UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Marco Andreatta, Luca Migliorini
Gianluca Occhetta, Davide Panizzolo
Lorenza Tonetto, Marina Avitabile

Esercizi di Geometria

Luglio 2000

1. Programma del corso

Programma del corso di Geometria 1 modulo
Professori Marco Andreatta e Luca Migliorini
Corso di laurea in Ingegneria; anno accademico 1998:99.

Tutto quanto trattato nelle ore di lezione e di esercitazione fa parte del programma d'esame. Gli argomenti principali sono i seguenti:

Prima Parte.
Sistemi lineari: definizioni e notazioni. Metodo di Gauss per la ricerca delle soluzioni. Vettori in R^n: vettori applicati, vettori, vettori paralleli, composizione interna di vettori, prodotto per uno scalare. Teoria degli spazi vettoriali: basi e dimensione di uno spazio vettoriale. L'algebra delle matrici; calcolo dell'inversa con il metodo di Gauss; applicazioni all'algebra lineare. Determinanti; definizione e proprietà. Rango di una matrice. Inversa di una matrice con il determinante. Applicazione alla soluzione dei sistemi lineari: teorema di Rouche-Capelli e teorema di Cramer. Teoria delle trasformazioni lineari: teorema di nullità più rango. Trasformazioni lineari e matrici. Autovalori e autovettori di una trasformazione lineare; polinomio caratteristico. Diagonalizzabilità di un operatore lineare; il caso degli operatori simmetrici.

Seconda Parte.
Sistema di riferimento, coordinate. Geometria in un piano affine ed in uno spazio affine di dimensione 3. Rette e piani; rappresentazione analitica, equazioni parametriche ed equazioni cartesiane. Intersezioni di piani e rette; parallelismo; rette sghembe nello spazio.

Terza Parte.
Prodotto scalare euclideo, norma e distanza in uno spazio con un prodotto scalare, ortogonalità ed ortonormalità: definizioni, proprietà ed esempi. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e disuguaglianza triangolare. Distanza fra due sottospazi affini di uno spazio euclideo. Isometrie: esempi di rotazioni, riflessioni,....

Testo Consigliato
T. Apostol, Calcolo, volume II Geometria, Boringhieri.

2. Matrici

Esercizio 1. *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

calcolare, se possibile, i prodotti

$$AB \quad e \quad BA.$$

Soluzione. La matrice A ha due righe e due colonne ovvero è una matrice 2×2, mentre la matrice B è una matrice 2×3. Poiché il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B è definito il prodotto AB. La matrice AB ha lo stesso numero di righe di A e lo stesso numero di colonne di B pertanto AB è una matrice 2×3. Risulta inoltre

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot (-4) + 3 \cdot 6 \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) & 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & -6 & 14 \\ 7 & -2 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il prodotto BA non è definito perchè il numero di colonne della matrice B è diverso dal numero di righe della matrice A.

Esercizio 2. *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

calcolare, se possibile, i prodotti

$$AB \quad e \quad BA.$$

Soluzione. La matrice A è una matrice 3×2 mentre la matrice B è una matrice 2×3 pertanto sono definiti entrambi i prodotti AB e BA. Inoltre AB è una matrice 3×3 mentre BA è una matrice 2×2.
Risulta:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -8 & 10 \\ 1 & -2 & 5 \\ 9 & 22 & -15 \end{pmatrix},$$

e

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 19 \\ 10 & -3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. *Date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

verificare che

$$A(BC) = (AB)C$$

Soluzione. Innanzitutto verifichiamo che i prodotti coinvolti nell'uguaglianza

$$A(BC) = (AB)C$$

siano definiti. Le matrici A, B, C sono matrici 2×3, 3×2 e 2×2 rispettivamente. Sono definiti allora i prodotti BC e AB ed inoltre la matrice BC è una matrice 3×2 mentre la matrice AB è una matrice 2×2. Sono definiti così anche i prodotti $A(BC)$ e $(AB)C$ e sono entrambi matrici 2×2.
Ora:

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

e

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Infine:

$$A(BC) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

e

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. *Sia D la matrice*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in R, i = 1, \dots 4.$$

(1) *Supponendo che gli elementi sulla diagonale di D siano tra loro tutti distinti, determinare le matrici A, 4×4, che commutano con D, ovvero tali che*

$$A \cdot D = D \cdot A$$

(2) *Supponendo che gli elementi sulla diagonale di D siano tra loro tutti uguali, determinare le matrici A, 4×4, che commutano con D.*

Soluzione. Sia A una generica matrice 4×4 che indichiamo con :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix},$$

calcoliamo i prodotti AD e DA.
Risulta:

$$AD = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}\lambda_1 & a_{12}\lambda_2 & a_{13}\lambda_3 & a_{14}\lambda_4 \\ a_{21}\lambda_1 & a_{22}\lambda_2 & a_{23}\lambda_3 & a_{24}\lambda_4 \\ a_{31}\lambda_1 & a_{32}\lambda_2 & a_{33}\lambda_3 & a_{34}\lambda_4 \\ a_{41}\lambda_1 & a_{42}\lambda_2 & a_{43}\lambda_3 & a_{44}\lambda_4 \end{pmatrix}$$

e

$$DA = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}\lambda_1 & a_{12}\lambda_1 & a_{13}\lambda_1 & a_{14}\lambda_1 \\ a_{21}\lambda_2 & a_{22}\lambda_2 & a_{23}\lambda_2 & a_{24}\lambda_2 \\ a_{31}\lambda_3 & a_{32}\lambda_3 & a_{33}\lambda_3 & a_{34}\lambda_3 \\ a_{41}\lambda_4 & a_{42}\lambda_4 & a_{43}\lambda_4 & a_{44}\lambda_4 \end{pmatrix}$$

Supponiamo che gli elementi sulla diagonale della matrice D siano tra loro tutti distinti. Allora $AD = DA$ se e solo se

$$\lambda_i a_{ij} = \lambda_j a_{ij} \qquad i, j = 1 \dots 4, \quad i \neq j,$$

ovvero se e solo se

$$(\lambda_i - \lambda_j) a_{ij} = 0 \qquad i \neq j.$$

Poichè $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$ la matrice A commuta con la matrice D se e solo se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$ ovvero se e solo se A è una matrice diagonale.
Se invece gli elementi sulla diagonale della matrice D sono fra loro uguali allora ogni matrice 4×4 commuta con D.

Esercizio 5. *Sia A la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x \in R.$$

Calcolare la matrice A^n, per ogni n numero naturale.

Soluzione. Calcoliamo le potenze A^2, A^3 e A^4. Risulta:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sulla base degli esempi visti affermiamo che

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nx \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per dimostrare l'affermazione procediamo per induzione su n. Se $n = 1$ l'uguaglianza è banalmente verificata. Supponiamola vera per n, ovvero supponiamo che

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nx \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e dimostriamola per $n+1$ ovvero proviamo che

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (n+1)x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Risulta

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & nx \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (n+1)x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 6. *Sia A la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Provare che A è radice del polinomio $p(x) = -x^3 + 5x^2 - 7x$, ovvero provare che $p(A)$ è la matrice nulla.

Soluzione. Si tratta di provare che

$$p(A) = -A^3 + 5A^2 - 7A$$

è la matrice nulla.

Ora
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -6 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$
mentre
$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -6 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 13 \\ -9 & -2 & -15 \\ -15 & 13 & 24 \end{pmatrix}$$
Risulta allora:
$$\begin{aligned} p(A) = -A^3 + 5A^2 - 7A &= \begin{pmatrix} 2 & -5 & -13 \\ 9 & 2 & 15 \\ 15 & -13 & -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 20 \\ -30 & 5 & -15 \\ -15 & 20 & 45 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -7 & 0 & -7 \\ 21 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esercizio 7. *Calcolare il determinante delle seguenti matrici:*
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione.
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 = 21.$$
$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0.$$
$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 60 + 12 + 12 - 15 + 8 = 79.$$
$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2.$$
$$\det(E) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 9 + 12 = 21.$$

Per calcolare il determinante della matrice F facciamo lo sviluppo di Laplace lungo la prima riga.

$$\det(F) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 7 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -156.$$

Esercizio 8. *Sia A una matrice quadrata. Supponiamo che A sia nilpotente, ovvero che esista un naturale m, con $m \geq 1$, tale che A^m è la matrice nulla. Calcolare il determinante di A.*

Soluzione. Per ipotesi esiste un naturale $m \geq 1$ tale che A^m è uguale alla matrice nulla. Allora $\det(A^m) = 0$ e, d'altra parte, per il teorema di Binet, $\det(A^m) = m \det(A)$. Abbiamo allora

$$m \det(A) = 0 \qquad \text{con } m \geq 1,$$

da cui segue

$$\det(A) = 0.$$

Esercizio 9. *Si calcoli il rango delle seguenti matrici, al variare del parametro reale k:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3k \\ 1 & -k & k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ k & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Per calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

riduciamola a gradino. Una possibile riduzione, operando sulle righe, è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II - 3I \\ I - III \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ II + III \end{matrix}$$

Il rango della matrice ridotta è uguale al numero di righe non identicamente nulle e pertanto è uguale, in questo caso, a 2.
Per calcolare il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} k & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3k \\ 1 & -k & k \end{pmatrix}$$

ne calcoliamo il determinante. Risulta

$$\begin{vmatrix} k & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3k \\ 1 & -k & k \end{vmatrix} = 3(k-1)^2(k+1).$$

Per $k \neq \pm 1$ il determinante della matrice è non nullo e dunque il rango è uguale a 3.
Se $k = -1$ la matrice diventa:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Si vede facilmente che la prima e la terza riga sono proporzionali, mentre un minore non nullo di ordine 2 è, per esempio:

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3 + 3 = 6.$$

La matrice ha allora rango 2.
Per $k = 1$ la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La seconda e la terza riga sono multiple della prima, ne segue che il rango della matrice è uguale a 1.
Infine per calcolare il rango dell'ultima matrice riduciamola a gradino. Una possibile riduzione, operando sulle righe, è:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ k & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 & 1 \\ k & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} III \\ I \\ II \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & k & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -k & 2-k \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II - I \\ III - kI \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -k & 2-k \\ 0 & k & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ III \\ II \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -k & 2-k \\ 0 & 0 & k^2-4 & k^2-2k \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 4III - kII. \end{matrix}$$

Per ogni valore di k la prima e la seconda riga della matrice ridotta non sono mai identicamente nulle. La terza riga, invece, è identicamente nulla per $k = 2$. Ne segue che il rango della matrice è 2 per $k = 2$ e 3 per $k \neq 2$.

Esercizio 10. *Dire per quali valori del parametro reale k la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{pmatrix}$$

è invertibile e determinare la sua inversa.

Soluzione. Una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è non nullo. Il determinante della matrice A è uguale a

$$\det(A) = 2k(k-2)$$

sicchè per $k \neq 0, 2$ la matrice A è invertibile. Per determinare l'inversa consideriamo la trasposta di A:

$$A^t = \begin{pmatrix} k & 4 \\ k & 2k \end{pmatrix}$$

di cui calcoliamo la matrice dei cofattori :

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} 2k & -k \\ -4 & k \end{pmatrix}.$$

Risulta allora:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widehat{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k-2} & -\frac{1}{2(k-2)} \\ \\ -\frac{2}{k(k-2)} & \frac{1}{2(k-2)} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 11. *Dire per quali valori del parametro reale t la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{pmatrix}$$

è invertibile e determinare la sua inversa.

Soluzione. Una matrice quadrata è invertibile se e solo se il suo determinante è non nullo. Il determinante della matrice A è uguale a

$$\det(A) = (t-4)(t+2)^2$$

sicchè per $t \neq -2, 4$ la matrice A è invertibile. Per determinare l'inversa consideriamo la trasposta di A:

$$A^t = \begin{pmatrix} t-1 & -3 & -6 \\ 3 & t+5 & 6 \\ -3 & -3 & t-4 \end{pmatrix}.$$

La matrice dei cofattori è

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} t^2+t-2 & -3t-6 & 3t+6 \\ 3t+6 & t^2-5t-14 & 3t+6 \\ 6t+12 & -6t-12 & t^2+4t+4 \end{pmatrix}$$

sicchè

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\widehat{A}.$$

Esercizio 12. *Siano A, B, C matrici reali $n \times n$. L'uguaglianza*

$$AB = AC$$

implica che $B = C$?

Soluzione. L'uguaglianza

$$AB = AC$$

non implica che sia $B = C$. Infatti basta prendere B e C due matrici $n \times n$ distinte e A la matrice nulla.

Se però A è non singolare allora A è invertibile. Moltiplicando l'uguaglianza $AB = AC$ per A^{-1} a sinistra si trova

$$B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) = (A^{-1}A)C = C.$$

Esercizio 13. *Siano A e B matrici reali $n \times n$ e sia A invertibile. La matrice prodotto AB è invertibile?*

Soluzione. La matrice AB in generale non è invertibile. Infatti se B è la matrice nulla anche AB è la matrice nulla.
Se però anche B è invertibile allora

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \neq 0.$$

La matrice AB è non singolare e dunque invertibile. Risulta inoltre:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Esercizio 14. *Determinare, se possibile, l'inversa della matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Risulta $\det(A) = -12 \neq 0$ dunque la matrice A è invertibile .
Per determinare l'inversa di A consideriamo la matrice che si ottiene accostando ad A la matrice identica:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando sulle righe di B tramite operazioni elementari vogliamo ottenere una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 10 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 10 & 0 & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

è l'inversa della matrice A.

3. Sistemi lineari

Esercizio 15. *Determinare le soluzioni del seguente sistema omogeneo:*

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riduciamo la matrice a gradino. Una possibile riduzione per righe è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema associato all'ultima matrice è:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 5y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

che anmmette l'unica soluzione:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

In modo alternativo si può precedere come segue. La matrice dei coefficienti associata al sistema è la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A è uguale a :

$$\det(A) = -12.$$

Ne segue che la matrice A ha rango 3 così come la matrice completa associata al sistema. Per il teorema di Rouchè-Capelli il sistema ha una unica soluzione. D'altra parte ogni sistema omogeneo ha almeno la soluzione banale, pertanto la soluzione è:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Esercizio 16. *Determinare, se esistono, le soluzioni del seguente sistema non omogeneo:*

$$\begin{cases} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ 3x + 2y - z + 2w = 4 \\ 3x + 3y + 3z - 3w = 5 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Una possibile riduzioone a gradino è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 3 & 12 & -15 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice incompleta è 2 mentre il rango della matrice completa è 3. Il sistema non ha soluzioni. D'altra parte, nel sistema associato all'ultima matrice, l'ultima riga corrisponde all'equazione

$$0 = 8$$

manifestamente falsa.

