Esercitazioni di Geometria A: spazi proiettivi

30-31 marzo 2016

Esercizio 1
Esercizio 2 dell'appello (del corso di Geometria II) di luglio 2015.

Soluzione dell'esercizio 1
Si vedano le soluzioni in rete sulla pagina web del corso.

Esercizio 2
Si consideri lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ con coordinate proiettive $(x_0 : \cdots : x_3)$. Si considerino il sottospazio vettoriale V_1 generato dai vettori $v_1 = (1, 0, 3, 2)$ e $v_2 = (3, 0, -1, 0)$ e i sottospazi proiettivi $S_1 = \mathbb{P}(V_1)$ e

$$S_2 : x_0 - 2x_1 + x_3 = 2x_0 + 2x_3 + ax_1 = 0$$

dove a è un parametro reale. Siano infine U_0 e U_2 gli spazi affini $\{x_0 \neq 0\}$ e $\{x_2 \neq 0\}$ con coordinate $y_i = x_i/x_0$ per $i = 1, 2, 3$ e $w_i = x_i/x_2$ per $i = 0, 1, 3$.

- Si dica, al variare di a, quali sono le dimensioni di $S_1, S_2, S_1 \cap S_2$ e di $L(S_1, S_2)$, il più piccolo sottospazio proiettivo contenente S_1 e S_2;
- Posto $a = 3$, si ricavino delle equazioni cartesiane per $L(S_1, S_2)$;
- Si scrivano delle equazioni parametriche (nelle coordinate y_i di U_0) per $U_0 \cap S_1$;
- Detta r la retta affine di U_2 passante per il punto $P = (100, 43, \sqrt{7})$ con direttrice $d = (1, 4, -2)$, sia $\tilde{r}$ la sua chiusura proiettiva. Si ricavino delle equazioni cartesiane per $\tilde{r}$ e i suoi punti all'infinito;

Soluzione dell'esercizio 2
Il sottospazio vettoriale V_1 di $\mathbb{R}^3$ è generato da due vettori indipendenti e, quindi, ha dimensione 2. Di conseguenza, il suo proiettivizzato S_1 è un sottospazio proiettivo di dimensione 1, una retta proiettiva. S_2 è descritto da due equazioni lineari omogenee e per stabilirne la dimensione dobbiamo controllare che siano indipendenti. La matrice dei coefficienti è

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e ha rango 1 se e solo se $a = -4$ (per $a \neq 4$ il rango è 2). Abbiamo quindi che $\dim(S_2) = 2$ per $a = -4$ e $\dim(S_2) = 1$ per $a = -4$. Abbiamo bisogno dell'intersezione tra S_1 e S_2 quindi ci converrà scrivere delle equazioni cartesiane per la retta S_1. Abbiamo

$$V_1 = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle (1, 0, 3, 2), (3, 0, -1, 0) \rangle = \{\underline{x} = (a + 3b, 0, 3a - b, 2a) \quad | \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Dalla relazione $x_3 = 2a$ possiamo ricavare $a = x_3/2$ e da $x_2 = 3a - b$ abbiamo $b = 3a - x_2 = 3/2x_3 - x_2$. Andando a sostituire nelle prime due equazioni abbiamo una descrizione in equazioni cartesiane per V_1 e quindi per S_1:

$$S_1 : 5x_3 - 3x_2 - x_0 = x_1 = 0.$$

L'intersezione tra S_1 e S_2 si può quindi scrivere come il sottospazio proiettivo ottenuto annullando 4 equazioni (2 per S_1 e 2 per S_2). La matrice dei coefficienti di questo sistema è

