Esercizi per Geometria II
Topologia generale

Filippo F. Favale

27 maggio 2014

Esercizio 1
Sia p un numero primo. Si consideri la funzione $|\cdot|_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ detta {norma p-adica} che manda 0 in 0 e $x \neq 0$ in $|x|_p := p^{-n}$ se $x = ap^n$ con p che non divide a, cioè se p^n è lamassima potenza di p che divide x. Si dimostri che:

1) $|x|_p \geq 0$ e vale $|x|_p = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

2) $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y_p|)$.

Da queste due proprietà di $|\cdot|_p$ dedurre che $d_p(x,y) := |y-x|_p$ è una distanza e che inoltre soddisfa una versione più fine della disuguaglianza triangolare: $d_p(x,z) \leq \max(d_p(x,y), d_p(y,z))$. Una distanza che soddisfa questa proprietà si dice **ultrametrica**. Sia $X := (\mathbb{Z}, d_p)$.

3) Se x_n è la successione $14^n + 12$ per quali $y \in \mathbb{Z}$ si ha $d_7(x_n, y)$ tende a 0?

4) Si dimostri che $B_{p^{-n}}(k) = k + p^{n+1}\mathbb{Z}$;

5) Si dimostri che X è totalmente limitato e che X non è connesso;

Esercizio 2
Si consideri la relazione di equivalenza $\sim$ su $\mathbb{R}^n$ definita da

$$x \sim y \Longleftrightarrow |x| = |y|.$$

Assumendo che $\mathbb{R}^n$ sia munito della topologia euclidea e che sul quoziente $X := \mathbb{R}^n/\sim$ sia messa la topologia quoziente τ si dica se:

1) X è connesso;

2) X è T_2;

3) X è compatto;

4) $g : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ che associa a ogni punto $P \in X$ la norma di uno qualsiasi dei suoi rappresentanti è una mappa ben definita ed è un omeomorfismo.

Soluzione dell'esercizio 1
La prima proprietà da dimostrare segue direttamente dalla definizione di $|\cdot|_p$. Dimostriamo che vale la disuguaglianza del secondo punto. Siano $x, y \in \mathbb{Z}$. Esisteranno a, b, n, m tali che $x = ap^n$ $y = bp^m$ con p che non divide a e b. A meno di scambiare x e y possiamo assumere anche $n \leq m$ (per cui si ha $\max(p^{-n}, p^{-m}) = p^{-n}$). Avremo

$$x + y = ap^n + bp^m = p^n(a + bp^{m-n}) = p^n(cp^l)$$

dove abbiamo scritto il secondo fattore come prodotto di un intero che non è divisibile per p e per la massima potenza di p che lo divide. Da questa scrittura e dal fatto che $p^{-n} \geq p^{-m}$ deduciamo

$$|x+y|_p = p^{-(n+l)} = p^{-n}p^{-l} = \max(p^{-n}, p^{-m})p^{-l} \leq$$
$$\leq \max(p^{-n}, p^{-m}) = \max(|x|_p, |y|_p)$$

dove, nel penultimo passaggio si è usato $p^{-l} \leq 1$.

Dimostriamo che d_p è una distanza su $\mathbb{Z}$. La proprietà di annullamento è ovvia. Per la simmetria basta osservare che se p^n è la più grande potenza di p che divide $y-x$ allora lo stesso vale per $x-y$ e quindi

$$d_p(x,y) = |y-x|_p = p^{-n} = |x-y|_p = d_p(y,x).$$

Dimostriamo la forma più fine della disuguaglianza triangolare:

$$d_p(x,z) = |z-x|_p = |z-y+y-x|_p = |(z-y)+(y-x)|_p \leq$$
$$\leq \max(|z-y|_p, |y-x|_p) = \max(d_p(x,y), d_p(y,z)).$$

Per concludere e dimostrare che d_p è una distanza basta osservare che se u e v sono non negativi allora $\max(u,v) \leq u+v$ (infatti il massimo coincide con u o v che è sicuramente minore di $u+v$).