Esercizio 17. *Determinare, se esistono, le soluzioni del seguente sistema non omogeneo:*

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y + 8z = 4 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 17 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una possibile riduzione a gradino è :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 17 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 8 & -8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa e pari a 2. Dal teorema di Rouchè-Capelli segue che il sistema ammette infinite soluzioni.
Per determinare le soluzioni scriviamo il sistema associato alla matrice ridotta:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ -y + 2z = -2. \end{cases}$$

Risolvendo in funzione della variabile z, si ottiene:

$$\begin{cases} x = -1 - 7z \\ y = 2 + 2z. \end{cases}$$

Posto $z = t$, con $t \in R$, le soluzioni si riscrivono:

$$\begin{cases} x = -1 - 7t \\ y = 2 + 2t \\ z = t, \quad t \in R. \end{cases}$$

Esercizio 18. *Determinare, se esistono, le soluzioni del seguente sistema non omogeneo:*

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è la matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & -1 & 16 \end{pmatrix}.$$

Per ridurre la matrice a gradino scambiamo la prima e la seconda colonna, ottenendo così la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -1 & 16 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che l'aver scambiato le prime due colonne colonne della matrice implica che l'ordine scelto per le variabili, nello scrivere il sistema associato, diventa y, x, z. Una possibile riduzione per righe è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \\ -3 & 5 & -1 & 16 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -4 & 15 \\ 0 & 11 & -10 & 31 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & -4 & 15 \\ 0 & 0 & 26 & -52 \end{pmatrix}$$

Il rango della matrice completa è uguale al rango della matrice incompleta e uguale a 3. Il sistema allora ammette una unica soluzione. Per determinare la soluzione scriviamo, ricordando che abbiamo scambiato le prime due colonne, il sistema associato alla matrice ridotta:

$$\begin{cases} y + 2x - 3z = 5 \\ 7x - 4z = 15 \\ 26z = -52. \end{cases}$$

La soluzione è:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases}$$

Esercizio 19. *Discutere l'esistenza di soluzioni per il seguente sistema lineare, al variare del parametro reale k. Determinare, ove esistano, le soluzioni.*

$$\begin{cases} kx - 2y = k+1 \\ x + (k+3)y = 0 \\ (k-1)x - (k+5)y = k+1 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è:

$$\begin{pmatrix} k & -2 & k+1 \\ 1 & k+3 & 0 \\ k-1 & -k-5 & k+1. \end{pmatrix}$$

Una possibile riduzione per righe è:

$$\begin{pmatrix} k & -2 & k+1 \\ 1 & k+3 & 0 \\ k-1 & -k-5 & k+1. \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & k+3 & 0 \\ k & -2 & k+1 \\ k-1 & -k-5 & k+1. \end{pmatrix} \begin{matrix} II \\ I \\ III \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & k+3 & 0 \\ 0 & (k+1)(k+2) & -k-1 \\ 0 & (k+1)(k+2) & -k-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \\ -II+kI \\ -III+(k-1)I. \end{matrix}$$

Notiamo che la riduzione fatta ha senso per ogni valore del parametro reale k. Infatti nell'ultimo passaggio abbiamo sostituito la seconda riga con k volte la prima riga meno la seconda riga. Se $k=0$ quello che abbiamo fatto è sostituire la seconda riga con un suo multiplo non nullo.
Stesso discorso vale per la terza riga, infatti questa è stata sostituita con $k-1$ volte la prima riga meno la terza. Se $k=1$ di nuovo abbiamo sostituito la terza riga con un suo multiplo non nullo.
Ultimiamo ora la riduzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & k+3 & 0 \\ 0 & (k+1)(k+2) & -k-1 \\ 0 & (k+1)(k+2) & -k-1. \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & k+3 & 0 \\ 0 & (k+1)(k+2) & -k-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per $k \neq -1, -2$ la matrice incompleta e la matrice completa hanno entrambe rango 2 pertanto il sistema ammette una sola soluzione. La soluzione è:

$$\begin{cases} x = \dfrac{k+3}{k+2} \\ \\ y = -\dfrac{1}{k+2}. \end{cases}$$

Se $k=-1$ la matrice ridotta diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice completa e incompleta hanno entrambe rango 1 pertanto il sistema ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t, \quad t \in R. \end{cases}$$

Infine per $k = -2$ la matrice ridotta diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e il sistema non ha soluzioni.

Esercizio 20. *Discutere l'esistenza di soluzioni per il seguente sistema lineare, al variare del parametro reale k. Determinare, ove esistano, le soluzioni.*

$$\begin{cases} kx + 2y + (k+1)z = 0 \\ x + (k+3)y = 0 \\ (k-1)x - (k+5)y - (k+1)z = 0 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice dei coefficienti del sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} k & 2 & k+1 \\ 1 & k+3 & 0 \\ k-1 & -k-5 & -k-1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il determinante di A:

$$\det(A) = -2k(k+3)(k+1).$$

Per $k \neq -3, -1, 0$ la matrice A ha rango 3 e dunque il sistema ammette solo la soluzione banale:

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0.$$

Se $k = 0$ la matrice dei coefficienti diventa:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix},$$

che si vede facilmente avere rango 2. Un minore di ordine due non nullo è, per esempio, il minore

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Ne segue che il sistema ammette infinite soluzioni. Le soluzioni si determinano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}t \\ y = -\frac{t}{2} \\ z = t, \quad t \in R. \end{cases}$$

Per $k = -1$ la matrice dei coefficienti del sistema è :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Di nuovo la matrice ha rango 2 e il sistema ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t, \quad t \in R. \end{cases}$$

Infine se $k = -3$ la matrice dei coefficienti diventa:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t, \quad t \in R. \end{cases}$$

Esercizio 21. *Discutere l'esistenza di soluzioni per il seguente sistema lineare, al variare del parametro reale k. Determinare, ove esistano, le soluzioni.*

$$\begin{cases} (2k+1)x + (k+1)y + 3kz = k \\ (2k-1)x + (k-2)y + (2k-1)z = k+1 \\ 3kx + 2ky + (4k-1)z = 1 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice dei coefficienti del sistema è:

$$\begin{pmatrix} 2k+1 & k+1 & 3k \\ 2k-1 & k-2 & 2k-1 \\ 3k & 2k & 4k-1 \end{pmatrix}.$$

Il suo determinante risulta essere

$$(k-1)^2(k+1)$$

sicchè per $k \neq \pm 1$ si ha una e una sola soluzione del sistema.

La soluzione, che si può determinare per esempio con il metodo di Cramer, è

$$\begin{cases} x = \dfrac{k(2k-7)}{k^2-1} \\ \\ y = -\dfrac{3k}{k+1} \\ \\ z = \dfrac{4k+1}{k^2-1} \end{cases}$$

Per $k = 1$ la matrice completa associata al sistema diventa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

che si può ridurre come segue:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si hanno infinite soluzioni del sistema :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 \\ z = t, \qquad t \in R. \end{cases}$$

Infine per $k = -1$ la matrice completa associata al sistema diventa:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una possibile riduzione è:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Segue che il sistema non ammette in questo caso alcuna soluzione.

Esercizio 22. *Discutere l'esistenza di soluzioni per il seguente sistema lineare, al variare del parametro reale k. Determinare, ove esistano, le soluzioni.*

$$\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ x + y + 3z = k - 1 \\ 2x + ky - z = 1 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 3 & k-1 \\ 2 & k & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una possibile riduzione per righe è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 1 & 1 & 3 & k-1 \\ 2 & k & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & 0 & k-3 & 3-k \\ 0 & k-2 & -1-2k & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 2 \\ 0 & k-2 & -1-2k & -3 \\ 0 & 0 & k-3 & 3-k \end{pmatrix}.$$

Per $k \neq 2, 3$ la matrice completa e la matrice incompleta hanno entrambe rango 3 e il sistema ammette una unica soluzione.
La soluzione è :

$$\begin{cases} x = \dfrac{k(k+2)}{k-2} \\ \\ y = -2\dfrac{k+2}{k-2} \\ \\ z = -1. \end{cases}$$

Per $k = 2$ la matrice ridotta diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce facilmente che il sistema non ha soluzioni per $k = 2$.
Per $k = 3$ invece la matrice ridotta si riscrive:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In questo caso la matrice completa e incompleta hanno entrambe rango 2. Il sistema ammette le infinite soluzioni seguenti:

$$\begin{cases} x = 5 - 10t \\ y = 7t - 3 \\ z = t, \quad t \in R. \end{cases}$$

Esercizio 23. *Discutere l'esistenza di soluzioni per il seguente sistema lineare, al variare del parametro reale k. Determinare, ove esistano, le soluzioni.*

$$\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice dei coefficienti del sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è pari a:

$$\det(A) = -(k+2)(k-1)^2.$$

Per $k \neq 1, -2$ il sistema ammette una e una sola soluzione . Determiniamo la soluzione utilizzando la regola di Cramer. Risulta:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{1}{k+2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{1}{k+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{1}{k+2}.$$

Per $k = 1$ la matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che la matrice completa e la matrice incompleta hanno entrambe rango 1. Il sistema ammette infinite soluzioni che sono le soluzioni dell'equazione

$$x + y + z = 1.$$

Risulta allora:

$$\begin{cases} x = 1 - s - t \\ y = s \\ z = t, \quad s, t \in R. \end{cases}$$

Se $k = -2$ la matrice completa del sistema diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Riduciamo la matrice a gradino:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Segue che, per $k = -2$, il sistema non ammette alcuna soluzione.

Esercizio 24. *Discutere l'esistenza di soluzioni per il seguente sistema lineare, al variare del parametro reale k. Determinare, ove esistano, le soluzioni.*

$$\begin{cases} x + ky + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \\ 2x + ky + z = 1 \\ 3x + 2ky + 3z = 2 \end{cases}$$

Soluzione. La matrice completa associata al sistema è la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & k & 1 & 1 \\ 3 & 2k & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Una possibile riduzione è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & k & 1 & 1 \\ 3 & 2k & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & k & 2 & 1 \\ 2 & k & 1 & 1 \\ 3 & 2k & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} II \\ I \\ III \\ IV \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & k-1 & -1 & -1 \\ 0 & k-2 & -5 & -3 \\ 0 & 2k-3 & -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \\ II - I \\ III - 2I \\ IV - 3I \end{matrix}$$

Ora scambiamo la seconda e la terza colonna cambiando così l'ordine delle variabili in x, z e y. Otteniamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & k-1 & -1 \\ 0 & -5 & k-2 & -3 \\ 0 & -6 & 2k-3 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & k-1 & -1 \\ 0 & 0 & 4k-3 & -2 \\ 0 & 0 & 4k-3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} I \\ II \\ 5I - II \\ 6I - IV \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & k-1 & -1 \\ 0 & 0 & 4k-3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per $k \neq \frac{3}{4}$ il sistema ammette una sola soluzione:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2k-1}{4k-3} \\[2ex] y = -\dfrac{2}{4k-3} \\[2ex] z = \dfrac{2k-1}{4k-3}. \end{cases}$$

Per $k = \frac{3}{4}$, invece, non esistono soluzioni.

Esercizio 25. *Determinare i valori del parametro reale k tali che il sistema*

$$\begin{cases} x + y + kz = 2 \\ 3x + 4y + 2z = k \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

abbia, rispettivamente, una unica soluzione, nessuna soluzione o più di una soluzione.

Soluzione. Il determinante della matrice dei coefficienti è pari a $k - 3$, sicchè per $k \neq 3$ il sistema ammette una unica soluzione. Se $k = 3$ la matrice completa associata al sistema è la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che la prima riga è uguale alla seconda riga meno la terza e, d'altra parte la seconda e la terza riga non sono tra loro proporzionali. Ne segue che, per $k = 3$, il sistema ammette infinite soluzioni.

4. Spazi vettoriali

Esercizio 26. *Determinare se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi di R^3:*

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x = z\} \\
B &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x = z+1\} \\
C &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x = z^2\} \\
D &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ (x,y,z) = (y,x,x)\} \\
E &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 = 0\} \\
F &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x^2-z^2 = 0 \ e \ x+z=0\}.
\end{aligned}
$$

Soluzione. L'insieme A è costituito dai vettori $(x,y,z) \in R^3$ tali che $x = z$. Poichè A è l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare omogenea, A è un sottospazio di R^3.
Verifichiamo direttamente che A è un sottospazio di R^3.
Abbiamo:

$$A = \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ z = x\} = \{(a,b,a) \ : \ a,b \in R\}.$$

La somma di due vettori di A è ancora un vettore in A, infatti:

$$(a,b,a) + (c,d,c) = (a+c, b+d, a+c) \in A \quad \forall (a,b,a),\ (c,d,c) \in A.$$

Il prodotto di un vettore di A per uno scalare è ancora un vettore di A, infatti:

$$\lambda(a,b,a) = (\lambda a, \lambda b, \lambda a) \in A \quad \forall (a,b,a) \in A,\ \forall \lambda \in R.$$

Il sottoinsieme

$$B = \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x = z+1\}$$

è l'insieme delle soluzioni di una equazione lineare non omogenea e pertanto non è un sottospazio. di R^3. È facile anche verificare che, per esempio, il vettore nullo non appartiene a B.
Il sottoinsieme C di R^3 è costituito dai vettori della forma (a^2, b, a) al variare di a e b in R. Dati due vettori di C, $v_1 = (a^2, b, a)$ e $v_2 = (c^2, d, ca)$, il vettore somma $v_1 + v_2 = (a^2 + c^2, b+d, a+c)$ in generale non è un elemento di C. Infatti $a^2 + c^2 \neq (a+c)^2$ se a e c sono entrambi non nulli. Ne segue che C non è chiuso rispetto alla somma e dunque non è un sottospazio.
Il sottoinsieme D è costituito dai vettori di R^3 che sono soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y - x = 0 \\ z - x = 0 \end{cases}$$

pertanto è un sottospazio di R^3. I suoi elementi sono i vettori della forma (a,a,a) al variare di a in R.
Il sottoinsieme E è costituito dal solo vettore nullo, infatti l'equazione
$x^2 + y^2 + z^2 = 0$ è soddisfatta solo per $x = y = z = 0$. Ne segue che E è il sottospazio banale di R^3.

Infine il sottoinsieme F è costituito dai vettori (x, y, z) di R^3 tali che

$$x^2 - z^2 = 0 \quad \text{e} \quad x + z = 0,$$

ovvero dai vettori di R^3 tali che

$$x + z = 0.$$

Un generico vettore di F si scrive allora come $(a, b, -a)$ per certi a e b in R. Si verifica facilmente che F è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare. Infatti:

$$(a, b, -a) + (c, d, -c) = (a + c, b + d, -(a + c)) \in F$$

e

$$\lambda(a, b, -a) = (\lambda a, \lambda b, -\lambda a) \qquad \forall(a, b, -a), (c, d, -c) \in F, \forall\lambda \in R.$$

Esercizio 27. *Sia V il sottospazio di R^3 generato dai vettori*

$$v_1 = (1, 0, -1) \quad e \quad v_2 = (0, 0, 1).$$

Scrivere V come spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

Soluzione. Gli elementi del sottospazio V sono i vettori

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = (\alpha, 0, \beta - \alpha)$$

al variare di α e β in R.
Abbiamo allora:

$$V = \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ x = \alpha, y = 0, z = \beta - \alpha\}.$$

Al variare di α e β in R, α e $\beta - \alpha$ descrivono tutto R, pertanto:

$$V = \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ y = 0\}.$$

Esercizio 28. *Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di R^3 sono formati da vettori linearmente indipendenti:*

$$\begin{aligned} S &= \{(1, 1, 1),\ (1, 0, 1)\} \\ T &= \{(2, 1, 3),\ (1, 1, 2),\ (3, 2, 5)\} \\ U &= \{(1, 1, 1),\ (0, 1, 1),\ (0, 0, 1)\} \\ V &= \{(a, b, 0)\ :\ a, b \in R\} \end{aligned}$$

Soluzione. L'insieme S è costituito dai vettori $(1, 1, 1)$ e $(1, 0, 1)$ che sono linearmente indipendenti. Infatti due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se sono proporzionali. È facile verificare che in questo caso non esiste alcun λ in R tale che $\lambda(1, 1, 1) = (1, 0, 1)$.
I tre vettori in T non sono linearmente indipendenti perchè il terzo è somma dei primi due. I vettori $(2, 1, 3)$ e $(1, 1, 2)$ sono invece indipendenti poichè non esiste alcun $\lambda \in R$ tale che $\lambda(2, 1, 3) = (1, 1, 2)$.

L'insieme U è costituito dai vettori $(1,1,1)$, $(0,1,1)$ e $(0,0,1)$. Per verificare se si tratta di vettori indipendenti calcoliamo il determinante della matrice formata dai tre vettori:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Risulta $\det(A) = 1 \neq 0$ pertanto i vettori di U sono linearmente indipendenti.
Infine il sottoinsieme V è un sottospazio di R^3 e pertanto non è costituito da vettori linearmente indipendenti. Per esempio perchè contiene il vettore nullo, oppure perchè dato un vettore ne contiene ogni multiplo.

