Esercitazioni di Geometria II

Letizia Pernigotti - pernigotti@science.unitn.it

5 aprile 2012

Esercizio 1. [dagli esercizi online della prof.ssa Carrara] Sia $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ il piano euclideo numerico dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y). Definiamo la conica $\mathcal{C}$ di $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ come

$$\mathcal{C}: \quad 5x^2 + 5y^2 - 6xy + 16\sqrt{2}x + 38 = 0$$

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Si calcoli la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$, determinando un'isometria diretta di $\mathbb{E}^2$ diretta $S : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ tale che $S(\mathcal{C}) = \mathcal{D}$.
(2) Si calcolino gli eventuali assi di simmetria di $\mathcal{C}$.
(3) Si calcolino gli eventuali punti impropri.

※ **Esercizio 1.**

(1) Consideriamo le matrici associate alla conica $\mathcal{C}$ date da

$$A = \begin{pmatrix} 38 & 8\sqrt{2} & 0 \\ 8\sqrt{2} & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcolando i determinanti si vede che

$$\det A = -32 \neq 0, \quad \det A_0 = 16 > 0.$$

La conica $\mathcal{C}$ è dunque un'ellisse non degenere.

Essendo una conica a centro, possiamo calcolarne il centro attraverso le equazioni:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 8\sqrt{2} = 0 \\ -3x + 5y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

Il centro ha dunque coordinate

$$C = \left(-\frac{5}{2}\sqrt{2}, -\frac{3}{2}\sqrt{2}\right).$$

Per ridurre a forma canonica dobbiamo eseguire due passaggi: rotazione e traslazione.

ROTAZIONE

Gli autovalori ed autovettori della matrice A sono:

$$\lambda_1 = 8 \to v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_2 = 2 \to v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovettori servono per calcolare la matrice di cambiamento di base M. Per ottenerla devo normalizzare gli autovettori ed imporre che $\det M > 0$. Considero quindi

$$v_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad v_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Per avere $\det M > 0$ definisco M come

$$M = \left(\begin{array}{c|c} v_1' & v_2' \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

La matrice M mi dà il cambiamento di base dalla base $\mathcal{B} = (v_1', v_2')$ alla base canonica. La rotazione indotta da M è

$$R : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} x_1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - x_1) \end{cases}$$

Operiamo questa sostituzione nell'equazione di $\mathcal{C}$:

$$\frac{5}{2}(x_1 + y_1)^2 + \frac{5}{2}(y_1 - x_1)^2 - \frac{6}{2}(x_1 + y_1)(y_1 - x_1) +$$
$$+16(x_1 + y_1) + 38 = 8x_1^2 + 2y_1^2 + 16x_1 + 16y_1 + 38$$

Chiamiamo $\mathcal{C}_1$ la conica

$$\mathcal{C}_1 : \quad 8x_1^2 + 2y_1^2 + 16x_1 + 16y_1 + 38 = 0$$

Osserviamo che, per costruzione, se $R(w) \in \mathcal{C}$ allora $w \in \mathcal{C}_1$. Ciò significa che

$$\mathcal{C}_1 = R^{-1}(\mathcal{C}).$$

TRASLAZIONE

Posso usare due modi

MODO 1: completamento del quadrato

$$\mathbf{8x_1^2} + 2y_1^2 + \mathbf{16x_1} + 16y_1 + 38 = 8(x_1+1)^2 - 8 + \mathbf{2y_1^2} + \mathbf{16y_1} + 38 =$$
$$= 8(x_1+1)^2 + 2(y_1+4)^2 - 32 + 30$$

Sia $\mathcal{C}_2$ la conica

$$\mathcal{C}_2 : \quad 8x_2^2 + 2y_2^2 - 2 = 0$$

la quale corrisponde a

$$\mathcal{C}_2 : \quad 4x_2^2 + y_2^2 = 1$$

Si vede dall'ultima espressione che $\mathcal{C}_2 = \mathcal{D}$ è esattamente la forma canonica cercata. Definiamo la traslazione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ come

$$T : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ y_1 + 4 \end{pmatrix}$$

In questo caso si ha

$$\mathcal{D} = T(\mathcal{C}_1).$$

perché, per costruzione, se $w \in \mathcal{C}_1$ allora $T(w) \in \mathcal{D}$.

