ dove $\chi_A(x)$ è la funzione che vale 1 se e solo se $x \in A$ e 0 altrimenti. Sia τ_e la topologia euclidea su $\mathbb{R}$.

1) Ricavare quali sono le topologie τ_1 e τ_2 su $\mathbb{R}$ che rendono continua

$$f : (\mathbb{R}, \tau_i) \to (\mathbb{R}, \tau_e)$$

e per le quali si abbia rispettivamente che sono la più fine e la meno fine con questa proprietà.

2) Dire se $\mathbb{Q}$ è chiuso in $(\mathbb{R}, \tau_2)$ e su $(\mathbb{R}, \tau_e)$.

3) Descrivere gli intorni aperti e la chiusura di $\{0\}, \{1\}$ e $\{\pi\}$.

4) Dire se $(\mathbb{R}, \tau_2)$ è compatto, connesso, T_0, T_1 o T_2.

Soluzione dell'esercizio 1
Per mostrare che $\mathcal{B}$ è una base basta mostrare che gli elementi di $\mathcal{B}$ coprono tutto X e che l'intersezione di due elementi di $\mathcal{B}$ si può scrivere come unione arbitraria di elementi di $\mathcal{B}$. La prima condizione è di facile verifica: gli elementi di $\mathcal{B}_1$ coprono tutto lo spazio meno il punto $(0,0)$ che appartiene ogni elemento di $\mathcal{B}_2$. Se B_1 e B_2 sono due elementi di $\mathcal{B}$ e almeno uno appartiene a $\mathcal{B}_1$ la loro intersezione è contenuta in $B_1((0,0)) \setminus \{(0,0)\}$ e si può coprire con elementi di

$\mathcal{B}_1$ poichè $\mathcal{B}_1$ è base per la topologia euclidea su $B_1((0,0)) \setminus \{(0,0)\}$. Se invece entrambi appartengono a $\mathcal{B}_2$ l'intersezione stessa di B_1 e B_2 è un elemento di $\mathcal{B}_2$. Abbiamo quindi verificato che $\mathcal{B}$ è una base.

Mostriamo che X non è compatto. Per farlo consideriamo la collezione

$$\mathcal{U} := \{\{0\} \cup (X \setminus D_{1/n}((0,0)))\}_{n>1}.$$

Si vede facilmente che $\mathcal{U}$ è un ricoprimento aperto di X. Tuttavia, ogni collezione finita di questi aperti non può coprire tutto X: un insieme del tipo $B_{1/m}((0,0)) \setminus \{(0,0)\}$ con m opportuno non sarà coperto. Di conseguenza (X, τ) non è compatto.

Mostriamo che X è T_2 (e quindi anche T_1 e T_0). Siano quindi $P, Q \in X$ due punti distinti. Se entrambi sono diversi da $(0,0)$ è facile trovare due palle aperte (due elementi di $\mathcal{B}_1$) disgiunte che hanno centri in P e Q rispettivamente. Se $P = (0,0)$ e $|Q| = a$ con $0 < a < 1$ possiamo considerare l'intorno aperto U di P con

$$U := \{0\} \cup (X \setminus D_{(a+3(1-a)/4)}((0,0)))$$

e come intorno V di Q una palla di centro Q e raggio opportuno in modo che sia contenuta strettamente nella bolla $B_{(a+3(1-a)/4)}((0,0))$. Abbiamo appena costruito due intorni aperti disgiunti di P e Q e questo basta per concludere che (X, τ) è T_2.

Osserviamo che Y è il complementare dell'aperto $\{0\} \cup (X \setminus D_{1/2}((0,0)))$ e in quanto tale è chiuso. Per ogni punto $P \in Y$, a parte quelli le cui coordinate soddisfano $\sqrt{x^2+y^2} = 1/2$, riusciamo a trovare un elemento di $\mathcal{B}_1$ che è contenuto in Y e che contiene P. Per gli altri punti invece nessun elemento di $\mathcal{B}$ che li contiene è interamente contenuto in Y: questo dimostra che $Y^o = B_{1/2}((0,0)) \setminus \{0\}$. Essendo (X, τ) T_1 abbiamo che $\{0\}$ è un chiuso: di conseguenza $Z = Y \cup \{0\}$ è esso stesso un chiuso. Il suo interno coincide con quello di Y infatti per tutti i suoi punti (a parte $(0,0)$) valgono le considerazioni fatte per Y mentre il punto $(0,0)$ è un punto di frontiera infatti ogni suo intorno interseca tanto Z (almeno in $(0,0)$) quanto il complementare.

Per W le cose sono diverse. Si nota, prima di tutto, che non ha punti interni: esso è contenuto in $B_1((0,0)) \setminus \{(0,0)\}$ e nessun elemento di $\mathcal{B}_1$ è contenuto al suo interno. Nessun punto di $B_1((0,0)) \setminus \{(0,0)\}$ che non sia anche in W può essere un punto di frontiera. Si ha però che ogni intorno di $(0,0)$ interseca W vicino a $(\pm\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e W^C in $(0,0)$. In definitiva $\overline{W} = W \cup \{(0,0)\}$.