Esercizio 29. *Provare che l'insieme*

$$S = \{(1,1,0),\ (1,1,1),\ (2,1,0),\ (1,0,-1)\}$$

è un sistema di generatori di R^3*. Estrarre una base di* R^3 *dagli elementi di* S*.*

Soluzione. Proviamo che l'insieme S genera R^3. Si tratta di far vedere che ogni vettore di R^3 si può scrivere come combinazione lineare degli elementi di S. Per ogni $(a,b,c) \in R^3$ vogliamo trovare $x, y, z, w \in R$ tali che

$$x(1,1,0) + y(1,1,1) + z(2,1,0) + w(1,0,-1) = (a,b,c).$$

Otteniamo un sistema lineare la cui matrice completa è :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & c \end{pmatrix}.$$

Una possibile riduzione per righe è :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a-b \\ 0 & 1 & 0 & -1 & c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & -1 & c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a-b \end{pmatrix}.$$

Se ne deduce che il sistema ammette sempre (infinite) soluzioni e dunque S genera R^3. I vettori di S sono in numero maggiore della dimensione di R^3 quindi non possono essere tutti linearmente indipendenti. Infatti risulta:

$$(2,1,0) - (1,1,1) = (1,0,-1).$$

D'altra parte i tre vettori $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ e $(2,1,0)$ sono indipendenti e pertanto costituiscono una base di R^3.

Esercizio 30. *Determinare una base del sottospazio di* R^3 *formato dalle soluzioni dell'equazione*

$$x - 2y + 2z = 0$$

Soluzione. Le soluzioni dell'equazione sono tutti e soli i vettori di R^3 della forma $(2y-2z, y, z)$ al variare di y e z in R. Ora:

$$\begin{aligned} (2y-2z, y, z) &= (2y, y, 0) + (-2z, 0, z) \\ &= y(2,1,0) + z(-2,0,1), \end{aligned}$$

sicchè l'insieme $\mathcal{B} = \{(2,1,0), (-2,0,1)\}$ genera il sottospazio. Poichè i vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti l'insieme $\mathcal{B}$ è una base del sottospazio.

Esercizio 31. *Sia W il sottoinsieme di R^3 definito come*

$$W = \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ (x,y,z) = (z,y,x)\}.$$

(1) *Provare che W è un sottospazio di R^3.*
(2) *Calcolare la dimensione di W e determinare una sua base $\mathcal{B}$.*
(3) *Provare che il vettore $w = (3,2,3)$ appartiene a W e determinare le sue coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$.*

Soluzione. Il sottoinsieme W è costituito dalle soluzioni dell'equazione

$$x - z = 0$$

pertanto è un sottospazio di R^3. Inoltre possiamo scrivere:

$$W = \{(a,b,a) \ : \ a,b \in R\}$$

Un generico vettore di W è combinazione lineare dei vettori $v_1 = (1,0,1)$ e $v_2 = (0,1,0)$ poichè:

$$(a,b,a) = av_1 + bv_2.$$

I vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti così l'insieme $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ è una base di W e risulta $\dim(W) = 2$.
Infine il vettore $w = (3,2,3)$ appartiene a W perchè la prima e la terza componente coincidono. Le sue coordinate rispetto alla base ordinata $\mathcal{B}$ sono rispettivamente 2 e 3:

$$3v_1 + 2v_2 = w.$$

Esercizio 32. *Sia*

$$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

un sottoinsieme di vettori linermente indipendenti in uno spazio vettoriale reale V. Provare che anche

$$S' = \{2v_1, 2v_2, \dots, 2v_n\}$$

è un sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti.

Soluzione. Per provare che i vettori di S' sono linearmente indipendenti supponiamo di avere una combinazione lineare uguale al vettore nullo e proviamo che allora i coefficienti della combinazione devono essere tutti nulli.
Supponiamo dunque di avere:

$$a_1(2v_1) + a_2(2v_2) + \cdots + a_n(2v_n) = 0.$$

Questo implica che sia:

$$(2a_1)v_1 + (2a_2)v_2 + \cdots + (2a_n)v_n = 0.$$

L'ultima equazione è una combinazione lineare dei vettori di S uguale al vettore nullo. Poichè S è un sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti, i coefficienti della combinazione devono essere tutti nulli, ovvero deve essere:

$$2a_i = 0, \qquad i = 1 \dots n,$$

e dunque

$$a_i = 0, \qquad i = 1 \dots n.$$

Abbiamo così mostrato che

$$a_1(2v_1) + a_2(2v_2) + \cdots + a_n(2v_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_i = 0, \quad i = 1 \dots n,$$

ovvero che l'unica combinazione lineare dei vettori di S' uguale al vettore nullo è quella i cui coefficienti siano tutti nulli.

Esercizio 33. *Determinare i valori del parametro reale q per i quali i tre vettori di R^4:*

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 1, 0, 1) \\ v_2 &= (q, 2, 1, 1) \\ v_3 &= (-1, 1, 1, 0) \end{aligned}$$

sono linearmente dipendenti. Per tali valori esprimere uno dei tre vettori come combinazione lineare degli altri due.

Soluzione. I vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente dipendenti se e solo se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & q & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

non ha rango massimo. Per determinare il rango di A riduciamola a gradino. Una possibile riduzione è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & q & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & q-1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -q \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A ha rango 3 per $q \neq 0$ e rango 2 per $q = 0$. Per $q = 0$ i vettori v_1, v_2 e v_3 sono allora linearmente dipendenti. Inoltre

$$v_1 = (1, 1, 0, 1), \quad v_2 = (0, 2, 1, 1) \quad \text{e} \quad v_3 = (-1, 1, 1, 0).$$

Si vede facilmente che v_2 è combinazione lineare di v_1 e v_3, infatti:

$$v_2 = v_1 + v_3.$$

Esercizio 34. *Determinare la dimensione e una base dei seguenti sottospazi di R^3:*

$$\begin{aligned} S_1 &= \mathrm{Span}\{(1, 1, 1), (1, 3, 5)\}; \\ S_2 &= \mathrm{Span}\{(0, 0, 1), (1, 2, -1), (-3, -6, -4)\}; \\ S_3 &= \mathrm{Span}\{(3, 4, 6), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}. \end{aligned}$$

SOLUZIONE. Il sottospazio S_1 è generato dai vettori $v_1 = (1,1,1)$ e $v_2 = (1,3,5)$, che sono linearmente indipendenti. Ne segue che $\dim(S_1) = 2$ e una base di S_1 è $\{v_1, v_2\}$.
Il sottospazio S_2 è generato dai vettori $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (1,2,-1)$ e $v_3 = (-3,-6,-4)$, che non sono indipendenti. Infatti:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

D'altra parte v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti pertanto $\dim(S_2) = 2$ e una base di S_2 è $\{v_1, v_2\}$.
Infine S_3 è generato dai vettori $v_1 = (3,4,6)$, $v_2 = (1,0,1)$ e $v_3 = (0,1,1)$. I tre vettori sono linearmente indipendenti perchè

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Allora la dimensione di S_3 è 3 e una base di S_3 è $\{v_1, v_2, v_3\}$.

ESERCIZIO 35. *Dati i vettori di R^4:*

$$\begin{aligned} v_1 &= (4,19,7,-1) \\ v_2 &= (0,2,4,-4) \\ v_3 &= (0,3,1,1) \\ v_4 &= (1,1,3,-5) \end{aligned}$$

sia V il sottospazio

$$V = \text{Span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$$

Determinare una base di V.

SOLUZIONE. La dimensione di V è uguale al rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 19 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Una possibile riduzione per righe della matrice A è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 19 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 1 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -5 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 19 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -16 & 4 & -19 \\ 0 & -74 & 22 & -94 \\ 0 & -24 & 8 & -32 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -16 & 4 & -19 \\ 0 & 0 & 56 & -98 \\ 0 & 0 & 32 & -56 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -5 \\ 0 & -16 & 4 & -19 \\ 0 & 0 & 56 & -98 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimensione di V è uguale a 3 . Inoltre i vettori v_1, v_2 e v_3 costituiscono una base per V. Per dimostrare l'ultima affermazione basta osservare che, dalla riduzione fatta sopra, segue che la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 19 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

ha rango 3. Un'altra scelta possibile per una base di V è $\{v_1, v_2, v_4\}$.

Esercizio 36. *Sia S il sottoinsieme di R^3*

$$S = \{(1,1,0),\ (0,1,1)\}.$$

Determinare i valori del parametro reale q per i quali

$$(1,1,q) \in \operatorname{Span} S.$$

Soluzione. Si tratta di trovare i valori del parametro q per i quali il sistema:

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ q \end{pmatrix}$$

ha soluzione.
Il sistema si riscrive:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x + y = 1 \\ y = q \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ y = q, \end{cases}$$

ed ha soluzione se e solo se $q = 0$.

Esercizio 37. *Siano dati i vettori di R^3:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ k-2 \\ k+4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k-2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ k-1 \end{pmatrix}.$$

(1) *Determinare, al variare del parametro reale k, la dimensione e una base del sottospazio V generato da v_1, v_2 e v_3.*
(2) *Determinare per quali valori del parametro reale k il vettore v_4 appartiene a V e, in tal caso, scrivere v_4 come combinazione lineare degli elementi di una base di V.*

Soluzione. Per determinare la dimensione di V verifichiamo se i vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Si tratta allora di determinare le soluzioni del sistema omogeneo

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0.$$

La matrice dei coefficienti del sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & k-2 & 2 \\ -1 & k+4 & k-2 \end{pmatrix},$$

che, ridotta a gradino, diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & k-2 & 2 \\ -1 & k+4 & k-2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & k+2 & 0 \\ 0 & k+2 & k-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}.$$

Per $k \neq -2, 1$ il sistema ammette solo la soluzione banale dunque i vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente indipendenti. Questo significa che per $k \neq -2, 1$ la dimensione di V è 3 (ovvero $V = R^3$) e una sua base è $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.
Se $k = -2$ o $k = 1$ invece i vettori v_1, v_2 e v_3 sono linearmente dipendenti dunque la dimensione di V è minore di 3.
Per $k = -2$ abbiamo:

$$v_1 = (1, 2, -1), \quad v_2 = (-2, -4, 2), \quad v_3 = (1, 2, -4).$$

I vettori v_1 e v_3 sono linearmente indipendenti perchè non sono proporzionali sicchè la dimensione di V è 2 e una sua base è, per esempio, $\mathcal{B} = \{v_1, v_3\}$. Un'altra scelta possibile per una base di V è l'insieme $\mathcal{B} = \{v_2, v_3\}$ mentre i vettori v_1 e v_2 non costituiscono una base di V perchè sono dipendenti (proporzionali).
Infine per $k = 1$ abbiamo

$$v_1 = (1, 2, -1), \quad v_2 = (-2, -1, 5), \quad v_3 = (1, 2, -1).$$

Di nuovo i vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti, la dimensione di V è 2 e una sua base è $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$.
Determiniamo ora i valori del parametro reale k per i quali il vettore v_4 è combinazione lineare dei primi tre.
Per $k \neq -2, 1$ abbiamo visto che V coincide con R^3 e $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di R^3. Allora per $k \neq -2, 1$ il vettore v_4 è sicuramente combinazione lineare di v_1, v_2, v_3. Per determinare i coefficienti della combinazione lineare risolviamo il sistema

$$xv_1 + yv_2 + zv_3 = v_4.$$

La matrice completa associata al sistema è :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & k-2 & 2 & 5 \\ -1 & k+4 & k-2 & k-1 \end{pmatrix},$$

che, ridotta a gradino, diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & k-2 & 2 & 5 \\ -1 & k+4 & k-2 & k-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & k+2 & 0 & -1 \\ 0 & k+2 & k-1 & k+2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & k+2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k-1 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Per $k \neq -2, 1$ abbiamo una unica soluzione

$$x = 2\frac{k^2 + k - 1}{(k-1)(k+2)}, \quad y = -\frac{1}{k+2}, \quad z = \frac{k+1}{k-1}.$$

Per $k = -2$ consideriamo la base $\{v_1, v_3\}$ di V. Di nuovo dobbiamo risolvere il sistema

$$xv_1 + yv_3 = v_4.$$

La matrice del sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

che, ridotta a gradino diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segue che il sistema non ha soluzioni ovvero v_4 non è combinazione degli elementi di una base di V ovvero v_4 non appartiene a V.
Per $k = 1$ consideriamo la base $\{v_1, v_2\}$ e risolviamo il sistema

$$xv_1 + yv_2 = v_4.$$

La matrice del sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

che, ridotta a gradino diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Come nel caso precedente si conclude che v_4 non appartiene a V.

Esercizio 38. *Determinare i valori del parametro q per cui la somma dei sottospazi di R^3:*

$$W = \langle \{(1,2,0), (q,1,1)\} \rangle \quad e \quad U = \{(x, x, -x) \mid x \in R\}$$

è una somma diretta.

Soluzione. La somma dei sottospazi W e U è diretta se e solo se

$$W \cap U = \{(0,0,0)\}.$$

Supponiamo esista un vettore v in $W \cap U$, sarà allora:

$$v = (a + bq, 2a + b, b) \quad \text{e} \quad v = (c, c, -c).$$

per certi a, b e c in R.
Allora deve anche essere:

$$\begin{cases} a + bq = c \\ 2a + b = c \\ b = -c \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} a = c \\ b = -c \\ qc = 0. \end{cases}$$

Se $q \neq 0$ troviamo che v deve essere il vettore nullo, mentre se $q = 0$ ogni vettore della forma $(c, c, -c)$ è nell'intersezione.

Riassumendo la somma di W e U è diretta se e solo se $q = 0$.

ESERCIZIO 39. *Determinare una base di R^3 rispetto alla quale il vettore* $(1, 1, 2)$ *ha componenti* $(-1, 1, 1)$.

SOLUZIONE. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di R^3, così
$$(1, 1, 2) = e_1 + e_2 + 2e_3.$$
Poniamo $b_1 = -e_1$, $b_2 = e_2$ e $b_3 = 2e_3$. È facile verificare che $\{b_1, b_2, b_3\}$ è ancora una base di R^3. Inoltre
$$(1, 1, 2) = b_1 + b_2 + b_3.$$

ESERCIZIO 40. *Provare che se $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ sono basi di due sottospazi W e W' di R^n tali che $W \cap W' = \{0\}$, allora $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ è base di $W \oplus W'$.*

SOLUZIONE. Indichiamo con $b_1, b_2, \dots b_n$ gli elementi di $\mathcal{B}$ e con $e_1, e_2, \dots e_m$ gli elementi di $\mathcal{B}'$.
Proviamo che $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}' = \{b_1, b_2, \dots b_n, e_1, e_2, \dots e_m\}$ genera $W \oplus W'$.
Sia w un vettore di $W \oplus W'$, allora $w = u + v$ con $u \in W$ e $v \in W'$. Poichè $\mathcal{B}$ è una base di W, sarà :
$$u = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i \qquad a_i \in R,$$
e, poichè $\mathcal{B}'$ è una base di W', sarà anche:
$$v = \sum_{j=0}^{m} c_j e_j \qquad c_j \in R.$$
Ne segue che :
$$w = u + v = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i + \sum_{j=0}^{m} c_j e_j,$$
sicchè $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ genera $W \oplus W'$.
Ora proviamo che i vettori di $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}'$ sono linearmente indipendenti. Supponiamo di avere una loro combinazione lineare uguale al vettore nullo:
$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i + \sum_{j=0}^{m} \mu_j e_j = 0, \qquad \lambda_i, \mu_j \in R.$$
Allora
$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i = \sum_{j=0}^{m} (-\mu_j) e_j,$$
dunque il vettore $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i$ appartiene a sia a W che a W'. Siccome la somma è diretta deve essere
$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i = 0.$$

D'altra parte $\mathcal{B}$ è una base di W, dunque $\lambda_i = 0$, per $i = 1, \dots n$. Ragionando nello stesso modo per il vettore $\sum_{j=0}^{m}(-\mu_j)e_j$, si trova che $\mu_j = 0$ per $j = 0, \dots m$.