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Operando sulle righe (precisamente sommando due volte l'ultima alla prima e sommando alla seconda riga la prima moltiplicata per -2 e l'ultima per $-a$), diventa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

che si vede facilmente essere una matrice di rango 3. In particolare abbiamo mostrato che, per ogni $a \in \mathbb{R}$ abbiamo che $S_1 \cap S_2$ ha codimensione 3: $S_1 \cap S_2$ è un punto. Se volessimo ricavarlo, scriviamo esplicitamente la soluzione del sistema (nell'ultima formulazione per semplicità). Il sistema è equivalente a

$$x_0 + x_3 = x_0 + 3x_2 - 5x_3 = x_1 = 0$$

che possiamo semplificare ulteriormente utilizzando $x_0 = -x_3$

$$x_0 + x_3 = x_2 - 2x_3 = x_1 = 0.$$

La soluzione generale è quindi del tipo

$$(-x_3, 0, 2x_3, x_3)$$

che da' luogo a un sottospazio vettoriale di dimensione 1. Proiettivizzando abbiamo quindi il punto $[-1 : 0 : 2 : 1]$. Per ricavare la dimensione di $L(S_1, S_2)$ usiamo la formula di Grassmann ottenendo

	$\dim(S_1)$	$\dim(S_2)$	$\dim(S_1 \cap S_2)$	$\dim(L(S_1, S_2))$
$a = -4$	1	2	0	3
$a \neq -4$	1	1	0	2

Per ricavare $S_1 \cap U_0$ basta deomogenizzare le equazioni cartesiane di S_1 rispetto a x_0. Siccome vale

$$S_1 : 5x_3 - 3x_2 - x_0 = x_1 = 0$$

avremo, nei punti di U_0,

$$S_1 \cap U_0 : (1/x_0)(5x_3 - 3x_2 - x_0) = (1/x_0)x_1 = 0 \to 5(x_3/x_0) - 3(x_2/x_0) - 1 = (x_1/x_0) = 0$$

cioè, nelle coordinate $y_i = x_i/x_0$,

$$S_1 \cap U_0 : 5y_3 - 3x_2 - 1 = y_1 = 0.$$

Consideriamo ora la retta r in U_2 nel testo dell'esercizio. Una sua equazione parametrica è

$$(w_0, w_1, w_3) = (100, 43, \sqrt{7}) + t(1, 4, -2)$$

da cui possiamo ricavare delle equazioni cartesiane ricavando, ad esempio dalla prima equazione, $t = w_0 - 100$ e andando a sostituire:

$$r : w_1 = 43 + 4w_0 - 400, w_3 = \sqrt{7} - 2w_0 + 200.$$

Per ricavarne la chiusura proiettiva basta omogeneizzare le equazioni rispetto alle relazioni $w_i = x_i/x_2$:

$$x_1/x_2 = (357)x_2/x_2 - 4x_0/x_2, x_3/x_2 = (\sqrt{7} + 200)x_2/x_2 - 2x_0/x_2$$

$$\tilde{r} : x_1 = (357)x_2 - 4x_0, x_3 = (\sqrt{7} + 200)x_2 - 2x_0.$$

Ipunti all'infinito si ottengono intersecando la chiusura proiettiva della retta con l'iperpiano all'infinito che, nelle coordinate scelte, è $x_2 = 0$. Andando a risolvere il sistema si ottiene

$$\tilde{r} \cap \{x_2 = 0\} = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \quad | \quad x_2 = 0, x_1 = 4x_0, x_3 = -2x_0\} = \{(1 : 4 : 0 : -2)\}.$$

Va notato che non è un caso che il punto all'infinito della retta r si scriva proprio così: in corrispondenza delle coordinate x_0, x_1, x_3 abbiamo proprio la direzione della retta da cui siamo partiti, mentre, chiaramente, la coordinata x_2 è nulla poichè si tratta di un punto all'infinito.

Esercizio 3
Si considerino le proiettività f e g di $\mathbb{P}^2$ definite dalle matrici

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

e se ne ricavino i punti fissi.

Soluzione dell'esercizio 3
I punti fissi di una proiettività specificata tramite una matrice si ricavano cercando gli autospazi della matrice e poi proiettivizzandoli. Partiamo dalla prima proiettività. La matrice A ha polinomio caratteristico

$$p_A(t) = -(t - 4)^2(t - 3)$$

quindi gli unici autospazi non nulli sono quello relativo a 4 e a 3. Se indichiamo con V_λ l'autospazio relativo all'autovalore λ abbiamo

$$V_4 : \begin{cases} 4x_0 + x_1 + x_2 &= 4x_0 \\ 4x_1 + 12x_2 &= 4x_1 \\ 3x_2 &= 4x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_4 = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

$$V_3 : \begin{cases} 4x_0 + x_1 + x_2 &= 3x_0 \\ 4x_1 + 12x_2 &= 3x_1 \\ 3x_2 &= 3x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 11x_2 \\ x_1 = -12x_2 \end{cases} \Rightarrow V_4 = \langle (11, -12, 1) \rangle.$$