Soluzione dell'esercizio 2
La topologia τ_1 è la topologia più fine in assoluto, cioè quella discreta. Essa infatti rende continua ogni applicazione da $(\mathbb{R}, \tau_1)$ in qualunque spazio topologico. La topologia meno fine che rende f continua è invece quella definita dalla seguente collezione di aperti:

$$\tau_2 := \{f^{-1}(V) \,|\, V \in \tau_e\}.$$

Sia V un insieme qualsiasi. Cerchiamo di capire come è fatta la controimmagine di V. Abbiamo ue casi possibili. Se $0 \notin V$ allora $f^{-1}(V) = V \setminus \mathbb{Q}$ mentre se $0 \in V$ avremo

$$f^{-1}(V) = f^{-1}((V \setminus \{0\}) \cup \{0\}) = f^{-1}(V \setminus \{0\}) \cup f^{-1}(\{0\}) = (V \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = V \cup \mathbb{Q}$$

cioè

$$f^{-1}(V) = \begin{cases} \text{se } 0 \notin V & V \setminus \mathbb{Q} \\ \text{se } 0 \in V & V \cup \mathbb{Q} \end{cases} \tag{1}$$

Osserviamo che, essendo $\{0\} \in (\mathbb{R}, \tau_e)$ un chiuso avremo che $\mathbb{Q} = f^{-1}(\{0\})$ è un chiuso.

Un intorno aperto di 0 dovrà necessariamente essere della forma $V \cup \mathbb{Q}$ con $V \in \tau_e$ e questo accade se e solo se $0 \in V$. Di conseguenza, se indichiamo con $\mathcal{U}_x$ l'insieme degli intorni aperti di x, avremo

$$\mathcal{U}_0 = \{f^{-1}(V) \mid V \in \tau_e, 0 \in V\} = \{V \cup \mathbb{Q} \mid V \in \tau_e, 0 \in V\}.$$

Per 1 le cose sono analoghe: se vogliamo che $1 \in f^{-1}(V)$ è necessario (e sufficiente) che $0 \in V$ quindi

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_0.$$

Per quanto riguarda gli intorni aperti di π la cosa è diversa. Se un aperto contiene π e 0 allora è del tipo $V \cup \mathbb{Q}$ mentre è anche possibile, se non contiene 0, che sia della forma $V \setminus \mathbb{Q}$. In definitiva:

$$\mathcal{U}_\pi = \{V \cup \mathbb{Q} \mid V \in \tau_e, 0, \pi \in V\} \cup \{V \setminus \mathbb{Q} \mid V \in \tau_e, 0 \notin V \ni \pi\}.$$

Per ricavare la chiusura di $\{0\}$ possiamo, ad esempio, ricorrere a una caratterizzazione della chiusura: la chiusura di un insieme coincide con l'intersezione di tutti i chiusi che contengono l'insieme. I chiusi che contengono 0 sono tutti e soli i complementari degli aperti che non contengono 0 e questi, per la specifica topologia che stiamo analizzando, sono tutti e soli gli insiemi del tipo $V \setminus \mathbb{Q}$ con $o \notin V$ (e $V \in \tau_e$). Avremo quindi

$$\overline{\{0\}} = \bigcap_{V \in \tau_e, 0 \notin V} (V \setminus \mathbb{Q})^C = \bigcap_{V \in \tau_e, 0 \notin V} (V^C \cup \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \bigcap_{V \in \tau_e, 0 \notin V} (V^C) = \mathbb{Q}.$$

Per ricavare la chiusura di $\{1\}$ possiamo procedere in modo analogo o ricordarci una caratterizzazione dei punti della chiusura: un punto P appartiene alla chiusura di un insieme se e solo se ogni suo intorno interseca l'insieme. Da questo e dal fatto che gli intorni aperti di 0 e 1 coincidono, deduciamo $\overline{\{1\}} = \mathbb{Q}$. Per quanto riguarda $\{\pi\}$ la cosa è più semplice: $\{\pi\} = f^{-1}(\{\pi\})$ e quindi risulta già essere un chiuso.

Consideriamo il sottospazio di $(\mathbb{R}, \tau_e)$ definito da $Y := \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ e munito della topologia indotta $\tau_e|_Y$ da quella euclidea. Y coincide con l'immagine di $\mathbb{R}$ tramite f e la topologia indotta è quella che rende continua l'applicazione f se restringiamo il codominio all'immagine: $f : (\mathbb{R}, \tau_2) \to (Y, \tau_e|_Y)$ è un'applicazione continua e suriettiva. Dalla definizione di Y è facile convincersi che non è compatto e nemmeno connesso. Di conseguenza, $(\mathbb{R}, \tau_2)$ non può essere né compatto né connesso.

Per quanto riguarda la connessione potevamo anche osservare che la controimmagine di un intervallo che non contiene l'origine e che ha estremi in $\mathbb{Q}$ non dipende dal fatto che l'intervallo sia chiuso o aperto. Ad esempio abbiamo

$$f^{-1}((1, 2)) = (1, 2) \setminus \mathbb{Q} = [1, 2] \setminus \mathbb{Q} = f^{-1}([1, 2]).$$

Di conseguenza $(1, 2) \setminus \mathbb{Q}$ è un insieme aperto e chiuso diverso dal vuoto e da tutto lo spazio: $\mathbb{R}$ non può quindi essere connesso con questa topologia. Per la compattezza si poteva anche considerare la famiglia di aperti $U_n := (-n, n) \cup \mathbb{Q}$ e mostrare che non è possibile, usandone un numero finito, coprire $\mathbb{R}$.

Per concludere osserviamo che, siccome $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}_1$, non riusciamo a trovare né un aperto che contiente 0 ma non contiene 1, né un aperto che contiene 1 ma non contiene 0. Questo vuol dire che $(\mathbb{R}, \tau_2)$ non è T_0 (e di conseguenza nemmeno T_1 e T_2).