Esercizi per Geometria II
Topologia generale

Filippo F. Favale

29 maggio 2014

Esercizio 1
Si indichi con $Q := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm 1 \text{ o } y = \pm 1\}$ e sia $X = [-1, 1]^2$ munito della topologia τ generata dalla base

$$\mathcal{B} := \{B_r(P) \cup Q \mid B_r(P) \subset (X \setminus Q)\} \cup \{Q\}.$$

Indichiamo con $B_r(P)$ e $D_r(P)$ rispettivamente la palla aperta e il disco chiuso di raggio r rispetto alla distanza euclidea[1]. Si indichi con $X^* := X \setminus Q$.

1) Si ricavino interno, bordo e chiusura di Q, X^* e $B_{1/2}((0, 0))$.

2) Si consideri la successione $x_n := ((-1)^n, (-1)^n)$ con $n \geq 0$. Dire quali sono gli eventuali limiti della successione.

3) Si dica se X è T_2, T_1 o T_0.

4) Si dica se $Q \setminus \{x = 0\}$ è connesso per archi.

Esercizio 2
Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(x) = \chi_{[-1,1]^c}(x)x$ dove $\chi_A(x)$ è la funzione che vale 1 se e solo se $x \in A$ e 0 altrimenti. Sia τ_e la topologia euclidea su $\mathbb{R}$. Sia τ la topologia più fine su $\mathbb{R}$ che rende continua

$$f : (\mathbb{R}, \tau_e) \to (\mathbb{R}, \tau_i)$$

e sia Y il sottospazio $([-1, 1]^C) \cup \{0\}$.

0) Sia $A \in \tau$. Dimostrare che sono possibili due casi:

- $0 \in A$ e $A = U \cup B$ con U aperto in τ_e che contiene un insieme del tipo $(-1 - \epsilon, -1) \cup (1, 1 + \delta)$ e $0 \in B \subset [-1, 1]$;
- $0 \notin A$ e $A = U \cup B$ con U aperto contenuto in $[-1, 1]^C$ e $0 \notin B \subset [-1, 1]$.

0) Dimostrare che $(\mathbb{R}, \tau)$ non è connesso per archi. Y, con la topologia indotta da $(\mathbb{R}, \tau)$, è connesso per archi? Se sì, esplicitare un arco continuo che collega -2 a 2.

0) Dire se $(\mathbb{R}, \tau)$ è T_0, T_1 o T_2.

Esercizio 3
Si consideri lo spazio topologico $X := [0, 1] \cup \{7\}$ munito della topologia τ che è la meno fine che contiene tutti gli aperti della topologia euclidea di $[0, 1]$ e gli insiemi del tipo $\{7\} \cup U$ con U intorno aperto di 1 (aperto nella topologia euclidea) privato di 1. Si dimostri che X è compatto, connesso per archi e T_1 ma non T_2.

[1] Questa scelta è solo per comodità di notazione: come vedremo questi insiemi non sono necessariamente aperti o chiusi per τ!

Soluzione dell'esercizio 1
Q è il bordo del quadrato di lato 2, centro nell'origine e avente i lati paralleli agli assi. Osserviamo preliminarmente che ogni elemento di $\mathcal{B}$ contiene Q quindi ogni aperto non vuoto deve contenere Q. Viceversa, ogni chiuso non coincidente con tutto lo spazio, essendo il complementare di un aperto non vuoto, è necessariamente disgiunto da Q.

Q è un elemento di τ quindi $Q^o = Q$. Per ogni punto P che non appartiene a Q ($P \in X^*$), per quanto detto all'inizio, avremo che ogni intorno aperto di P interseca Q (in tutto Q) e il suo complementare almeno in P: si ha quindi $X^* \subset \partial(Q)$. Siccome i punti interni non possono essere di frontiera abbiamo quindi

$$Q^o = Q \quad \partial(Q) = X^* \quad \overline{Q} = X.$$

Siccome $X^* = Q^C$ si ha $\overline{X*} = X*$. Nessun aperto diverso dal vuoto può essere contenuto in X^* perchè dovrebbe contenere Q quindi $(X*)^o = \emptyset$. Questo dimostra che

$$(X^*)^o = \emptyset \quad \partial(X^*) = X^* \quad \overline{X^*} = X^*.$$

In modo analogo si vede che $B := B_{1/2}((0,0))$ ha interno vuoto. Siccome ogni punto P di $D_{1/2}((0,0))$ è tale che ogni intorno aperto di P interseca tanto B quanto $Q \subset B^C$, avremo che $D_{1/2}((0,0)) \subset \partial(B)$. Questa è un'uguaglianza infatti per ogni punto fuori da $D_{1/2}((0,0))$ riusciamo sempre a trovare una piccola palla $B_\epsilon(P)$ che non interseca B. Questa non è aperta ma $B_\epsilon(P) \cup Q$ lo è ed è disgiunta da B. In definitiva

$$B^o = \emptyset \quad \partial(B) = D_{1/2}((0,0)) \quad \overline{B} = D_{1/2}((0,0)).$$