Esercizio 41. *Date le matrici*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

provare che l'insieme $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ *è un insieme linearmente indipendente nello spazio delle matrici* 2×3 *a coefficienti reali.*

Soluzione. Nello spazio delle matrici 2×3 a coefficienti reali il vettore nullo è la matrice nulla. Per provare che l'insieme $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ è un insieme linearmente indipendente, supponiamo di avere una combinazione lineare dei suoi elementi uguale alla matrice nulla:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deve allora essere

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_2 - 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

che, ridotta a gradino, diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -46 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}.$$

Il sistema ammette una e una sola soluzione, necessariamente banale:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

ESERCIZIO 42. *Provare che le seguenti matrici*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono una base del sottospazio vettoriale delle matrici 2×2 *a coefficienti reali formato dalle matrici simmetriche.*

SOLUZIONE. Una matrice 2×2 simmetrica è della forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in R.$$

Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ generano il sottospazio delle matrici simmetriche perchè:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre sono linearmente indipendenti perchè l'uguaglianza:

$$x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

implica $x = y = z = 0$.

5. Applicazioni lineari

Esercizio 43. *Determinare quali delle seguenti applicazioni sono lineari:*

$$\begin{aligned}
&f_1 : R^2 \to R^3 &\qquad f_1(x, y) &= (x + y, 2x - y, y - x)\\
&f_2 : R^3 \to R^2 &\qquad f_2(a, b, c) &= (a + 2b - c, a - b - c)\\
&f_3 : R^2 \to R^2 &\qquad f_3(a, b) &= (a^2, a + b)\\
&f_4 : R^3 \to R^3 &\qquad f_4(x, y, z) &= (x, y, z) + (1, 0, 1)\\
&f_5 : R^3 \to R^3 &\qquad f_5(v) &= 2v\\
&f_6 : R^2 \to R^2 &\qquad f_6(x, y) &= (x - y, x + y + 1)
\end{aligned}$$

Soluzione. Si tratta di verificare se, per ogni scelta di (x, y), (z, w) in R^2 e λ, μ in R, risulta

$$f_1(\lambda(x, y) + \mu(z, w)) = \lambda f_1(x, y) + \mu f_1(z, w).$$

Ora

$$\begin{aligned}
&f_1(\lambda(x, y) + \mu(z, w)) = f_1(\lambda x + \mu z, \lambda y + \mu w)\\
&= (\lambda x + \mu z + \lambda y + \mu w, 2\lambda x + 2\mu z - \lambda y - \mu w, \lambda y + \mu w - \lambda x - \mu z)\\
&= \lambda(x + y, 2x - y, y - x) + \mu(z + w, 2z - w, w - z)\\
&= \lambda f_1(x, y) + \mu f_1(z, w).
\end{aligned}$$

Ne segue che f_1 è lineare.
In modo analogo si verifica che f_2 è lineare. Infatti per ogni (a, b, c) e (x, y, z) in R^3, per ogni λ e μ in R si ha:

$$\begin{aligned}
&f_2(\lambda(a, b, c) + \mu(x, y, z)) = f_2(\lambda a + \mu x, \lambda b + \mu y, \lambda c + \mu z)\\
&= (\lambda a + \mu x + 2\lambda b + 2\mu y - \lambda c - \mu z, \lambda a + \mu x - \lambda b - \mu y - \lambda c - \mu z)\\
&= \lambda(a + 2b - c, a - b - c) + \mu(x + 2y - z, x - y - z)\\
&= \lambda f_2(a, b, c) + \mu f_2(x, y, z).
\end{aligned}$$

L'applicazione f_3 non è lineare, per esempio perchè

$$f_3((1, 0) + (1, 1)) = f_3(2, 1) = (4, 3) \neq (1, 1) + (1, 2) = f_3(1, 0) + f_3(1, 1).$$

Anche l'applicazione f_4 non è lineare perchè se lo fosse dovrebbe mandare il vettore nullo in sè, mentre

$$f_4(0, 0, 0) = (1, 0, 1).$$

L'applicazione f_5 è un endomorfismo di R^3 infatti

$$f_5(\lambda v + \mu w) = 2\lambda v + 2\mu w = \lambda(2v) + \mu(2w) = \lambda f_5(v) + \mu f_5(w),$$

per ogni v, w in R^3 e per ogni λ, μ in R.
Infine l'applicazione f_6 non è lineare perchè

$$f_6(0, 0) = (0, 1).$$

Esercizio 44. *Sono dati i vettori di* R^3*:*

$$v_1 = (1,1,0) \quad v_2 = (1,0,1) \quad v_3 = (0,1,1).$$

Provare che esiste un unico endomorfismo $f : R^3 \to R^3$ *tale che*

$$f(v_1) = (0,1,1) \quad f(v_2) = (0,2,2) \quad e \quad v_3 \in \mathrm{Ker}(f).$$

Determinare una base di $\mathrm{Im}(f)$ *e* $\mathrm{Ker}(f)$ *e* $f(0,0,1)$*.*

Soluzione. Una applicazione lineare è univocamente determinata quando si conoscono le immagini degli elementi di una base del dominio.
Nel nostro caso i vettori v_1, v_2 e v_3 formano una base di R^3 perchè

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Sia f l'endomorfismo di R^3 definito da

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (0,1,1) \\ f(v_2) &= (0,2,2) \\ f(v_3) &= (0,0,0). \end{aligned}$$

L'applicazione f è completamente determinata perchè per ogni $v \in R^3$ sarà $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ per certi a_1, a_2, a_3 in R. Allora

$$f(v) = a_1f(v_1) + a_2f(v_2) + a_3f(v_3).$$

Inoltre f è univocamente determinata perchè se g è un altro endomorfismo di R^3 tale che

$$\begin{aligned} g(v_1) &= (0,1,1) \\ g(v_2) &= (0,2,2) \\ g(v_3) &= (0,0,0), \end{aligned}$$

allora per ogni $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ in R^3 riesce

$$f(v) = a_1f(v_1) + a_2f(v_2) + a_3f(v_3) = a_1g(v_1) + a_2g(v_2) + a_3g(v_3) = g(v),$$

sicchè $f \equiv g$.
Un sistema di generatori per l'immagine di f è l'insieme $\{f(v_1), f(v_2), f(v_3)\} = \{(0,1,1), (0,2,2), (0,0,0)\}$. È immediato verificare che $f(v_2)$ e $f(v_3)$ sono multipli di $f(v_1)$, pertanto una base di $\mathrm{Im}(f)$ è $\{(0,1,1)\}$.
Il nucleo di f è il sottospazio di R^3:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{v \in R^3 \ : \ f(v) = (0,0,0)\}.$$

Per determinarne una base osserviamo innanzitutto che $v_3 \in \mathrm{Ker}(f)$. Inoltre

$$f(2v_1 - v_2) = 2f(v_1) - f(v_2) = (0,0,0),$$

così anche il vettore $2v_1 - v_2 = (1,2,-1)$ appartiene a $\mathrm{Ker}(f)$. Siccome i vettori $2v_1 - v_2$ e v_3 sono linearmente indipendenti, formano una base del nucleo. Notiamo che $\mathrm{Ker}(f)$ non può avere dimensione 3 perchè altrimenti f sarebbe identicamente nulla.

Infine per determinare l'immagine di $v = (0,0,1)$ tramite f dobbiamo scrivere v in termini della base $\{v_1, v_2, v_3\}$.
Risulta

$$v = \frac{1}{2}(v_2 + v_3 - v_1),$$

così

$$f(0,0,1) = \frac{1}{2}(f(v_2) + f(v_3) - f(v_1)) = \frac{1}{2}((0,2,2) - (0,1,1)) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Esercizio 45. *Sia $F : R^3 \to R^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$F(x,y,z) = (-x + 2y + 3z, kx - 4y - 6z, x + kz)$$

Si determinino i sottospazi $\mathrm{Ker}(F)$ *e* $\mathrm{Im}(F)$*, se ne calcoli una base e si verifichi il teorema della nullità più rango, al variare del parametro reale k.*

Soluzione. Determiniamo la matrice associata a F rispetto alla base canonica di R^3. Si ha

$$F(1,0,0) = (-1, k, 1)$$
$$F(0,1,0) = (2, -4, 0)$$
$$F(0,0,1) = (3, -6, k),$$

dunque la matrice associata a F è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ k & -4 & -6 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

La dimensione di $\mathrm{Im}(F)$ è uguale al rango di A e dunque

$$\dim(\mathrm{Im}(F)) = \begin{cases} 3 & \text{se } k \neq 0, 2 \\ 2 & \text{se } k = 0, 2. \end{cases}$$

Per $k \neq 0, 2$ una base di $\mathrm{Im}(F)$ è

$$\{(-1, k, 1), (2, -4, 0), (3, -6, k)\}$$

mentre il nucleo di F è costituito dal solo vettore nullo.
Per $k = 0$ la matrice A diventa

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una base per l'immagine di F è costituita da due vettori colonna di A linearmente indipendenti, per esempio

$$\{(-1, 0, 1), (2, -4, 0)\}.$$

Il nucleo di F è costituito dai vettori (x, y, z) in R^3 tali che:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Risolvendo il sistema si trova:

$$\mathrm{Ker}(F) = \{(0, -3t, 2t) \ : \ t \in R\},$$

pertanto il nucleo di F ha dimensione 1 e una sua base è:

$$\{(0, -3, 2)\}.$$

Risulta verificato il teorema di nullità più rango perchè:

$$3 - 1 = \dim(R^3) - \dim(\mathrm{Ker}(F)) = \dim(\mathrm{Im}(F)) = 2.$$

Per $k = 2$ la matrice A diventa

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Di nuovo una base per l'immagine di F è costituita da due vettori colonna di A linearmente indipendenti, per esempio

$$\{(-1, 2, 1), (2, -4, 0)\}.$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

si trova:

$$\mathrm{Ker}(F) = \{(-4t, -5t, 2t) \ : \ t \in R\}.$$

Ne segue che il nucleo di F ha dimensione 1, sicchè risulta verificato il teorema di nullità più rango. Una base per $\mathrm{Ker}(F)$ è:

$$\{(-4, -5, 2)\}.$$

ESERCIZIO 46. *Sia $F : R^4 \to R^3$ l'applicazione lineare definita da*

$$F(x, y, z, w) = (x + ky + w, kx + 4y + 2w, x + z + w).$$

Si determinino i sottospazi $\mathrm{Ker}(F)$, $\mathrm{Im}(F)$, se ne calcoli una base e si verifichi il teorema della nullità più rango, al variare del parametro reale k.

SOLUZIONE. Scriviamo la matrice associata a F rispetto alle basi canoniche di R^4 e R^3. Si ha:

$$\begin{aligned} F(1, 0, 0, 0) &= (1, k, 1) \\ F(0, 1, 0, 0) &= (k, 4, 0) \\ F(0, 0, 1, 0) &= (0, 0, 1) \\ F(0, 0, 0, 1) &= (1, 2, 1). \end{aligned}$$

La matrice associata a F è allora la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ k & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per determinare il nucleo di F risolviamo il sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ k & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Una possibile riduzione dalla matrice dei coefficienti è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & k & 0 & 1 \\ k & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 & 1 \\ k & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -k & 2-k \\ 0 & k & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -k & 2-k \\ 0 & 0 & k^2-4 & k(k-2) \end{pmatrix}.$$

Ne segue che per $k \neq \pm 2$ il nucleo di F è il sottospazio :

$$\mathrm{Ker}(F) = \left\{ \left(-\frac{2}{k+2}t, -\frac{1}{k+2}t, -\frac{k}{k+2}t, t \right) \ : \ t \in R \right\}$$

Una base per $\mathrm{Ker}(F)$ è

$$\left\{ \left(-\frac{2}{k+2}, -\frac{1}{k+2}, -\frac{k}{k+2}, 1 \right) \right\},$$

e la dimensione del nucleo è pari a 1.
Per $k = 2$ troviamo

$$\mathrm{Ker}(F) = \{(-2t-s, t, 2t, s) \ : \ t, s \in R\},$$

sicchè $\mathrm{Ker}(F)$ ha dimensione 2. Una sua base si ottiene scegliendo la coppia (t, s) uguale a $(1, 0)$ e $(0, 1)$:

$$\{(-2, 1, 2, 0), (-1, 0, 0, 1)\}.$$

Infine per $k = -2$ il nucleo di F ha dimensione 1 ed è costituito dai vettori:

$$\mathrm{Ker}(F) = \{(2t, t - 2t, 0) \ : \ t \in R\}.$$

Una sua base è costituita dal vettore

$$(2, 1, -2, 0).$$

Determiniamo ora l'immagine di F.
Per $k \neq \pm 2$ la matrice A ha rango 3, inoltre i primi tre vettori colonna di A sono indipendenti. Una base di $\mathrm{Im}(F)$ è l'insieme

$$\{(1, k, 1), (k, 4, 0), (0, 0, 1)\}$$

e

$$\mathrm{Im}(F) = \{(\lambda + k\mu, \lambda k + 4\mu, \lambda + \eta) \ : \ \lambda, \mu, \eta \in R\}.$$

Per $k = -2$ la matrice A ha ancora rango 3. sono indipendenti il secondo, il terzo e il quarto vettore colonna di A sicchè una base di $\mathrm{Im}(F)$ è l'insieme:

$$\{(-2, 4, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 1)\}$$

e

$$\mathrm{Im}(F) = \{(-2\lambda + \eta, 4\lambda + 2\eta, \mu + \eta) \ : \ \lambda, \mu, \eta \in R\}.$$

Infine per $k = 2$ il rango di A è uguale a 2 sicchè $\dim(\mathrm{Im}(F)) = 2$.
Una base è:

$$\{(0,0,1),(1,2,1)\}$$

e

$$\mathrm{Im}(F) = \{(\mu, 2\mu, \lambda + \mu)\}.$$

In ultimo verifichiamo il teorema di nullità più rango.
Per $k \neq 2$ abbiamo trovato

$$4 - 1 = \dim(R^4) - \dim(\mathrm{Ker}(F)) = \dim(\mathrm{Im}(F)) = 3,$$

mentre per $k = 2$ abbiamo

$$4 - 2 = \dim(R^4) - \dim(\mathrm{Ker}(F)) = \dim(\mathrm{Im}(F)) = 2.$$

Esercizio 47. *Sia $F : R^3 \to R^2$ l'applicazione lineare definita da*

$$F(x, y, z) = (k^2x + y, kx + y - (k-1)z).$$

(1) *Trovare i valori di k per cui F non è suriettiva.*
(2) *Per ogni valore di k trovare una base di* $\mathrm{Im}(F)$ *e calcolare la dimensione di* $\mathrm{Ker}(F)$.