$\boxed{\textbf{MODO 2: utilizzo del centro}}$

Sappiamo che il centro ha coordinate

$$C_{\mathcal{E}} : \begin{cases} x = -\frac{5}{2}\sqrt{2} \\ y = -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

Le nuove coordinate del centro saranno date da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

e dunque da

$$C_{\mathcal{B}} : \begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) = -1 \\ y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) = -4 \end{cases} .$$

Di conseguenza, le coordinate (x_2, y_2) rispetto alle quali il centro si trova nell'origine sono date da

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 1 \\ y_2 = y_1 + 4 \end{cases}$$

e ritroviamo quindi le trasformazione del caso precedente.

Mettendo insieme i pezzi, si vede come

$$\mathcal{D} = T \circ R^{-1}(\mathcal{C}) = (T \circ R^{-1})(\mathcal{C})$$

Osserviamo che $R^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è data da

$$R^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = M^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

In conclusione, la trasformazione cercata $S = (T \circ R^{-1})$ è data da

$$S : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + 4 \end{pmatrix} .$$

(2) Poiché gli assi di simmetria di $\mathcal{D}$ sono dati dalle rette $x_2 = 0$ e $y_2 = 0$, gli assi di simmetria di $\mathcal{C}$ sono dati dalle equazioni

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + 1 = 0, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y + 4 = 0$$

le quali, semplificando leggermente, diventano

$$x - y + \sqrt{2} = 0, \qquad x + y + 4\sqrt{2} = 0.$$

(3) Consideriamo la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$, data da

$$\overline{\mathcal{C}} : \quad 5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 + 16\sqrt{2}x_1x_0 + 38x_0^2 = 0.$$

I punti all'infinito in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 + 16\sqrt{2}x_1x_0 + 38x_0^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

e cioè dalle soluzioni dell'equazione

$$5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 = 0$$

Essendo $\mathcal{C}$ un ellisse non dobbiamo trovare soluzioni. Ricordando le sostituzioni di prima e ponendo

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y), \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$$

si ottiene

$$5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2 = 8w_1^2 + 2w_2$$

il quale non può mai essere uguale a zero. La conica $\mathcal{C}$ non ha dunque punti all'infinito.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ lo spazio affine numerico dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y, z). Definiamo la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ come

$$\mathcal{Q}: \quad 3x^2 - 4y^2 + 3z^2 + 10xz + 8y - 12 = 0$$

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Si calcoli la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{Q}$,

(2) Si determini un'affinità $S : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$ tale che $S(\mathcal{Q}) = \mathcal{D}$.

※ Esercizio 2.

(1) Consideriamo le matrici associate alla conica $\mathcal{Q}$ date da

$$A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcolando i determinanti si vede che

$$\det A = -512 \neq 0, \quad \det A_0 = 64.$$

Il fatto che $\det A \neq 0$ ci dice che la quadrica è non degenere. In particolare, poiché $\det A_0 \neq 0$, la quadrica sarà un iperboloide oppure un ellissoide, con forma canonica del tipo

$$x^2 \pm y^2 \pm z^2 \pm 1 = 0.$$

Per determinare esattamente la forma canonica guardiamo gli autovalori di A_0, i quali sono

$$\lambda_1 = 8, \quad \lambda_2 = -4, \quad \lambda_3 = -2.$$

Poiché $\det A < 0$, la forma canonica $\mathcal{D}$ sarà data da:

$$\mathcal{D}: \quad x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0,$$

la quale corrisponde a un iperboloide ellittico (a due falde).

(2) Per determinare la trasformazione S si può procedere in due modi: utilizzando direttamente il completamento dei quadrati (siamo nel caso affine, questa sarebbe la strada più naturale) oppure calcolando autovalori e autovettori di A_0 (come nell'Esercizio 1).