Notiamo che la successione, in apparenza fortemente non convergente, è contenuta in Q che, ricordiamo essere contenuto in ogni aperto non vuoto di (X, τ). Questo vuol dire che per ogni $P \in X$ e per ogni $U \in \mathcal{U}_P$ avremo che $x_n \in U$ per ogni n (sarebbe bastato per $n >> 0$): quindi P è limite di x_n per ogni $P \in X$.

Dal fatto che non c'è unicità del limite deduciamo che lo spazio non è sicuramente di Haussdorff. In realtà, per quanto abbiamo osservato all'inizio, presi due punti distinti P_1 e P_2 in Q non siamo in grado di trovare un intorno aperto di uno che non contiene l'altro: questo dimostra che (X, τ) non è nemmeno T_0 (e quindi nemmeno T_1).

Sempre per il fatto che ogni aperto non vuoto contiene Q possiamo affermare che *qualsiasi* arco $\gamma : I \to X$ che ha immagine contenuta in Q è continuo. Si ha infatti, per ogni $U \in \tau \setminus \{\emptyset\}$ (ricordando che $Q \subset U$) che $\gamma^{-1}(U) = \gamma^{-1}(Q) = I$. Ci si accorge subito quindi che presi due punti P_1, P_2 in Y, possiamo prendere l'arco γ che vale P_1 per ogni $t < 1$ e P_2 per $t = 1$ e avremo un arco contenuto in Y continuo che collega P_1 e P_2: Y è connesso per archi.

Soluzione dell'esercizio 2
La topologia più debole che rende f continua è la topologia indiscreta mentre quella più fine è

$$\tau := \{A \mid f^{-1}(A) \in \tau_e\}.$$

Per dimostrare come sono fatti gli aperti in τ procediamo per casi. Se $A \in \tau$ è tale che $0 \notin A$ allora

$$U := f^{-1}(A) = A \setminus I$$

è un aperto di τ_e contenuto in I^C. Per "recuperare" come è fatto A notiamo che qualsiasi siano i punti di A che appartengono a $I \setminus \{0\}$ la controimmagine è la stessa. Di conseguenza A è unione di un aperto della topologia euclidea contenuto in I^C e di un arbitrario sottoinsieme di I che non contiene 0. Se invece 0 appartiene ad A allora $\pm 1 \in f^{-1}(A) := U = (A \setminus I) \cup I = A \cup I$ e questo insieme dovrà essere un aperto della topologia euclidea. Per questo, U dovrà contenere un intorno aperto di -1 e un intorno aperto di 1 (siccome $\pm 1 \in f^{-1}(A)$). Poichè i punti di I (a parte lo 0) non hanno controimmagine e I è tutto contenuto in $f^{-1}(A)$ è sufficiente chiedere che ci siano due intervalli del tipo $(-1-\epsilon, -1)$ e $(1, 1+\delta)$ contenuti in $A \setminus I$. Avremo quindi che A è unione di un arbitrario sottoinsieme di I che contiene $\{0\}$ e di un aperto rispetto alla topologia euclidea che contiene i due intervalli appena descritti.

Mostriamo che $(\mathbb{R}, \tau)$ non è connesso. Per farlo basta notare che l'insieme Y è tale che $f^{-1}(Y) = \mathbb{R}$ e quindi è un aperto di τ. Tuttavia anche il suo complementare è un aperto di τ infatti $f^{-1}(Y^C) = \mathbb{R}^C = \emptyset \in \tau_e$. Questo dimostra che Y è aperto e chiuso ma diverso da X e dal vuoto. Non essendo $(\mathbb{R}, \tau)$ connesso non c'è speranza che sia connesso per archi. La cosa è completamente diversa per il sottospazio Y. Esso è infatti connesso per archi in quanto $f(\mathbb{R}) = Y$ e f è continua proprio con la topologia indotta da τ. Per esplicitare un arco tra -2 e 2 possiamo considerare $\gamma : (I, \tau_e) \to (\mathbb{R}, \tau_e)$ tale che $\gamma(t) := -2 + 4t$ (questo è un arco che collega -2, la controimmagine di $-2 \in (\mathbb{R}, \tau)$ e 2, la controimmagine di $2 \in (\mathbb{R}, \tau)$. Questo è un arco sicuramente continuo a valori in $(\mathbb{R}, \tau_e)$. Se definiamo $\sigma := f \circ \gamma$ questo sarà un arco continuo perchè composizione di applicazioni continue e ha gli estremi voluti.