Dire che $d_7(x_n, y)$ tente a 0 per n che tende a infinito è equivalente a dire che y è limite della successione x_n. Siccome siamo in uno spazio metrico c'è unicità del limite quindi, se y esiste, questo sarà unico. Mostriamo che 12 è limite della successione:

$$d_7(x_n, 12) = |x_n - 12|_7 = |14^n|_7 = |7^n 2^n|_7 = 7^{-n} \to 0.$$

La stessa cosa è vera considerando d_2 invece di d_7.

Mostriamo che $B_{p^{-n}}(k) = k + p^{n+1}\mathbb{Z}$. Un punto x appartiene alla palla $B_{p^{-n}}(k)$ se e solo se $d_p(x,k) = |x-k|_p < p^{-n}$. Scriviamo $x-k$ isolando la massima potenza di p che lo divide : $x-k = ap^l$. Si ha quindi

$$x \in B_{p^{-n}}(k) \iff p^{-l} < p^{-n} \iff l > n$$

cioè se e solo se $l = n+1+m$ con $m \geq 0$. Di conseguenza abbiamo

$$x \in B_{p^{-n}}(k) \iff x-k = ap^{n+1+m} \iff x = k + p^{n+1}(ap^m).$$

Questo dimostra che $x \in k + p^{n+1}\mathbb{Z}$. Supponiamo, per mostrare l'altra inclusione, che x sia un elemento di $k+p^{n+1}\mathbb{Z}$. Si ha che $|x-k|_p = |ap^{n+1}|_p$ con $a \in \mathbb{Z}$. Se scriviamo a come bp^m con p che non divide b avremo quindi

$$d_p(x,k) = |bp^{n+l+1}|_p = p^{-n-1}p^{-l} \leq p^{-n-1} < p^{-n} \Longrightarrow x \in B_{p^{-n}}(k).$$

Dimostriamo che X è totalmente limitato utilizzando proprio questa caratterizzazione delle bolle. E' sufficiente mostrare che per ogni $r = p^{-n}$ esiste un numero finito di centri $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_{N_n}\}$ tali che X è unione di palle aperte di raggio r e centro nei punti di $\mathcal{C}$. Osserviamo prima di tutto che, per l'unicità di quoziente e resto in $\mathbb{Z}$, per ogni $x \in \mathbb{Z}$ avremo $x = ap^{n+1} + k$ per un unico $a \in \mathbb{Z}$ e un unico $k \in \{0, \dots, p^{n+1}-1\}$. Ma questo vuol dire che $x \in B_{p^{-n}}(k)$. Abbiamo mostrato che

$$X = \bigcup_{k=0}^{p^{n+1}-1} B_{p^{-n}}(k),$$

cioè che possiamo prendere come centri i numero compresi tra 0 e $p^{n+1}-1$, cioè i possibili resti modulo p^{n+1}.

Dall'ultima formula notiamo anche una cosa aggiuntiva: ciascuna delle palle è disgiunta dalle altre (perchè in ogni palla abbiamo i punti con resto diverso modulo p^{n+1}). Questo vuol dire che posso scrivere X come segue:

$$X = \bigcup_{k=0}^{p^{n+1}-1} B_{p^{-n}}(k) = \big(B_{p^{-n}}(0)\big) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{p^{n+1}-1} B_{p^{-n}}(k) \right).$$

I due insiemi messi in evidenza sono disgiunti per quanto osservato prima e sono aperti perchè unione di palle aperte. Inoltre sono non vuoti quindi ci danno una decomposizione di X e ci dimostrano che non è connesso.

Soluzione dell'esercizio 2
Notiamo che, dimostrando l'ultimo punto abbiamo già la soluzione anche agli altri punti. Trattiamoli invece separatamente come se non ci fossimo accorti dell'omeomorfismo. Consideriamo l'applicazione $f(x) := |x|$ che sappiamo essere continua in quanto la topologia su $\mathbb{R}^n$ è quella euclidea. Questo ci dice che gli insiemi $f^{-1}((a,b))$ sono aperti in $\mathbb{R}^n$. Inoltre se $x \in f^{-1}((a,b))$ allora ogni punto con la stessa norma di x apparterrà a $f^{-1}((a,b))$. Questo ci dice che gli insiemi del tipo $f^{-1}((a,b))$ sono aperti saturi (rispetto a $\sim$) di $\mathbb{R}^n$. Indichiamo con $\pi : \mathbb{R}^n \to X$ la proiezione sul quoziente.