Soluzione. Scriviamo la matrice di F rispetto alle basi canoniche di R^3 e R^2.
Risulta:

$$\begin{aligned} F(1,0,0) &= (k^2, k)\\ F(0,1,0) &= (1,1)\\ F(0,0,1) &= (0, 1-k), \end{aligned}$$

sicchè la matrice associata a F è la matrice

$$A = \begin{bmatrix} k^2 & 1 & 0\\ k & 1 & 1-k \end{bmatrix}.$$

Poichè

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0\\ 1 & 1-k \end{bmatrix} = 1 - k$$

segue che

$$\dim(\mathrm{Im}(F)) = \text{rango } (A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k \neq 1\\ 1 & \text{se } k = 1 \end{cases}$$

L'applicazione F non è suriettiva per $k = 1$.
Un sistema di generatori per l'immagine di F è l'insieme

$$\{F(1,0,0), F(0,1,0), F(0,0,1)\} = \{(k^2, k), (1,1), (0, 1-k)\}.$$

Per $k \neq 1$ la dimensione di $\mathrm{Im}(F)$ è 2 e abbiamo visto che i vettori $(1,1)$ e $(0, 1-k)$ sono linearemente indipendenti sicchè una base di $\mathrm{Im}(F)$ è

$$\mathcal{B} = \{(1,1), (0, 1-k)\}.$$

Per $k = 1$ invece l'immagine di F è un sottospazio di dimensione 1 e una base è

$$\mathcal{B} = \{(1,1)\}.$$

Infine, utilizzando il teorema di nullità più rango, calcoliamo la dimensione del nucleo di F. Risulta

$$\dim(\mathrm{Ker}(F)) = \dim(R^3) - \dim(\mathrm{Im}(F))$$

ovvero

$$\dim(\mathrm{Ker}(F)) = \begin{cases} 1 & \text{se } k \neq 1 \\ 2 & \text{se } k = 1. \end{cases}$$

Esercizio 48. *Trovare per quali valori del parametro reale k l'applicazione lineare $F : R^3 \to R^3$, definita da*

$$F(x, y, z) = (x + 2y, 2x + ky + z, -x + 2y + kz)$$

ammette inversa e calcolare esplicitamente l'inversa per uno di tali valori.

Soluzione. Determiniamo l'azione di F rispetto alla base canonica di R^3. Risulta

$$F(1, 0, 0) = (1, 2, -1)$$
$$F(0, 1, 0) = (2, k, 2)$$
$$F(0, 0, 1) = (0, 1, k).$$

La matrice associata a F rispetto alla base canonica è la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & k & 1 \\ -1 & 2 & k \end{bmatrix}.$$

Ora $\det(A) = k^2 - 4k - 4$ sicchè il rango di A è 3 per k diverso da $2 \pm 2\sqrt{2}$. D'altra parte F è invertibile se e solo se è iniettiva e suriettiva ovvero se e solo se $\mathrm{Im}(F) = R^3$. Ne segue che F è invertibile per $k \neq 2 \pm 2\sqrt{2}$.
La matrice associata all'applicazione inversa $F-1 : R^3 \to R^3$ rispetto alla base canonica è la matrice

$$A^{-1} = \frac{1}{k^2 - 4k - 4} \begin{bmatrix} k^2 - 2 & -2k & 2 \\ -2k - 1 & k & -1 \\ k + 4 & -4 & k - 4 \end{bmatrix}.$$

L'applicazione F^{-1} è così definita da

$$F^{-1}(1, 0, 0) = \left(\frac{k^2 - 2}{k^2 - 4k - 4}, \frac{-2k - 1}{k^2 - 4k - 4}, \frac{k + 4}{k^2 - 4k - 4} \right)$$

$$F^{-1}(0, 1, 0) = \left(-\frac{2k}{k^2 - 4k - 4}, \frac{k}{k^2 - 4k - 4}, -\frac{4}{k^2 - 4k - 4} \right)$$

$$F^{-1}(0, 0, 1) = \left(\frac{2}{k^2 - 4k - 4}, -\frac{1}{k^2 - 4k - 4}, \frac{k - 4}{k^2 - 4k - 4} \right).$$

Esercizio 49. *Sia* $f : R^3 \to R^3$ *definita da:*
$$f(a, b, c) = (a + b, 2c, a^2 - b^2).$$
Provare che f *non è lineare. Sia* V *il sottospazio di* R^3 *costituito dalle terne* (x, x, z) *al variare di* x *e* z *in* R. *Provare che la restrizione di* f *a* V *è lineare e determinarne immagine e nucleo.*

Soluzione. Per provare che f non è lineare basta trovare v_1 e v_2 in R^3 tali che
$$f(v_1 + v_2) \neq f(v_1) + f(v_2).$$
Per esempio se $v_1 = (1, 2, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 2)$ risulta
$$(4, 4, -8) = f(1, 3, 2) = f((1, 2, 0) + (0, 1, 2)) \neq f(1, 2, 0) + f(0, 1, 2) = (4, 4, -4).$$
Proviamo invece che la restrizione f_V di f a V è lineare. Per ogni $(x, x, z), (y, y, w)$ in V e per ogni λ, μ in R risulta
$$\begin{aligned} &f(\lambda(x, x, z) + \mu(y, y, w)) = f(\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y, \lambda z + \mu w) \\ &= (2\lambda x + 2\mu y, 2\lambda z + 2\mu w, 0) \\ &= \lambda(2x, 2z, 0) + \mu(2y, 2w, 0) \\ &= \lambda f(x, x, z) + \mu f(y, y, w). \end{aligned}$$
Il sottospazio V ha dimensione 2 perchè ogni suo elemento è combinazione lineare dei vettori $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1)$:
$$(x, x, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1),$$
e i vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti.
L'immagine di f_V è così generata dai vettori
$$f(1, 1, 0) = (2, 0, 0) \quad \text{e} \quad f(0, 0, 1) = (0, 2, 0).$$
Segue che
$$\mathrm{Im}(f_V) = \{(x, y, 0) \ : \ x, y \in R\}.$$
Dal teorema di nullità più rango abbiamo:
$$2 - 2 = \dim(V) - \dim(\mathrm{Im}(f_V)) = \dim(\mathrm{Ker}(f_V))$$
sicchè
$$\mathrm{Ker}(f_V) = \{(0, 0, 0)\}.$$

Esercizio 50. *Sia* $h : R^3 \to R^3$ *un endomorfismo tale che* $h(1, 1, 0) = (0, 0, 1)$, $h(1, 0, 2) = (0, q, 1)$ *e* $h(-1, 0, 0) = (2, 1, 1)$, *con* $q \in R$. *Calcolare* $h(1, 0, 0)$. *Determinare i valori di* q *per i quali* h *è invertibile. Per quali valori di* q *risulta* $h^{-1}(2, 1, 3) \neq \emptyset$*?*

Soluzione. Innanzitutto verifichiamo che h è univocamente definita. Si tratta di verificare che i vettori $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ e $v_3 = (-1, 0, 0)$ formano una base di R^3. Risulta
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

sicchè $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di R^3.
Per la linearità di h abbiamo

$$h(1,0,0) = h(-v_3) = -h(v_3) = (-2,-1,-1).$$

Scriviamo la matrice, A, associata ad h rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base canonica nel codominio.
Risulta:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & q & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I valori del parametro q per i quali l'endomorfismo è invertibile sono tutti e soli i valori del parametro q per i quali è $\mathrm{Im}(h) = R^3$.
Poichè $\det(A) = -2q$, l'applicazione h è invertibile se e solo se $q \neq 0$.
Infine $h^{-1}(2,1,3)$ è sicuramente non vuota se h è suriettiva (anzi siccome h è un endomorfismo in questo caso contiene esattamente un vettore del dominio), cioè per $q \neq 0$.
Per $q = 0$, abbiamo

$$\mathrm{Im}(h) = \langle \{h(1,1,0), h(1,0,2), h(-1,0,0)\} \rangle = \langle \{(0,0,1), (2,1,1)\} \rangle .$$

Il vettore $(2,1,3)$ appartiene a l'immagine di h, ovvero $h^{-1}(2,1,3) \neq \emptyset$, se e solo se esistono α e β in R tali che

$$\alpha(0,0,1) + \beta(2,1,1) = (2,1,3).$$

L'uguaglianza vettoriale appena scritta è soddisfatta per $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.
In conclusione $h^{-1}(2,1,3) \neq \emptyset$ per ogni valore del parametro q.

Esercizio 51. *Sia $f : R^4 \to R^4$ l'applicazione lineare definita da:*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1 + \alpha x_3, x_1 + x_2 + x_3 + x_4, -\alpha x_1 - x_2 + x_4, \alpha x_4).$$

Determinare la dimensione dell'immagine di f al variare del parametro reale α.

Soluzione. La matrice associata a f rispetto alle basi canoniche in R^4 è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\alpha & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Per determinare la dimensione dell'immagine di f determiniamo il rango di A.

Una possibile riduzione a gradino della matrice A è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & \alpha-3 & -3 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & \alpha-3 & -3 \\ 0 & 0 & \alpha^2-\alpha+3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Segue allora che

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \text{rango } (A) = \begin{cases} 4 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 3 & \text{se } \alpha = 0. \end{cases}$$

Esercizio 52. *Sia $g : R^3 \to R^3$ l'applicazione di matrice, rispetto alle basi canoniche:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Verificare che è un isomorfismo. Calcolare g^{-1}.

Soluzione. Per verificare che l'applicazione g sia un isomorfismo bisogna provare che è suriettiva e iniettiva. D'altra parte g è un endomorfismo dunque basta provarne la suriettività.
Risulta

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10,$$

sicchè $\mathrm{Im}(g) = R^3$.
La matrice associata a g^{-1} rispetto alle basi canoniche è la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 53. *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

determinare una matrice B tale che il prodotto BA sia la matrice nulla.

Soluzione. Innanzitutto osserviamo che una matrice B non nulla tale che BA sia la matrice nulla esiste perchè $\det(A) = 0$.
Guardiamo A come la matrice di un endomorfismo $f : R^3 \to R^3$ rispetto alle basi canoniche. Determiniamo l'immagine e il nucleo di f .

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(f) &= \left\{ (x, y, z) \in R^3 \ : \ \begin{cases} x + z = 0 \\ x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \left\{ (x, y, z) \in R^3 \ : \ \begin{cases} x = -y \\ z = y \end{cases} \right\}.\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Span}\{(-1, 1, 1)\}.$$

L'immagine di f è generata dai vettori $(1, 1, 0)$, $(0, 1, -1)$ e $(1, 0, 1)$. Il primo e il terzo sono linearmente indipendenti e formano una base per $\mathrm{Im}(f)$:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}.$$

Abbiamo ottenuto una base di R^3

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (-1, 1, 1)\}.$$

Definiamo un endomorfismo g di R^3 in modo che

$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g).$$

Rispetto alla base $\mathcal{B}$ definiamo

$$g(v_1) = (0, 0, 0) = g(v_2) \quad \text{e} \quad g(v_3) = v,$$

dove v è un qualsiasi vettore di R^3. Scriviamo allora $v = (3a, 3b, 3c)$ per certi a, b e c in R.
Determiniamo ora la matrice, B, dell'endomorfismo g rispetto alla base canonica. Risulta:

$$\begin{aligned}(1, 0, 0) &= \frac{1}{3}(v_1 + v_2 - v_3) \\ (0, 1, 0) &= \frac{1}{3}(2v_1 - v_2 + v_3) \\ (0, 0, 1) &= \frac{1}{3}(-v_1 + 2v_2 + v_3),\end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned}g(1, 0, 0) &= \frac{1}{3}(g(v_1) + g(v_2) - g(v_3)) = (-a, -b, -c) \\ g(0, 1, 0) &= \frac{1}{3}(2g(v_1) - g(v_2) + g(v_3)) = (a, b, c) \\ g(0, 0, 1) &= \frac{1}{3}(-g(v_1) + 2g(v_2) + g(v_3)) = (a, b, c).\end{aligned}$$

La matrice B è la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -a & a & a \\ -b & b & b \\ -c & c & c \end{pmatrix}.$$

6. Geometria affine e metrica

Esercizio 54. *Determinare un'equazione parametrica e un'equazione cartesiana delle seguenti rette:*
r: passante per i punti $P_1 = (1, 0, 2)$ e $P_2 = (-1, 2, 0)$,
s: parallela alla retta r e passante per il punto $O = (0, 0, 0)$.

Soluzione. Se $P = (p_1, p_2, p_3)$ e $Q = (q_1, q_2, q_3)$ sono due punti distinti dello spazio, le equazioni:

$$\begin{cases} x &= p_1 + t(q_1 - p_1) \\ y &= p_2 + t(q_2 - p_2) \\ z &= p_3 + t(q_3 - p_3), \quad t \in R, \end{cases}$$

sono equazioni parametriche della retta passante per P e Q.
Nel nostro caso diventano

$$r : \begin{cases} x &= 1 - 2t \\ y &= 2t \\ z &= 2 - 2t, \quad t \in R. \end{cases}$$

Una retta dello spazio ammette rappresentazione cartesiana come intersezione di due piani. Le equazioni cartesiane si ottengono da quelle parametriche eliminando il parametro.
Nel caso considerato sostituendo l'equazione $2t = y$ in $x = 1 - 2t$ e $z = 2 - 2t$ si ottiene:

$$r : \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2. \end{cases}$$

La retta s è parallela al vettore $P_1P_2 = (-2, 2, -2)$ e passa per l'origine.
L'equazione

$$P = O + \lambda P_1P_2$$

dove $P = (x, y, z)$ è un generico punto della retta s e $\lambda \in R$, è una rappresentazione parametrica vettoriale di s.
L'equazione vettoriale equivale alle equazioni parametriche scalari

$$s : \begin{cases} x &= -2\lambda \\ y &= 2\lambda \\ z &= -2\lambda, \quad \lambda \in R. \end{cases}$$

Eliminando il parametro si trovano le equazioni cartesiane di s:

$$s : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0. \end{cases}$$

Esercizio 55. *Determinare un'equazione parametrica della retta di equazioni cartesiane:*

$$\begin{cases} 2x - z + 4 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE. Data una retta con equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = c_1 \\ b_1x + b_2y + b_3z = c_2 \end{cases}$$

siano

$$l = \det \begin{bmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{bmatrix}, \quad m = -\det \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad n = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Il vettore (l, m, n) è allora un vettore direttore della retta r.
Nel nostro caso risulta $(l, m, n) = (-1, -5, -2)$. Inoltre le equazioni cartesiane di r si possono riscrivere come

$$\begin{cases} z &= 2x + 4 \\ y &= x + 2z - 1 = 5x + 7, \end{cases}$$

sicchè attribuendo un valore arbitrario ad x, ad esempio 0, si ottengono le coordinate di un punto della retta. Con la scelta fatta si trova $(0, 7, 4)$.
Infine le equazioni

$$\begin{cases} x &= -t \\ y &= 7 - 5t \\ z &= 4 - 2t, \quad t \in R, \end{cases}$$

sono equazioni parametriche della retta r.

ESERCIZIO 56. *Determinare un'equazione parametrica e un'equazione cartesiana della retta passante per il punto $P = (0, 1, 2)$ e di vettore direttore $v = (2, 2, -1)$.*

SOLUZIONE. Una rappresentazione parametrica della retta per P avente vettore direttore v è:

$$\begin{cases} x &= 2t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= 2 - t, \quad t \in R. \end{cases}$$

Eliminando il parametro otteniamo le equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x + 2z = 4 \\ y + 2z = 5. \end{cases}$$

ESERCIZIO 57. *Determinare un'equazione (parametrica o cartesiana) del piano passante per i tre punti $P_1 = (0, 1, 0)$, $P_2 = (-1, 1, 0)$ e $P_3 = (0, 0, 2)$.*

SOLUZIONE. Le equazioni parametriche del piano pasante per i tre punti $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ e $R = (r_1, r_2, r_3)$ sono

$$\begin{cases} x &= p_1 + t(q_1 - p_1) + s(r_1 - p_1) \\ y &= p_2 + t(q_2 - p_2) + s(r_2 - p_2) \\ z &= p_3 + t(q_3 - p_3) + s(r_3 - p_3), \quad t, s \in R. \end{cases}$$

Nel nostro caso diventano

$$\begin{cases} x & = -t \\ y & = 1 - s \\ z & = 2s, \quad t, s \in R. \end{cases}$$

Eliminando i parametri si ottiene una equazione cartesiana del piano:

$$2y + z = 2.$$

Esercizio 58. *Determinare un'equazione parametrica e un'equazione cartesiana dei seguenti piani:*
π_1*: passante per* $P_1 = (1, 1, 1)$ *e contenente la retta*

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -t \end{cases}$$

π_2*: passante per i tre punti* $P_1 = (1, 0, 0)$*,* $P_2 = (2, -1, -3)$ *e* $P_3 = (0, 2, 1)$*.*

Soluzione. Per determinare un'equazione cartesiana dal piano π_1 consideriamo il fascio di piani di centro la retta r e imponiamo il passaggio per il punto P_1.
La retta r ha equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ y + z + 1 = 0, \end{cases}$$

e il generico piano del fascio di centro r ha equazione

$$a(x + 2z - 1) + b(y + z + 1) = 0$$

con a e b in R non entrambi nulli.
Affinchè un piano del fascio passi per P_1 deve essere

$$2a + 3b = 0$$

da cui

$$a = -3 \quad b = 2.$$

L'equazione cartesiana del piano π_1 è allora

$$\pi_1 : 3x - 2y + 4z = 5.$$

Per determinare una equazione parametrica di π_1 calcoliamo le coordinate di due punti distinti della retta r. Per $t = 0$ troviamo il punto $P_2 = (1, -1, 0)$ e per $t = -1$ il punto $P_3 = (-1, -2, 1)$.
Allora π_1 è determinato dal passaggio per P_1, P_2 e P_3 e quindi:

$$\begin{cases} x & = 1 - 2\mu \\ y & = 1 - 2\lambda - 3\mu \\ z & = 1 - \lambda, \quad \lambda, \mu \in R. \end{cases}$$

Un'equazione parametrica di π_2 è

$$\pi_2 : \begin{cases} x &= 1 + t - s \\ y &= -t + 2s \\ z &= -3t + s, \quad s, t \in R. \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ottiene

$$\begin{cases} t = y + 2x - 2 \\ s = x + y - 1 \end{cases}$$

che, sostituite nella terza, forniscono

$$\pi_2 : 5x + 2y + z = 5.$$

Esercizio 59. *Determinare i valori del parametro reale k per i quali le rette*

$$r : x + ky - 2 = 0$$
$$s : 2x - ky + k = 0$$

sono incidenti, parallele o coincidenti.