Per dimostrare che $(\mathbb{R}, \tau)$ è T_2 cerchiamo di capire come sono fatti alcuni intorni dei punti di $\mathbb{R}$. Siano P, Q e $O \in \mathbb{R}$ tali che $|P| > 1$, $0 < |Q| \leq 1$ e $O = 0$. Siano $\epsilon, \delta > 0$. Un intorno aperto di P è un insieme del tipo $U_P := (P - \epsilon, P + \epsilon)$ con ϵ sufficientemente piccolo affinchè sia contenuto in I^C. In questo caso si ha infatti $f^{-1}(U_P) = U_P$ che è aperto nella topologia euclidea. Un intorno aperto di Q è $U_Q := \{Q\}$ stesso (infatti $f^{-1}(\{Q\}) = \emptyset \in \tau_e$) mentre un intorno aperto di O è $U_O := (-1-\delta, -1) \cup (1, 1+\delta) \cup \{0\}$ (per la precisione, ogni intorno aperto di O contiene un intorno di questo tipo). Da questa descrizione degli intorni aperti è facile convincersi che, indipendentemente dalla coppia di punti che considero, riesco a trovare un intorno aperto U del primo e V del secondo tali che $U \cap V = \emptyset$: $(\mathbb{R}, \tau)$ è T_2.

Soluzione dell'esercizio 3
Mostriamo che X è compatto. Se considero un ricoprimento aperto $\{U_n\}$ di X esisteranno un certo m_1 e m_2 per cui $7 \in U_{m_1}$ e $1 \in U_{m_2}$ (eventualmente coincidenti). Siccome ogni aperto che contiene 7 contiene un intervallo del tipo $(1-\delta, 1)$ e lo stesso è vero anche per gli intorni di 1 avremo che $(1-\delta, 1) \cup \{1, 7\} \subset (U_{m_1} \cup U_{m_2})$. Con i rimanenti aperti dovremo coprire al più l'insieme $[0, 1-\delta]$ che è compatto (perchè su $[0, 1]$ abbiamo la topologia euclidea). Questo dimostra che usando un numero finito di aperti del ricoprimento più i due selezionati copriamo tutto X: X è compatto. Inoltre, per quanto appena notato, ogni intorno di 1 interseca non banalmente ogni intorno di 7: questo dimostra che X non è T_2.

Mostriamo che X è connesso per archi. E' facile convincersi che due punti in $[0, 1]$ sono connessi da un arco poichè se ci restringiamo a $[0, 1]$ otteniamo la topologia euclidea. Basta mostrare quindi che 0 e 7 sono connessi da un arco (continuo). Sia $f : [0, 1] \to X$ tale che $f(t) = t$ per $t < 1$ e $f(1) = 7$. Mostriamo che f è continua. Sia V un qualsiasi aperto in X e si consideri l'insieme $U := f^{-1}(V)$. Dobbiamo mostrare che ogni suo punto è interno. Se $P \in U$ con $P \neq 1$ siccome $f|_{[0,1)}$ è l'identità (e sull'insieme le due topologie coincidono) avremo che esiste un aperto di P interamente contenuto in U, cioè $P \in U^o$. Supponiamo che $P = 1 \in V$. Questo può avvenire se e solo se $f(1) = 7 \in V$. Siccome V è un aperto che contiene 7 avremo che esiste $\delta > 0$ tale che $(1-\delta, 1) \cup \{7\} \subset V$. Si ha quindi

$$f^{-1}((1-\delta,1) \cup \{7\}) = ((1-\delta,1) \cup 1) \subset U,$$

cioè $(1-\delta, 1] \subset U$. Siccome questo è un aperto nella topologia di $[0,1]$, abbiamo che anche 1 è un punto interno a U (se ci appartiene). Questo dimostra che f è un arco continuo tra 0 e 7 e, per quanto detto prima, che X è connesso per archi.

Per definizione di τ gli insiemi $(0,1] \cup 7$, $[0,a) \cup (a,1] \cup \{7\}$ $(a \in (0,1))$, $[0,1]$ e $[0,1) \cup \{7\}$ sono aperti. Questo dimostra che i rispettivi complementari $\{0\}, \{a\}, \{1\}$ e $\{7\}$ sono chiusi. Di conseguenza ogni punto di X è chiuso e si ha quindi che X è T_1.