MODO 1: completamento dei quadrati

Consideriamo l'equazione di $\mathcal{Q}$:

$$\mathbf{3x^2} - 4y^2 + 3z^2 + \mathbf{10xz} + 8y - 12 =$$

$$= \left(\sqrt{3}x + \frac{5}{\sqrt{3}}z\right)^2 - \frac{25}{3}z^2 + 3z^2 - \mathbf{4y^2} + \mathbf{8y} - 12 =$$

$$= \left(\sqrt{3}x + \frac{5}{\sqrt{3}}z\right)^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{3}}z\right)^2 - (2y-2)^2 - 8 =$$

$$= 8\left[\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}x + \frac{5}{\sqrt{3}}z\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}z\right)^2 - \frac{1}{8}(2y-2)^2 - 1\right]$$

$$= 8\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x + \frac{5}{2\sqrt{6}}z\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}z\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 1\right]$$

Definiamo la trasformazione $S : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$ come

$$S : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4}x + \frac{5\sqrt{6}}{12}z \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{6}}{3}z \end{pmatrix}$$

Osserviamo, che, per costruzione, si ha

$$3x^2 - 4y^2 + 3z^2 + 10xz + 8y - 12 = 8\Big(S(x)^2 - S(y)^2 - S(z)^2 - 1\Big)$$

e dunque

$$w \in \mathcal{Q} \Rightarrow S(w) \in \mathcal{D}.$$

Ciò significa che $S(\mathcal{Q}) = \mathcal{D}$ e che $S : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$ è la trasformazione cercata.

MODO 1: autovalori e autovettori

Gli autovalori ed autovettori (già normalizzati) di $\mathbb{A}_0$ sono

$$\lambda_1 = 8 \qquad \to \qquad v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 == -4 \qquad \to \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 == -2 \qquad \to \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definisco M come

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Si ha $\det M = 1 > 0$ e dunque $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ è la base cercata.

La rotazione indotta da M è

$$R : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x_1 - z_1 \\ \sqrt{2}y_1 \\ x_1 + z_1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$R : \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - z_1) \\ y = y_1 \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + z_1) \end{cases}$$

L'equazione di $R^{-1}(\mathcal{Q})$ è data dunque da:

$$\frac{3}{2}(x_1 - z_1)^2 - 4y_1^2 + \frac{3}{2}(x_1 + z_1)^2 + 5(x_1^2 - z_1^2) + 8y_1 - 12$$
$$= 8x_1^2 - 4y_1^2 - 2z_1^2 + 8y_1 - 12$$

che, completando i quadrati, diventa:

$$R^{-1}(\mathcal{Q}) : \quad (2\sqrt{2}x_1)^2 - (2y_1 - 2)^2 - (\sqrt{2}z_1)^2 - 8 = 0$$

ovvero

$$R^{-1}(\mathcal{Q}) : \quad x_1^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}z_1\right)^2 - 1 = 0$$

Definendo $T : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$ come

$$T : \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} z_1 \end{pmatrix}$$

si ha

$$R^{-1}(\mathcal{Q}) : \quad T(x_1)^2 - T(y_1)^2 - T(z_1)^2 - 1 = 0$$

In altre parole,

$$w \in R^{-1}(\mathcal{Q}) \quad \Rightarrow \quad T(w) \in \mathcal{D}$$

cioè

$$T(R^{-1}(\mathcal{Q})) = \mathcal{D}.$$

La trasformazione cercata è dunque $S = T \circ R^{-1}$. Calcoliamo R^{-1}. Poiché

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

si ha

$$R^{-1} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{E}} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2}x + \sqrt{2}z \\ 2y \\ -\sqrt{2}x + \sqrt{2}z \end{pmatrix}$$

In conclusione, la trasformazione cercata è:

$$S : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} z \\ \frac{1}{\sqrt{2}} y - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} x + \frac{\sqrt{2}}{4} z \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. Sia $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ il piano affine dotato del riferimento cartesiano standard di coordinate (x, y). Definiamo la conica $\mathcal{C}(k)$ di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ come

$$\mathcal{C}(k): \quad x^2 + k^2y^2 + (4-2k)xy + 6x + k = 0$$

Si risponda ai seguenti quesiti

(1) Determinare per quali valori del parametro reale $k \in \mathbb{R}$ la conica è non degenere.
(2) Determinare la forma canonica $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}(k)$ al variare del parametro k.