Soluzione. Studiamo le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + ky = 2 \\ 2x - ky = -k. \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti ha determinante $-3k$ dunque per $k \neq 0$ il sistema ammette una e una sola soluzione. Segue che in questo caso le due rette sono incidenti.
Per $k = 0$ le rette hanno equazione:

$$r : x = 2$$
$$s : x = 0$$

da cui si vede facilmente che le due rette sono parallele (e distinte).

Esercizio 60. *Dati i tre punti $P_1 = (1, 0, 2)$, $P_2 = (2, 1, -1)$ e $P_3 = (0, 1, 1)$ e la retta*

$$r : \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

Determinare:

(1) *un'equazione cartesiana e l'equazione parametrica del piano π passante per P_1, P_2 e P_3.*
(2) *se r e π sono incidenti, e in tale caso trovare il loro punto di intersezione.*

Soluzione. Il piano π ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x &= 1 + t - s \\ y &= t + s \\ z &= 2 - 3t - s, \quad s, t \in R, \end{cases}$$

e equazione cartesiana

$$\pi : x + 2y + z = 3.$$

Per determinare se π ed r sono incidenti guardiamo alle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + y - z = 2 \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$$

La matrice completa associata al sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

che, ridotta a gradino, diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Segue che il sistema non ha soluzioni dunque la retta è parallela al piano e non è contenuta in esso.

Esercizio 61. *Dato il piano $\pi : -y + z + 3 = 0$ determinare la retta parallela all'asse x e giacente su π.*

Soluzione. L'asse delle x ha equazione cartesiana

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Il fascio di piani per l'asse delle x ha equazione

$$ay + bz = 0$$

per a e b in R non entrambi nulli.
La retta cercata si determina come intersezione tra il piano π e il piano del fascio ortogonale a π. Quest'ultimo è determinato dalla condizione

$$b - a = 0 \quad \text{ovvero} \quad a = b,$$

dunque ha equazione

$$y + z = 0.$$

La retta cercata è allora

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ -y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 62. *Determinare i valori del parametro reale k per i quali la retta r di equazioni:*

$$r : \begin{cases} x = kt \\ y = -kt + 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

è ortogonale o parallela al piano, π, di equazione

$$\pi: \; 3x - y + z + 1 = 0.$$

Soluzione. La retta r ha vettore direttore il vettore $(k, -k, 0)$ dunque è ortogonale al piano π se e solo se $(k, -k, 0)$ è un multiplo non nullo del vettore $(3, -1, 1)$.
D'altra parte $(-k, k, 0) = \rho(3, -1, 1)$ se e solo se $\rho = 0$ quindi non esiste alcun valore di k per il quale r è ortogonale a π.
La retta r è invece parallela a π se e solo se

$$(k, -k, 0) \cdot (3, -1, 1) = 4k = 0$$

ovvero se e solo se $k = 0$. D'altra parte per $k = 0$ l'equazione di r si riduce ad un punto sicchè questo valore non è accettabile.

Esercizio 63. *Determinare la proiezione ortogonale s della retta di equazioni*

$$r: \begin{cases} -x - y + z + 1 = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases}$$

sul piano π di equazione $3x + y - z - 1 = 0$.

Soluzione. Il fascio di piani per r ha equazione

$$a(-x - y + z + 1) + b(2x - z - 2) = 0, \qquad a, b \in R,$$

ovvero

$$(2b - a)x - ay + (a - b)z + a - 2b = 0, \qquad a, b \in R.$$

Il piano π_1 del fascio ortogonale a π si determina tramite la condizione

$$(2b - a, -a, a - b) \cdot (3, 1, -1) = 0.$$

Si ottiene allora

$$7b - 5a = 0 \quad \text{cioè} \quad a = 7, \; b = 5.$$

Il piano π_1 ha dunque equazione

$$3x - 7y + 2z = 3.$$

La proiezione ortogonale s di r su π si ottiene come intersezione dei piani π e π_1:

$$\begin{cases} 3x + y - z - 1 = 0 \\ 3x - 7y + 2z = 3. \end{cases}$$

Esercizio 64. *Fra tutti i piani passanti per la retta r di equazioni:*

$$r: \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

determinare quelli ortogonali al piano $\gamma: \; x + y + z - 4 = 0$ e quelli ortogonali all'asse y.

Soluzione. Il fascio di piani per r ha equazione

$$a(x-y+1)+b(x+y-z)=0, \qquad a,b\in R,$$

ovvero

$$(a+b)x+(b-a)y-bz+a=0, \qquad a,b\in R.$$

Un piano del fascio è ortogonale a γ se e solo se

$$(a+b,b-a,-b)\cdot(1,1,1)=0.$$

Si ottiene allora che $b=0$ e dunque il piano

$$\pi : x-y+1=0$$

è ortogonale a γ.
Inoltre un piano del fascio per r è ortogonale all'asse delle y se e solo se il vettore $(a+b,b-a,-b)$ è un multiplo non nullo del vettore $(0,1,0)$. D'altra parte

$$(a+b,b-a,-b)=\rho(0,1,0)$$

se e solo se $\rho=0=a=b$ dunque nessun piano del fascio è ortogonale all'asse y.

Esercizio 65. *Determinare gli angoli formati dalle rette di equazioni parametriche:*

$$r : \begin{cases} x=-3t \\ y=-t-1 \\ z=t+1 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x=2 \\ y=2s-2 \\ z=s+1. \end{cases}$$

Soluzione. La retta r ha vettore direttore $(-3,-1,1)$ mentre la retta s ha vettore direttore $(0,2,1)$.
Il coseno dell'angolo formato dalle due rette è

$$\cos\widehat{rs}=\frac{(-3,-1,1)\cdot(0,2,1)}{||(-3,-1,1)||\cdot||(0,2,1)||}=-\frac{1}{\sqrt{55}}.$$

Segue che

$$\widehat{rs}=\arccos(-\frac{1}{\sqrt{55}}).$$

Esercizio 66. *Determinare, al variare del parametro reale k, la posizione reciproca delle rette:*

$$r : \begin{cases} x+ky-2z=0 \\ x+y+z-k=0 \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x+y-2z=0 \\ -x+ky-2=0. \end{cases}$$

Soluzione. Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x+ky-2z=0 \\ x+y+z-k=0 \\ x+y-2z=0 \\ -x+ky-2=0. \end{cases}$$

La matrice completa associata al sistema è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ -1 & k & 0 & 2 \\ 1 & k & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riducendola, parzialmente a gradino si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ -1 & k & 0 & 2 \\ 1 & k & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & k+1 & -2 & 2 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & k \end{pmatrix}.$$

Per $k = 1$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

e, poichè le matrici incompleta e completa hanno entrambe rango 3, il sistema ammette una e una sola soluzione. Segue che in questo caso le rette sono incidenti. Per $k \neq 1$ possiamo ultimare la riduzione a gradino

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & k \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & k \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & k \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k+3 \end{pmatrix}.$$

Per $k \neq -3$ la matrice completa ha rango 4 e le due rette sono sghembe. Per $k = -3$ la matrice completa diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e, di nuovo, le rette sono incidenti.

Esercizio 67. *Date le rette*

$$r : \begin{cases} x + 2y + 5z = 5 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + 2z = 3 \\ y + z = 3. \end{cases}$$

calcolare la distanza tra r ed s.

SOLUZIONE. L'equazione di r si può riscrivere come

$$\begin{cases} x & = 1 - z \\ y & = 2 - 2z, \end{cases}$$

da cui, scegliendo per esempio $z = 0$, si trova che il punto $P = (1, 2, 0)$ appartiene ad r.
Consideriamo ora il fascio di piani per s:

$$a(x + 2z - 3) + b(y + z - 3) = 0, \qquad a, b \in R,$$

ovvero

$$ax + by + (2a + b)z - 3a - 3b = 0, \qquad a, b \in R.$$

Determiniamo il piano del fascio parallelo ad r. La retta r ha vettore direttore $(2, 4, -2)$ dunque imponiamo la condizione

$$(a, b, 2a + b) \cdot (2, 4, -2) = 0.$$

Si ottiene che deve essere $a = b$ e dunque il piano

$$\pi : x + y + 3z = 6$$

contiene s ed è parallelo ad r.
Allora

$$d(r, s) = d(P, \pi) = \frac{|1 + 2 - 6|}{\sqrt{9 + 1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{11}}.$$

ESERCIZIO 68. *In R^2 siano $y = (y_1, y_2)$ e $x = (x_1, x_2)$. Verificare se l'applicazione*

$$\cdot : R^2 \times R^2 \to R$$

definita da

$$y \cdot x = 2x_1y_1 + 3x_2y_2$$

è un prodotto scalare.

SOLUZIONE. Risulta

$$\begin{aligned} &(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = 2a_1b_1 + 3a_2b_2 = (b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2), \\ &(a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2) = 2a_1^2 + 3a_2^2 \geq 0, \\ &(a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2) = 0 \iff 2a_1^2 + 3a_2^2 = 0 \iff a_1 = 0, a_2 = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\lambda(a_1, a_2) + (b_1, b_2)) \cdot (c_1, c_2) &= 2(\lambda a_1 + b_1)c_1 + 3(\lambda a_2 + b_2)c_2 \\ &= \lambda(2a_1c_1 + 3a_2c_2) + 2b_1c_1 + 3b_2c_2 \\ &= \lambda(a_1, a_2) \cdot (c_1, c_2) + (b_1, b_2) \cdot (c_1, c_2), \end{aligned}$$

per ogni $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ e (c_1, c_2) in R^2 e per ogni $\lambda \in R$.

7. Diagonalizzazione di endomorfismi

ESERCIZIO 69. *Determinare gli autovalori di una matrice quadrata triangolare superiore.*

SOLUZIONE. Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

una matrice $n \times n$ triangolare superiore.
Il polinomio caratteristico di A è il determinante di

$$A - xI = \begin{pmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} - x \end{pmatrix}.$$

Poichè $A - xI$ è ancora una matrice triangolare superiore il suo determinante è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale, ovvero:

$$p(x) = \det(A - xI) = (a_{11} - x)(a_{22} - x) \cdots (a_{nn} - x).$$

Gli autovalori di A sono le radici di $p(x)$ ovvero gli elementi sulla sua diagonale principale:

$$a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}.$$

Allo stesso risultato si perviene se la matrice è diagonale inferiore ovvero della forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ESERCIZIO 70. *Sia f l'endomorfismo di R^3 tale che $f(1,2,1) = (1,3,3)$, $(1,1,0) \in \mathrm{Ker}\,(f)$ e $(0,1,2)$ è un autovettore relativo all'autovalore 1. Discutere la diagonalizzabilità di f.*

SOLUZIONE. I vettori $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,1,0)$ e $v_3 = (0,1,2)$ formano una base di R^3. Inoltre si ha

$$f(v_1) = v_1 + v_3, \quad f(v_2) = 0 \quad \text{e} \quad f(v_3) = v_3.$$

Scegliendo la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ nel dominio e nel codominio la matrice associata ad f è :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A è triangolare inferiore sicchè i suoi autovalori sono gli elementi sulla diagonale principale. Segue che A ammette l'autovalore 1 con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore 0 con molteplicità algebrica 1.

Il vettore v_2 è un autovettore relativo all'autovalore 0 sicchè il relativo autospazio, V_0, è generato da v_2:

$$V_0 = \text{Span}\{(1, 1, 0)\}.$$

Il vettore v_3 è un autovettore relativo all'autovalore 1. D'altra parte l'autospazio, V_1, relativo all'autovettore 1 è il nucleo di $A - I$.
Ora

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice $A - I$ ha rango due sicchè il suo nucleo ha dimensione 1.
Segue che

$$V_1 = \text{Span}\{v_3\}$$

e pertanto f non è diagonalizzabile.

Esercizio 71. *Sia A la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) *Determinare autovalori e autospazi di A.*
(2) *Determinare, se possibile, una base di autovettori.*

Verificare che la matrice è radice del suo polinomio caratteristico.

Soluzione. La matrice A è triangolare inferiore sicchè i suoi autovalori sono gli elementi sulla diagonale principale.
La matrice A ammette allora l'autovalore 1 con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore 2 con molteplicità algebrica 1.
L'autospazio relativo all'autovalore 1 è il nucleo della matrice :

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ovvero

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x, y, z) \in R^3 : x + y + z = 0\} \\ &= \{(-s - t, t, s) : s, t \in R\} \\ &= \text{Span}\{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0)\}. \end{aligned}$$

Poichè la dimensione di V_1 è 2 (e la dimensione di V_2 è necessariamente 1) possiamo dedurre che A è diagonalizzabile.
Infine l'autospazio relativo all'autovalore 2 è il nucleo della matrice

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e pertanto

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x, y, z) \in R^3 : x = 0 \quad \text{e} \quad y = 0\} \\ &= \{(0, 0, t) : t \in R\} \\ &= \text{Span}\{(0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Infine una base di autovettori si ottiene come unione delle basi dei due autospazi:

$$\mathcal{B} = \{(-1, 0, 1), (-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

ESERCIZIO 72. *Date le matrici:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) *Determinare autovalori e autospazi di A e B rispettivamente.*
(2) *Determinare, se possibile, una base di autovettori.*

SOLUZIONE. Il polinomio caratteristico della matrice A è:

$$p(x) = -(x + 2)^2(x - 4),$$

sicchè la matrice A ammette l'autovalore -2 con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore 4 con molteplicità algebrica 1.
L'autospazio relativo all'autovalore -2 è il nucleo di

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\begin{aligned} V_{-2} &= \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ x - y + z = 0\} \\ &= \{(t - s, t, s) \ : \ t, s \in R\} \\ &= \text{Span}\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Poichè V_{-2} ha dimensione 2 la matrice è diagonalizzabile.
L'autospazio relativo all'autovalore 4 è il nucleo di

$$A - 4I = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix},$$

pertanto

$$\begin{aligned} V_4 &= \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ x + y - z = 0 \quad \text{e} \quad 2y - z = 0\} \\ &= \{(t, t, 2t) \ : \ t \in R\} \\ &= \text{Span}\{(1, 1, 2)\}. \end{aligned}$$

Infine una base di R^3 formata da autovettori di A è, per esempio, l'insieme:

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (1, 1, 2)\}.$$

Il polinomio caratteristico della matrice B è:

$$p(x) = -(x+2)^2(x-4),$$

sicchè anche la matrice B ammette l'autovalore -2 con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore 4 con molteplicità algebrica 1.
L'autospazio relativo all'autovalore -2 è il nucleo della matrice

$$B + 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

che, ridotta a gradino, diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} V_{-2} &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad z = 0\} \\ &= \{(t,t,0) \ : \ t \in R\} \\ &= \text{Span}\{(1,1,0)\}. \end{aligned}$$

La matrice B non è quindi diagonalizzabile perchè la dimensione di V_{-2} è 1.
Infine determiniamo l'autospazio relativo all'autovalore 4. Si tratta di determinare il nucleo della matrice:

$$B - 4I = \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix},$$

che, ridotta a gradino, diventa:

$$\begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'autospazio relativo a 4 è allora il sottospazio:

$$\begin{aligned} V_4 &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ -7x + y - z = 0 \quad \text{e} \quad y - z = 0\} \\ &= \{(0,t,t) \ : \ t \in R\} \\ &= \text{Span}\{(0,1,1)\}. \end{aligned}$$

Infine poichè B non è diagonalizzabile non si può determinare una base di R^3 formata da autovettori di B.