La molteplicità geometrica di 4 è 1 (mentre quella algebrica è 2) mentre la molteplicità algebrica di 3 è 1. Di conseguenza f avrà esattamente 2 punti fissi: i punti

$$(1 : 0 : 0) \quad \text{e} \quad (1 : 0 : -1).$$

Occupiamoci di g ora. Il suo polinomio caratteristico è

$$p_B(t) = -(t-2)[(t-1)(t-3)-15] = -(t-2)(t^2-4t-12) = -(t-2)^2(t+6)$$

quindi dobbiamo ricavre gli autospazi relativi agli autovalori -2 e 6. Questi sono:

$$V_{-2} : \begin{cases} x_0 + 3x_2 &= -2x_0 \\ -2x_1 &= -2x_1 \\ 5x_0 + 3x_2 &= -2x_2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ x_0 = -x_2 \right. \Rightarrow V_{-2} = \langle (1,0,-1),(0,1,0) \rangle$$

$$V_6 : \begin{cases} x_0 + 3x_2 &= 6x_0 \\ -2x_1 &= 6x_1 \\ 5x_0 + 3x_2 &= 6x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ 5x_0 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_4 = \langle (3,0,5) \rangle.$$

quindi possiamo concludere che g ha un punto fisso isolato $(3:0:5)$ e una retta di punti fissi, la retta generata dai punti $(1:0:1)$ e $(0:1:0)$.

Esercizio 4

Si consideri lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$ su un campo $\mathbb{K}$. Siano r e s due rette disgiunte e P un punto non appartenente ad esse.

- ([Ser89], Ex 6, pag. 297) Dimostrare che esiste un'unica retta passante per P che interseca r e s.
- ([Ser89], Ex 7(a), pag. 297) Nel caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}, P = (0:1:0:1)$,

  $$r : x_0 - x_2 + 2x_3 = 2x_0 + x_1 = 0 \quad \text{e} \quad s : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = x_0 + x_3 = 0$$

  verificare che r e s sono disgiunte e ricavare l'equazione cartesiana dell'unica retta la cui esistenza è stata dimostrata nel punto precedente.

Soluzione dell'esercizio 4

Si consideri lo spazio proiettivo generato da r e da P. Poichè $P \notin r$ avremo, per la formula di Grassmann, che $L(r,P) = \pi_r$ è un piano di $\mathbb{P}^3$. Con lo stesso ragionamento si costruisce il piano $\pi_s = L(s,P)$. Consideriamo ora l'intersezione $t = \pi_r \cap \pi_s$. Questo è uno spazio proiettivo che contiene il punto P e può avere dimensione 1 o 2 per la formula di Grassmann. Non possiamo avere $\dim(t) = 2$ poichè, altrimenti avremmo $\pi_r = \pi_s = t$ ma a questo punto r ed s sarebbero complanari e quindi incidenti (perchè siamo nel proiettivo!). Abbiamo quindi che t è una retta proiettiva che passa per P ed è contenuta tanto in π_r quanto in π_s. Ma allora, sempre per la formula di Grassmann (applicata negli spazi proiettivi $\mathbb{P}^2 \simeq \pi_r$ e $\mathbb{P}^2 \simeq \pi_s$), avremo che $t \cap r$ è un punto e lo stesso vale per $t \cap s$. Abbiamo mostrato l'eistenza: mostriamo che tale retta è unica.

Sia t una retta secante r e s e passante per P. Mostriamo prima di tutto che deve essere contenuta in π_r. Se $Q_r = t \cap r$ allora avremo $Q_r \neq P$. Ma $P, Q_r \in \pi_r \cap t$ quindi $t = L(P, Q_r)$ è necessariamente contenuta in π_r. Con un ragionamento analogo si dimostra che t è contenuta in π_s. Quindi non può che essere $t = \pi_r \cap \pi_s$.