※ **Esercizio 3.**

(1) Consideriamo le matrici associate alla conica $\mathcal{C}(k)$ date da

$$A(k) = \begin{pmatrix} k & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2-k \\ 0 & 2-k & k^2 \end{pmatrix}, \qquad A_0(k) = \begin{pmatrix} 1 & 2-k \\ 2-k & k^2 \end{pmatrix}$$

Calcolando i determinanti si vede che

$$\det A(k) = -k(5k+4), \quad \det A_0(k) = 4(k-1).$$

Di conseguenza, la conica $\mathcal{C}$ è non degenere se e solo se $k \neq 0, -\frac{4}{5}$.

(2) Studiamo il segno del determinante di $A(k)$ e di $A_0(k)$:

$$\det A(k) > 0 \iff k \in \left(-\frac{4}{5}, 0\right)$$
$$\det A_0(k) > 0 \iff k \in (1, \infty).$$

Cerco la matrice completa corrispondente alla forma canonica. Guardando il segno degli autovalori trovo:

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ per $k < -\frac{4}{5}$,
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ per $-\frac{4}{5} < k < 0$,
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ per $0 < k < 1$,
- $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ per $k > 1$.

Per $k = 1$ si ha $\det A_0(1) = 0$ e $\det A(1) = -9 \neq 0$ e dunque la conica $\mathcal{C}$ rappresenta una parabola.

Di conseguenza la forma canonica di $\mathcal{C}$ è data, nel caso non degenere, da:

- (Iperbole) $x^2 - y^2 = -1$, $x^2 - y^2 = 1$ (sono equivalenti, la forma canonica è la seconda), per $k < -\frac{4}{5} \vee -\frac{4}{5} < k < 0 \vee 0 < k < 1$,
- (Parabola) $y^2 - x = 0$ per $k = 1$,
- (Ellisse) $x^2 + y^2 = 1$ per $k > 1$.

Studiamo ora i casi degeneri. Per $k = 0, -\frac{4}{5}$ si ha una conica degenere. Per capire quale, si osservi che il rango di $A_0(k)$ vale 2 per ambedue i valori del parametro e dunque la forma canonica è del tipo $x^2 \pm y^2 = 0$. Dal momento che $\det A_0(k) < 0$ per ambedue i valori del parametro, per il ragionamento fatto prima la forma canonica deve essere $x^2 - y^2 = 0$.

Alternativamente si poteva sostituire nell'equazione di $\mathcal{C}$ i due valori:

$$\mathcal{C}(0): \quad x^2 + 4xy + 6x = 0$$

la quale, dopo un po' di passaggi, diventa

$$x^2 + 4xy + 6x = (x + 2y)^2 - 4y^2 + 6x = x_1^2 - 4y_1^2 + 6x_1 - 12y_1 =$$
$$= (x_1 + 3)^2 - (y_1 + 3)^2 - 9 + 9 = x_2^2 - y_2^2$$

con $x_2 = x+2y+3$ e $y_2 = y+3$. La conica $\mathcal{C}(0)$ è dunque un'iperbole degenere con forma canonica

$$\mathcal{D}(0): \quad x^2 - y^2 = 0.$$

Analogamente, la forma canonica nel caso $k = -\frac{4}{5}$ corrisponde sempre all'iperbole degenere:

$$\mathcal{D}\left(-\frac{4}{5}\right): \quad x^2 - y^2 = 0.$$

Per curiosità, determiniamo le due rette che formano la conica $\mathcal{C}(0)$. Si ha

$$(x + 2y + 3)^2 - (y + 3)^2 = (x + 2y + 3 + y + 3)(x + 2y + 3 - y - 3) =$$
$$= (x + 3y + 6)(x + y)$$

La conica $\mathcal{C}(0)$ è dunque formata dalle rette

$$x + 3y + 6 = 0, \qquad x + y = 0.$$