Esercizio 73. *Sia* $\{v_1, v_2, v_3\}$ *una base di* R^3 *e sia* $f : R^3 \to R^3$ *l'endomorfismo definito da:*

$$f(v_1) = v_1 + v_2, \quad f(v_2) = v_1 + 2v_2 - v_3, \quad f(v_3) = -v_2 + v_3.$$

Determinare autovalori e autospazi di f. *Determinare, se possibile, una base di autovettori. Verificare che autovettori relativi ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali.*

SOLUZIONE. La matrice di f ripsetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e il suo polinomio caratteristico è

$$p(x) = x(x-3)(1-x).$$

Poichè si tratta di una matrice 3×3 con tre autovalori distinti è sicuramente diagonalizzabile.
Determiniamo ora gli autospazi di A. Si ha:

$$\begin{aligned} V_0 = \ker(A) &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x+y=0 \quad \text{e} \quad y-z=0\} \\ &= (-t,t,t) \ : \ t \in R\} \\ &= \text{Span}\{(-1,1,1)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3 = \ker(A-3I) &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ 2x-y=0 \quad \text{e} \quad y+2z=0\} \\ &= (-t,-2t,t) \ : \ t \in R\} \\ &= \text{Span}\{(-1,-2,1)\} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} V_1 = \ker(A-I) &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x-z=0 \quad \text{e} \quad y=0\} \\ &= (t,0,t) \ : \ t \in R\} \\ &= \text{Span}\{(1,0,1)\}. \end{aligned}$$

Una base di R^3 costituita da autovettori di A è :

$$\mathcal{B} = \{(-1,1,1), (-1,-2,1), (1,0,1)\}.$$

Infine verifichiamo che autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali, ovvero che il loro prodotto scalare è nullo.
Abbiamo

$$\begin{aligned} &(-a,a,a) \cdot (-b,-2b,b) = ab - 2ab + ab = 0, \\ &(-a,a,a) \cdot (c,0,c) = -ac + ac = 0, \\ &(-b,-2b,b) \cdot (c,0,c) = -bc + bc = 0, \end{aligned}$$

per ogni $a, b, c \in R$.

ESERCIZIO 74. *Mostrare che un endomorfismo $f : V \to V$ ha come autovalore 0 se e solo se f non è iniettivo.*

SOLUZIONE. Se f ha come autovalore 0 allora, per definizione, esiste un vettore v non nullo tale che

$$f(v) = 0 \cdot v = 0,$$

pertanto $\langle v \rangle \subseteq \text{Ker}(f)$.
D'altra parte questo implica che f non è iniettivo perchè per ogni $w \in V$

$$f(v+w) = f(v) + f(w) = 0 + f(w) = f(w)$$

e $v + w \neq w$.
Viceversa se f non è iniettivo allora esistono $v, w \in V$ con

$$f(v) = f(w)$$

e $v \neq w$. Posto $u = v - w$, il vettore u è non nullo e

$$f(u) = f(v - w) = f(v) - f(w) = 0 = 0 \cdot u,$$

sicchè f ammette l'autovalore 0.

Esercizio 75. *Siano A e B due matrici quadrate $n \times n$. Provare che AB e BA hanno gli stessi autovalori.*

Soluzione. Supponiamo che AB ammetta l'autovalore 0. Questo significa che esiste un vettore non nullo $v \in R^n$ tale che

$$AB(v) = 0.$$

In altre parole esiste una soluzione non banale del sistema omogeneo

$$(AB)X = 0.$$

D'altra parte il sistema appena scritto ha soluzioni non banali se e solo se

$$\det(AB) = 0.$$

Ora

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$$

sicchè anche il determinante di BA è nullo. Questo significa che anche il sistema

$$(BA)X = 0$$

ammette soluzioni non banali ovvero che 0 è un autovalore di BA.
Supponiamo adesso che la matrice AB ammetta un autovalore $\lambda \in R$ non nullo. Allora esiste $v \in R^n$ non nullo tale che

$$AB(v) = \lambda v.$$

Sia w il vettore $B(v)$. Risulta:

$$BA(w) = (BA)(Bv) = B(AB)(w) = \lambda B(v) = \lambda w.$$

Per poter concludere che w è un autovettore di BA relativo all'autovalore λ rimane solo da provare che w non è il vettore nullo.
D'altra parte se fosse $w = B(v) = 0$ avremmo

$$(AB)(v) = A(B(v)) = A(0) = 0,$$

mentre abbiamo per ipotesi che $AB(v) = \lambda v \neq 0$.
Abbiamo quindi provato che ogni autovalore di AB è autovalore anche di BA. Con ragionamento analogo si prova che ogni autovalore di BA è autovalore di AB.

Esercizio 76. *Sia M la matrice:*

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

con A_1 e A_2 matrici quadrate. Mostrare che il polinomio caratteristico di M è il prodotto dei polinomi caratteristici di A_1 e A_2.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che la matrice M deve essere una matrice quadrata $2n \times 2n$.
Il polinomio caratteristico di M è:

$$p(x) = \det(M - xI).$$

D'altra parte la matrice identità $2n \times 2n$ si può guardare come una matrice a blocchi:

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

dove I_1 e I_2 sono matrici identità $n \times n$.
Allora

$$\begin{aligned} p_{M}(x) = \det(M - xI) = \det \begin{pmatrix} A_1 - xI_1 & B \\ 0 & A_2 - xI_2 \end{pmatrix} \\ = \det(A_1 - xI_1) \det(A_2 - xI_2) = p_{A_1}(x) p_{A_2}(x). \end{aligned}$$

Esercizio 77. *Determinare per quali valori del parametro reale k la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 3 \\ 0 & k & 3k-6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile. Determinare, se possibile, una base di autovettori.

Soluzione. La matrice è triangolare superiore quindi gli autovalori sono tutti e soli gli elementi sulla diagonale principale:

$$k-1, k, 2.$$

Per $k \neq 2, 3$ gli autovalori sono tutti distinti sicchè la matrice è diagonalizzabile.
Inoltre

$$\begin{aligned} V_{k-1} &= \ker(A - (k-1)I) = \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ y + 3z = 0 \quad \text{e} \quad (3-k)z = 0\} \\ &= (t, 0, 0) \ : \ t \in R\} \\ &= \mathrm{Span}\{(1, 0, 0)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_k &= \ker(A - kI) = \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ -x + y + 3z = 0 \quad \text{e} \quad (2-k)z = 0\} \\ &= (t, t, 0) \ : \ t \in R\} \\ &= \mathrm{Span}\{(1, 1, 0)\}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} V_2 &= \ker(A - 2I) \\ &= \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ (k-3)x + y + 3z = 0 \quad \text{e} \quad (2-k)y + (3k-6)z = 0\} \\ &= (0, -3t, t) \ : \ t \in R\} \\ &= \mathrm{Span}\{(0, -3, 1)\}. \end{aligned}$$

Notiamo che nel determinare gli autospazi abbiamo usato l'ipotesi che k fosse diverso da 2 e 3.

Una base di autovettori è

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,-3,1)\}.$$

Esaminiamo ora i casi $k = 2$ e $k = 3$.
Per $k = 2$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Per verificare che sia diagonalizzabile basta verificare se la dimensione dell'autospazio relativo a 2 è uguale a 2.
Ora:

$$\begin{aligned} V_2 = \ker(A-2I) &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ -x+y+3z = 0\} \\ &= (t+3s,t,s) \ : \ t,s \in R\} \\ &= \mathrm{Span}\{(1,1,0),(3,0,1)\}. \end{aligned}$$

Segue che $\dim(V_2) = 2$ e A è diagonalizzabile.
Una base di autovettori è :

$$\mathcal{B} = \{(1,1,0),(3,0,1),(1,0,0)\}.$$

Infine per $k = 3$ la matrice A diventa:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Di nuovo guardiamo all'autospazio relativo a 2:

$$\begin{aligned} V_2 = \ker(A-2I) &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ y+3z = 0\} \\ &= (t,-3s,s) \ : \ t,s \in R\} \\ &= \mathrm{Span}\{(1,0,0),(0,-3,1)\}, \end{aligned}$$

dunque A è diagonalizzabile e una base di autovettori è:

$$\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,-3,1),(1,0,0)\}.$$

Notiamo che gli autovalori per $k = 2,3$ sono 2 e 3.

Esercizio 78. *Sia $f : R^3 \to R^3$ l'endomorfismo definito da:*

$$f(x,y,z) = (3x+y+z, 2x+4y+2z, x+y+3z).$$

Determinare autovalori e autovettori di f. Determinare, se possibile, una base di autovettori.

Soluzione. La matrice di f rispetto alla base canonica è;

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di A è
$$p(x) = \det(A - xI) = -(x-6)(x-2)^2.$$
Gli autovalori di A sono $x_1 = 6$ con molteplicità algebrica 1 e $x_2 = 2$ con molteplicità algebrica 2.
L'autospazio relativo all'autovalore 2 è:
$$\begin{aligned} V_2 = \ker(A - 2I) &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x+y+z=0\} \\ &= (-s-t, s, t) \ : \ t, s \in R\} \\ &= \text{Span}\{(-1,1,0), (-1,0,1)\}. \end{aligned}$$
Poichè $\dim(V_2) = 2$ la matrice è diagonalizzabile.
L'autospazio relativo all'autovalore 6 è:
$$\begin{aligned} V_6 = \ker(A - 6I) &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ 3x - y - z = 0 \quad \text{e} \quad y - 2z = 0.\} \\ &= (t, 2t, t) \ : \ t \in R\} \\ &= \text{Span}\{(1,2,1)\}. \end{aligned}$$
Infine una base di R^3 costituita da autovettori di A è l'insieme:
$$\mathcal{B} = \{(1,2,1), (-1,1,0), (-1,0,1)\}.$$

Esercizio 79. *Date le matrici*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
determinare, se possibile, due matrici P_1 e P_2 tali che $P_1^{-1}AP_1$ e $P_2^{-1}BP_2$ siano matrici diagonali.

Soluzione. Una matrice M quadrata di ordine n, è diagonalizzabile se e solo se esiste una matrice P invertibile tale che
$$P^{-1}MP$$
sia una matrice diagonale.
Se $v_1, \dots, v_n$ sono n autovettori di M linearmente indipendenti, la matrice P le cui colonne sono i vettori v_i, $i = 1, \dots, n$, è invertibile e $P^{-1}MP$ è una matrice diagonale.
Consideriamo ora la matrice A. Il suo polinomio caratteristico è:
$$p(x) = \det(A - xI) = (1-x)(x-3)^2;$$
sicchè i suoi autovalori sono $x_1 = 1$ con molteplicità algebrica 1 e $x_2 = 3$ con molteplicità algebrica 2.
L'autospazio relativo all'autovalore 3 è il sottospazio:
$$\begin{aligned} V_3 = \ker(A - 3I) &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x = y + z\} \\ &= (s+t, s, t) \ : \ t, s \in R\} \\ &= \text{Span}\{(1,1,0), (1,0,1)\}. \end{aligned}$$

L'autospazio relativo all'autovalore 1 è, invece, il sottospazio:

$$\begin{aligned} V_1 = \ker(A-I) &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ x+y=z \quad \text{e} \quad y=-z\} \\ &= (2t,-t,t) \ : \ t \in R\} \\ &= \text{Span}\{(2,-1,1)\}. \end{aligned}$$

Una base di R^3 formata da autovettori di A è l'insieme:

$$\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,0,1),(2,-1,1)\},$$

e la matrice

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è tale che

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice B ammette l'unico autovalore 1 con molteplicità algebrica 3.
D'altra parte non è diagonalizzabile infatti l'autospazio relativo ad 1 è:

$$\begin{aligned} V_1 = \ker(B-I) &= \{(x,y,z) \in R^3 \ : \ y=0\} \\ &= (t,0,s) \ : \ t,s \in R\} \\ &= \text{Span}\{(1,0,0),(0,0,1)\}. \end{aligned}$$

Poichè $\dim(V_1) = 2$ non si può determinare una base di R^3 costituita da autovettori di B e dunque non si può determinare una matrice P_2 tale che $P_2^{-1}BP_2$ sia una matrice diagonale.

Esercizio 80. *Sia M una matrice quadrata e simmetrica con un solo autovalore λ. Provare che M coincide con la matrice $\lambda \cdot I$, dove I è la matrice identità.*

Soluzione. La matrice M è simmetrica e dunque diagonalizzabile. Inoltre M ha il solo autovalore λ, e quindi è simile alla matrice λI.
Esiste allora un matrice invertibile P tale che:

$$P^{-1}MP = \lambda I.$$

Moltiplicando l'uguaglianza appena scritta a sinistra per P otteniamo:

$$MP = P(\lambda I) = \lambda(PI) = \lambda P.$$

Moltiplicando quest'ultima a destra per P^{-1} otteniamo:

$$M = (\lambda P)P^{-1} = \lambda(PP^{-1}) = \lambda I,$$

ovvero che M è una matrice diagonale.

Compiti di Esame

8. Geometria 8 febbraio. Tema A.

Rispondere, giustificando brevemente la risposta, ad **almeno due** delle prime quattro domande e risolvere il maggior numero degli esercizi seguenti.

Domande.

(a) Dire se è vera la seguente affermazione.
Se $(2,1,0)$ e $(3,0,2)$ sono due soluzioni di un sistema lineare omogeneo a tre incognite, allora anche (5,1,2) è una soluzione dello stesso sistema.

(b) Siano A, B due matrici quadrate. Da $AB = A$ segue $B = I$?

(c) Siano r, s, t tre rette in R^3 tali che r ed s sono complanari e s e t sono complanari. Allora:
1) Le rette r e t sono complanari.
2) Le rette r e t sono parallele.
3) Le rette r e t sono sghembe.
4) Possono verificarsi tutti e tre i casi.

(d) Sia data un'applicazione lineare $g : R^4 \to R$, diversa dalla funzione nulla.
È sempre vero che $\dim \mathrm{Ker}(g) = 3$?

Esercizi.

1) Discutere e trovare le soluzioni del seguente sistema al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} 2x + y + kz = 1 \\ x + ky + 3z = 2 \\ 2x + y + z = k \end{cases}$$

2) Discutere la diagonalizzabilità della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -5 & 6 & -5 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

e trovare, se possibile, una base di autovettori.

3) Sia π il piano che contiene la retta

$$r : \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

e passante per il punto $P = (-4, 1, 2)$.
Siano s la retta perpendicolare a π passante per $Q = (1, 0, 1)$ e t la retta parallela

ad r passante per $R=(4,2,3)$.
Si dica se r, s e t sono a due a due complanari, motivando la risposta.