Consideriamo le rette di $\mathbb{P}^3$ date da

$$r : x_0 - x_2 + 2x_3 = 2x_0 + x_1 = 0 \quad \text{e} \quad s : 2x_1 - 3x_2 + x_3 = x_0 + x_3 = 0$$

e osserviamo che sono disgiunte. Per farlo mettiamo a sistema le quattro equazioni la cui matrice dei coefficienti è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si vede che $\det(A) \neq 0$ e quindi l'unica soluzione del sistema omogeneo è il vettore nullo. Questo basta per dimostrare che $r \cap s = \emptyset$. Cerchiamo il piano $\pi_r = L(P, r)$. Per farlo consideriamo il fascio di (iper)piani contenenti r la cui equazione è

$$\lambda(x_0 - x_2 + 2x_3) + \mu(2x_0 + x_1) = 0$$

e ricaviamo l'unico fra questi che passa per P. Questo avviene esattamente quando

$$\lambda(2) + \mu(1) = 0 \Rightarrow \mu = -2\lambda.$$

Avremo quindi

$$\pi_r : -3x_0 - 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0.$$

In modo analogo si ottiene il fascio di iperpiani contenenti s:

$$\lambda(2x_1 - 3x_2 + x_3) + \mu(x_0 + x_3) = 0.$$

Il piano π_s è l'unico piano del fascio che passa per P, che si ottiene per $3\lambda + \mu = 0$ e quindi è il piano

$$\pi_s : -3x_0 + 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0.$$

La retta t cercata ha quindi equazione cartesiana

$$\begin{cases} -3x_0 + 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -3x_0 - 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_0 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 5
Si considerino $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ con coordinate proiettive (x_0, x_1, x_2) e si identifichi $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ con uno spazio euclideo $\mathbb{E}^2$ di coordinate (y_1, y_2) con $y_i = x_i/x_0$.

- Si considerino, in U_0, la retta euclidea passante per il punto $(0, 1)$ avente direzione $d_k = (1, k)$ e la retta euclidea s di equazione $y_1 - 2y_2 - 1 = 0$. Si ricavino le chiusure proiettive $\tilde{r}$ e $\tilde{s}$ delle due rette e le intersezioni $r \cap s$ e $\tilde{r} \cap \tilde{s}$.
- Si consideri, al variare di k, l'isometria $f(y_1, y_2) = (y_2 + 4, y_1 - k)$. Si scriva la proiettività $\tilde{f}$ che estende f a $\mathbb{P}^2$ e i punti fissi di $\tilde{f}$.
- Si ricavino le rette (euclidee) fisse di f.

Soluzione dell'esercizio 5
Incominciamo a ricavare un'equazione cartesiana per r. Un'espressione parametrica di r è $y_1 = t, y_2 = 1 + kt$ da cui deduciamo facilmente l'equazione cartesiana

$$r : y_2 - ky_1 - 1 = 0.$$

Per ricavare le chiusure proiettive di r e s basta omogeneizzare:

$$\tilde{r} : x_2 - kx_1 - x_0 = 0$$

$$\tilde{s} : x_1 - 2x_2 - x_0 = 0.$$

Occupiamoci dell'intersezione $\tilde{r} \cap \tilde{s}$. La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\begin{bmatrix} -1 & -k & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

e ha rango massimo (2) per ogni valore di k. Questo vuol dire che, come ci postevamo aspettare visto che siamo sul piano proiettivo, $\tilde{r} \cap \tilde{s}$ è un punto che indicheremo con P_k. Ricaviamolo andando a risolvere il sistema.

$$\begin{cases} -x_0 - kx_1 + x_2 = 0 \\ -x_0 + x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (I - II) : 3x_2 - (k+1)x_1 = 0 \\ (II + 2I) : -3x_0 + (1-2k)x_1 = 0 \end{cases}.$$

Di conseguenza il punto P_k è il punto proiettivo

$$P_k = [(1-2k), 3, (k+1)].$$

Osserviamo subito che, per $k \neq 1/2$ possiamo anche scrivere

$$P_k = [(1-2k), 3, (k+1)] = [1, 3/(1-2k), (k+1)/(1-2k)]$$

che è un punto affine: l'unico punto di intersezione di r e s è quindi il punto di coordinate

$$(3/(1-2k), (k+1)/(1-2k)).$$

Per $k = 1/2$ invece P_k è un punto all'infinito (per la precisione è il punto $[0, 1, 1/2]$). In tal caso, quindi, avremo $r \cap s = \emptyset$ e $r \parallel s$.