Siano $P, Q \in X$ con $P \neq Q$. Mostriamo che esistono due intorni rispettivamente di P e Q disgiunti. Supponiamo che $P = [x]$ e $Q = [y]$ cioè che x sia un rappresentante per la classe di equivalenza P e che y lo sia per Q. Per comodità chiamiamo $r := |x|$ e $s := |y|$. Siccome $P \neq Q$ abbiamo anche che $r \neq s$ (posso assumere $s < r$) e questo ci permette di affermare che esiste un $\epsilon > 0$ tale che

$$(s-\epsilon, s+\epsilon) \cap (r-\epsilon, r+\epsilon) = \emptyset.$$

Siano $\tilde{U} := f^{-1}((r-\epsilon, r+\epsilon))$ e $\tilde{V} := f^{-1}((s-\epsilon, s+\epsilon))$. Per quanto detto prima essi sono aperti saturi di $\mathbb{R}^N$. Se consideriamo $U := \pi(\tilde{U})$ e $V := \pi(\tilde{V})$ abbiamo che questi sono aperti di X, che sono disgiunti e che $P \in U$ e $Q \in V$. Questo basta per concludere che X è T_2.

Mostriamo che (X, τ) non è compatto. Per farlo consideriamo $\tilde{U}_n := f^{-1}([0, n))$, che è un aperto saturo di $\mathbb{R}^n$, e gli aperti $U_n := \pi(\tilde{U}_n)$. Mostriamo che essi formano un ricoprimento aperto di X. Per farlo basta osservare che per ogni $P = [x] \in X$ se considero il primo intero positivo m maggiore strettamente di $|x|$ allora $x \in \tilde{U}_m$ e quindi $P \in U_m$. Abbiamo anche mostrato che $P \notin U_{m-1}$. Questo ci fa capire che non può esistere un sottorioprimento finito: se esistesse l'unione di questi aperti coinciderebbe con l'aperto $U_{\max}$ dove max è il massimo degli interi di pedice nella collezione finita considerata. Ma in questo modo tutti i punti che sono rappresentati da vettori di norma maggiore strettamente di max non apparterrebbero al ricoprimento. Da cui un assurdo che ci permette di concludere che X non è compatto.

Siccome π è continua e suriettiva e $\mathbb{R}^n$ è connesso abbiamo che $X = \pi(\mathbb{R}^n)$ è connesso.

Concludiamo dimostrando che g è un omeomorfismo. Abbiamo già visto che f è continua e questo, per proprietà universale del quoziente, implica che anche g è continua (abbiamo infatti $g \circ \pi = f$). g è suriettiva perchè è la seconda mappa di una composizione che risulta essere suriettiva (in generale se $f \circ g$ è suriettiva allora g è suriettiva). Se $P = [x], Q = [y] \in X$ sono tali che $g(P) = g(Q)$ allora $|x| = |y|$ e quindi $x \sim y$ mostrando che $P = Q$: g è quindi anche iniettiva. Mostrare che g è aperta è più delicato. Osserviamo prima di tutto che se U è un aperto di X allora $g(U) = f(\pi^{-1}(U))$. Quindi per mostrare che g è aperta ci basta vedere che l'immagine di ogni aperto saturo di $\mathbb{R}^n$ tramite f è aperta. Sia quindi $\tilde{U}$ un aperto saturo e consideriamo la sua immagine V tramite f. Sia $r \in V \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$. Se $P \in f^{-1}(r) \subset \tilde{U} = f^{-1}(V)$ allora esisterà una palla di raggio ϵ e centro P contenuta in $\tilde{U}$. Siccome l'aperto è saturo questo dimostra anche che la corona circolare $f^{-1}((r - \epsilon, r + \epsilon)) =: C$ è un aperto contenuto in $\tilde{U}$ che contiene P. Ma questo vuol dire che $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subset V$ e quindi che ogni punto di V è interno a $V : V = V^o$ e V è aperto. Siccome g è continua, biettiva con inversa continua abbiamo che g è un omeomorfismo.