L'isometria f si estende a una proiettività $\tilde{f}$ di $\mathbb{P}^2$ che è rappresentata dalla matrice

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 0 & 1 \\ -k & 1 & 0 \end{array}\right].$$

I punti fissi di $\tilde{f}$ si ottengono proiettivizzando gli autospazi di $\tilde{A}$. Si ricava facilmente che gli autovalori di $\tilde{A}$ sono 1 (con molteplicità algebrica 2) e -1 (con molteplicità algebrica e geometrica 1). Ricaviamo gli autospazi.

$$V_{-1} : \begin{cases} x_0 &= -x_0 \\ 4x_0 + x_2 &= -x_1 \\ -kx_0 + x_1 &= -x_2 \end{cases} \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow V_{-1} = \langle (0, 1, -1) \rangle$$

$$V_1 : \begin{cases} x_0 &= x_0 \\ 4x_0 + x_2 &= x_1 \\ -kx_0 + x_1 &= x_2 \end{cases} \begin{cases} 4x_0 - x_1 + x_2 = 0 \\ -kx_0 + x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} 4x_0 - x_1 + x_2 = 0 \\ (k-4)x_0 = 0 \end{cases}$$

Quindi, se $k = 4$, l'autospazio V_1 ha dimesione 2 ed ha equazione cartesiana

$$4x_0 - x_1 + x_2 = 0$$

mentre se $k \neq 4$, V_1 ha dimensione 1 ed è generato da $(0, 1, 1)$. Di conseguenza i punti fissi di $\tilde{f}$ sono

$$\text{se } k \neq 4, \text{ due punti } : [0, 1, -1], [0, 1, 1]$$

$$\text{se } k = 4, \text{ un punto e una retta } : [0, 1, -1], x_2 - x_1 - 4x_0 = 0.$$

Si noti che, per $k \neq 4$, non ci sono punti fissi in $\mathbb{A}^2$ ed è immediato verificare che f è inversa: f è una glissoriflessione. Se invece $k = 4$, f ha una retta di punti fissi (la retta di equazione $y_2 - y_1 - 4 = 0$) ed è inversa: si tratta della riflessione rispetto a una retta (la retta di punti fissi appena ricavata).

Se abbiamo una retta fissata (che non è necessariamente una retta di punti fissi!) allora f manderà punti al finito in punti al finito e punti all'infinito in punti all'infinito. Questo vuol dire che se ho una retta fissa per f allora $\tilde{f}$ ha la sua direzione come punto fisso. Se $k = 4$, quando f è una riflessione rispetto alla retta $r : y_2 - y_1 - 4 = 0$, notiamo subito che uno dei punti fissi all'infinito è la direzione di r mentre l'altra è la direzione ortogonale ad essa. Delle rette con la stessa direzione di r solo r è una retta fissa (ed è anche retta di punti fissi). Invece, tutte le rette ortogonali a r sono rette fisse perchè f è la riflessione rispetto a r.

Supponiamo ora $k \neq 4$ e consideriamo una retta del tipo $y_1 + y_2 + c = 0$. Se andiamo a trasformarla tramite f otteniamo la retta $y_1 + y_2 - 4 + k + c = 0$ che è la retta di partenza se e solo se $k = 4$: abbiamo mostrato che non ci sono rette fisse di questo tipo per $k \neq 4$. Se invece partiamo da una retta del tipo $y_1 - y_2 + c = 0$ questa verrà trasformata nella retta $-y_1 + y_2 - (4 + k) + c = 0$ che è la retta di partenza se e solo se $2c = (4 + k)$: abbiamo una sola retta fissa che è anche la retta che ci serve per decomporre la glissoriflessione come riflessione rispetto a una retta composta con una traslazione in direzione parallela alla retta considerata.

Riferimenti bibliografici

[Ser89] Sernesi, Edoardo, *Geometria 1*. Bollati Boringhieri, Torino, 1989.