4) Siano

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 2 & k & 1\\ 3 & 2 & -1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}3 & 1-k & -1\\ -3 & -1-k & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

le matrici che rappresentano rispettivamente le applicazioni lineari f e g, con $f,g:R^3\to R^3$.
Determinare, se esistono, i valori di k per i quali $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Ker}(g)=\{0\}$.
Per $k=0$ scrivere la matrice di $f\circ g$ e dire se tale applicazione è iniettiva o suriettiva.

Soluzione

Domande

(a) La risposta è sì. Infatti la somma di soluzioni di un sistema omogeneo è ancora soluzione.
(b) La risposta è no. Per esempio se

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

allora $AB=A$ ma B non è la matrice identità.
(c) Possono verificarsi tutti e tre i casi.
(d) La risposta è sì. Infatti se la applicazione g è suriettiva, pertanto $\dim\mathrm{Ker}(g)=3$.

Esercizio 1.
La matrice associata al sistema è la matrice:

$$(A|B)=\begin{pmatrix}2 & 1 & k & 1\\ 1 & k & 3 & 2\\ 2 & 1 & 1 & k\end{pmatrix}$$

Una possibile riduzione a gradino è

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & k\\ 1 & k & 3 & 2\\ 2 & 1 & k & 1\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & k\\ 0 & 1-2k & -5 & k-4\\ 0 & 0 & k-1 & 1-k\end{pmatrix}$$

Per $k=\frac{1}{2}$ non esistono soluzioni del sistema.
Per $k=1$ il sistema dato è equivalente al sistema

$$\begin{cases}2x+y+z=1\\ y+5z=3\end{cases}$$

che ammette infinite soluzioni:

$$\begin{aligned} x &= 2t - 1 \\ y &= 3 - 5t \\ z &= t \quad t \in R. \end{aligned}$$

Se $k \neq 1, \frac{1}{2}$ esiste una e una sola soluzione del sistema.
La soluzione è

$$x = \frac{-2k^2 - 2k + 10}{1 - 2k} \quad y = \frac{k - 9}{1 - 2k} \quad z = -1$$

Esercizio 2.
Il polinomio caratteristico della matrice è :

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(2 - \lambda)$$

dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 1.
L'autospazio relativo all'autovalore 1 è

$$V_1 = \operatorname{Ker}(A - I) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -5 & 5 & -5 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'autospazio relativo all'autovalore 2 è

$$V_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -5 & 4 & -5 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix} = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

Concludiamo che la matrice è diagonalizzabile e una base di autovettori è data

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 3.
Il punto $P = (-4, 1, 2)$ appartiene al piano $x + y + 2z = 1$ pertanto questa è l'equazione cartesiana di π.
La retta s ha parametri direttori:

$$(l, m, n) = (1, 1, 2)$$

e passa per il punto $Q = (1, 0, 1)$. Le sue equazioni parametriche sono:

$$s : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Le sue equazioni cartesiane si ottengono eliminando il parametro. Risulta:

$$s : \begin{cases} x - y = 1 \\ -2y + z = 1 \end{cases}$$

La retta t è parallela alla retta r e passa per il punto $Q = (4, 2, 3)$ pertanto ha equazioni parametriche

$$t : \begin{cases} x = 4 - 3t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

Le sue equazioni cartesiane si ootengono eliminando il parametro e risulta:

$$t : \begin{cases} x + 3y = 10 \\ -y + z = 1 \end{cases}$$

Le rette r e t sono parallele e dunque complanari. Le rette r e s sono sghembe così come le rette s e t. Infatti le matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe rango quattro.

Esercizio 4.

Il nucleo della applicazione f si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Si ottiene che l'applicazione f è iniettiva per $k \neq -7$, mentre per $k = -7$ risulta

$$\text{Ker}(f) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Il nucleo della applicazione g si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3x + (1 - k)y - z = 0 \\ 3x + (1 + k)y - z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$$

Si ottiene che l'applicazione g è iniettiva per $k \neq 0$, mentre per $k = 0$ risulta

$$\text{Ker}(g) = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ne segue che $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g) = \{0\}$ per $k \neq 0, -7$.

Per $k = 0$ la applicazione g non è iniettiva. Sia allora $v \in \text{Ker}(g)$, risulta

$$(f \circ g)(v) = f(g(v)) = f(0) = 0,$$

pertanto l'applicazione $f \circ g$ non è iniettiva e dunque, essendo un endomorfismo, non è neanche suriettiva. Infine la matrice di $f \circ g$ è :

$$M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -1 \\ 12 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

9. Geometria 2 marzo 1999. Tema A.

Rispondere, giustificando brevemente la risposta, ad **almeno due** delle prime quattro domande e risolvere il maggior numero degli esercizi seguenti.

Domande.

(a) Dire se è vera la seguente affermazione.
Se u, v, w sono tre vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V anche $u+v, v-w, u+w$ sono linearmente indipendenti.

(b) Dire se è vera la seguente affermazione.
Siano $v_1, v_2 \in R^3$ e W il sottospazio dei vettori perpendicolari a v_1 e v_2 . Si ha necessariamente $\dim W = 1$.

(c) Dati in R^3 una retta e due punti dire quale delle seguenti affermazioni è vera:
1) Esiste sempre un piano che li contiene.
2) Non esiste mai.
3) Se esiste è unico.
4) Ne possono esistere infiniti.

(d) Siano $f : R^6 \to R^5$, $g : R^7 \to R^6$ applicazioni lineari. Risulta sempre vero che $Ker(g) \subseteq Ker(f \circ g)$?

Esercizi.

1) Discutere e trovare le soluzioni del seguente sistema al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} x + 2y + kz = -k \\ 2x + ky + 3z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

2) Discutere la diagonalizzabilità della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -2 \\ -5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

e trovare, se possibile, una base di autovettori.

3) Sia π il piano perpendicolare alla retta

$$r : \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$$

e passante per il punto $P = (-1, 1, 2)$.
Sia π' il piano passante per i punti $(1,1,0), (0,1,0), (2,0,1)$ e sia s la retta di

intersezione tra π e π'.
Sia t la retta di equazioni

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t. \end{cases}$$

Si studi la posizione reciproca di s e t.

4) Data la funzione $f: R^3 \to R^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (-2x + y + z, y + 2z, 2x + z)$$

scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di R^3. Determinare i sottospazi $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e stabilire se l'applicazione f è iniettiva. Determinare la controimmagine di $(-1, 2, 3)$.

Soluzione

Domande

(a) La risposta è no. Infatti il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

è uguale a zero.

(b) La risposta è no. Infatti v_1 e v_2 sono proporzionali il sottospazio dei vettori ortogonali a v_1 e v_2 ha dimensione 2.

(c) Ne possono esistere infiniti.

(d) La risposta è sì. Infatti se $x \in \operatorname{Ker}(g)$ allora

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(0) = 0.$$

Esercizio 1.

La matrice associata al sistema è la matrice:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & -k \\ 2 & k & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Una possibile riduzione a gradino è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & k & -k \\ 2 & k & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1-2k & 2+2k \\ 0 & k-1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1-2k & 2+2k \\ 0 & 0 & 2k^2-3k-5 & 2-2k^2 \end{pmatrix}$$

Per $k = \frac{5}{2}$ non esistono soluzioni del sistema.
Per $k = -1$ il sistema dato è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

che ammette infinite soluzioni:

$$\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= t \\ z &= t \quad t \in R. \end{aligned}$$

Se $k \neq -1, \frac{5}{2}$ esiste una e una sola soluzione del sistema.
La soluzione è

$$x = \frac{3k - 8}{2k - 5} \quad y = \frac{4}{2k - 5} \quad z = \frac{2(1 - k)}{2k - 5}$$

Esercizio 2.
Il polinomio caratteristico della matrice è :

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 2)^2$$

dumque gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica 1.
L'autospazio relativo all'autovalore 2 è

$$V_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I)$$

che si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -5x - 2y + z = 0 \\ 6x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

Risulta allora

$$V_2 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ne deduciamo che la matrice non è diagonalizzabile.
L'autospazio relativo all'autovalore 0 è

$$V_0 = \mathrm{Ker}(A)$$

e si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ 5x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

Risulta allora

$$V_0 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 3.
Il vettore direttore di r è:

$$(2, 5, 1)$$

dunque il piano π ha equazione cartesiana

$$2x + 5y + z = 5.$$

Il piano π' ha equazione cartesiana

$$y + z - 1 = 0$$

pertanto la retta s ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 5 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Le equazioni cartesiane di t si ottengono eliminando il parametro e si ha:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

Per determinare la posizione reciproca delle rette s e t risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + 5y + z = 5 \\ y + z - 1 = 0 \\ x + y = 3 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

La matrice completa associata al sistema è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Riducendo a gradino si ottiene che la matrice completa ha rango 4 mentre la matrice dei coefficienti ha rango 3. Pertanto le rette sono sghembe.

Esercizio 4.

La matrice della applicazione f rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il nucleo dell'applicazione si trova come insieme delle soluzioni del sistema omogeneo di matrice $M(f)$.

Riducendo si trova il sistema:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Ne segue che

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

L'immagine della applicazione f invece è generata dalle colonne linearmente indipendenti della matrice $M(f)$. Risulta:

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Infine la controimmagine di $(-1, 2, 3)$ si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -2x + y + z = -1 \\ y + 2z = 2 \\ 2x + z = 3 \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = 2 + 4t \\ z = -2t \end{cases}$$

10. Geometria 2 marzo 1999. Tema B.

Rispondere, giustificando brevemente la risposta, ad **almeno due** delle prime quattro domande e risolvere il maggior numero degli esercizi seguenti.

Domande.

(a) Dire se è vera la seguente affermazione.
Se u, v, w sono tre vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V anche $u+v, u-v, u+w$ sono linearmente indipendenti.

(b) Sia $w \in R^3$ un vettore non nullo. Determinare la dimensione del sottospazio $\{v \in R^3 \mid v \wedge w = 0\}$.

(c) Siano π un piano in R^3, r e s due rette distinte perpendicolari a π. Quale delle seguenti affermazioni è vera:
1) Le rette r e t sono incidenti.
2) Le rette r e t sono parallele.
3) Le rette r e t sono sghembe.
4) Possono verificarsi tutti e tre i casi.

(d) Siano $f : R^4 \to R^3$, $g : R^3 \to R^3$ applicazioni lineari. Risulta sempre vero che $\mathrm{Im}(g) \subseteq \mathrm{Im}(g \circ f)$?

Esercizi.

1) Discutere e trovare le soluzioni del seguente sistema al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} 4x + ky + 6z = k \\ 2x + 4y + kz = 5 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

2) Discutere la diagonalizzabilità della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 1 & 6 & -5 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

e trovare, se possibile, una base di autovettori.

3) Sia π il piano perpendicolare alla retta

$$r : \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

e passante per il punto $P = (2, -1, 1)$.
Sia π' il piano passante per i punti $(0,1,1), (0,0,1), (1,2,0)$ e sia s la retta di

intersezione tra π e π'.
Sia t la retta di equazioni

$$\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - \lambda. \end{cases}$$

Si studi la posizione reciproca di s e t.

4) Data la funzione $f: R^3 \to R^3$ definita da

$$f(x, y, z) = (-x + 2z, 2x + y + 4z, 3x + y + 2z)$$

scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base canonica di R^3. Determinare i sottospazi $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e stabilire se l'applicazione f è iniettiva. Determinare la controimmagine di $(1, 7, 6)$.

Soluzione

Domande

(a) La risposta è sì. Infatti il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è diverso da zero.

(b) La dimensione del sottospazio è 1. Infatti $v \wedge w = 0$ se e solo se $v \in L(W)$. Poichè v è non nullo si ha che $\dim L(W) = 1$.

(c) Le rette r e t sono parallele, avendo entrambe direzione ortogonale al piano.

(d) La risposta è no. Per esempio se g è l'identità in R^3 e f è l'applicazione nulla riesce $\operatorname{Im} g = R^3$ e $\operatorname{Im}(f \circ g) = \{0\}$.

Esercizio 1.

La matrice associata al sistema è la matrice:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 4 & k & 6 & k \\ 2 & 4 & k & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Riducendo a gradino la matrice $(A|B)$ si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & k-1 & 5 \\ 0 & 0 & (k-5)(k+2) & 2(k-5) \end{pmatrix}$$

Per $k = -2$ non esistono soluzioni del sistema.
Per $k = 5$ il sistema dato è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 3y + 4z = 5 \end{cases}$$

che ammette infinite soluzioni:

$$\begin{aligned}
&x = -\frac{5}{6} + \frac{t}{6}\\
&y = \frac{5}{3} - \frac{4t}{3}\\
&z = t \quad t \in R.
\end{aligned}$$

Se $k \neq -2, 5$ esiste una e una sola soluzione del sistema.
La soluzione è

$$x = -\frac{5}{3} - \frac{8-2k)}{3(k+2)} \quad y = \frac{5}{3} + \frac{2(1-k)}{3(k+2)} \quad z = \frac{2}{k+2}$$

Esercizio 2.
Il polinomio caratteristico della matrice è :

$$p(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-7)^2$$

dumque gli autovalori sono $\lambda_1 = 7$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica 1.
L'autospazio relativo all'autovalore 7 è

$$V_7 = \mathrm{Ker}(A - 7I)$$

che si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -x + y - z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Risulta allora

$$V_7 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ne deduciamo che la matrice non è diagonalizzabile.
L'autospazio relativo all'autovalore 1 è

$$V_1 = \mathrm{Ker}(A - I)$$

e si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 4x + 2y - 2z = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Risulta allora

$$V_1 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 3.
Il vettore direttore di r è:

$$(1, 2, 5)$$

dunque il piano π ha equazione cartesiana

$$x + 2y + 5z = 5.$$

Il piano π' ha equazione cartesiana

$$x + z - 1 = 0$$

pertanto la retta s ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 5 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Le equazioni cartesiane di t si ottengono eliminando il parametro e si ha:

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

Per determinare la posizione reciproca delle rette s e t risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 5 \\ x + z - 1 = 0 \\ x + 2z = 3 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

La matrice completa associata al sistema è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Riducendo a gradino si ottiene che la matrice completa ha rango 4 mentre la matrice dei coefficienti ha rango 3. Pertanto le rette sono sghembe.

Esercizio 4.

La matrice della applicazione f rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il nucleo dell'applicazione si trova come insieme delle soluzioni del sistema omogeneo di matrice $M(f)$.

Riducendo si trova il sistema:

$$\begin{cases} -x + 2z = 0 \\ y + 8z = 0 \end{cases}$$

Ne segue che

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

L'immagine della applicazione f invece è generata dalle colonne linearmente indipendenti della matrice $M(f)$. Risulta:

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Infine la controimmagine di $(1, 7, 6)$ si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -x + 2z = 1 \\ 2x + y + 4z = 7 \\ 3x + y + 2z = 6 \end{cases}$$

Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 8t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

11. Geometria 30 marzo 1999. Tema A.

Rispondere, giustificando brevemente la risposta, ad **almeno due** delle prime quattro domande e risolvere il maggior numero degli esercizi seguenti.

Domande.

(a) Siano A e B due matrici quadrate . Dimostrare o trovare un controesempio alla seguente identità:

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B).$$

(b) Dire se è vera la seguente affermazione.
Una matrice quadrata di ordine tre il cui polinomio caratteristico è:

$$x^3 - x$$

è necessariamente diagonalizzabile?

(c) Siano π un piano in R^3, r e s due rette tali che $d(r,\pi) = 2 = d(s,\pi)$. Quale delle seguenti affermazioni è vera:
  (a) Le rette r e s sono incidenti.
  (b) Le rette r e s sono parallele.
  (c) Le rette r e s sono sghembe.
  (d) Possono verificarsi tutti e tre i casi.

(d) Siano f, g applicazioni lineari da R^3 in R^3. Risulta sempre vero che $f \circ g = g \circ f$?
È vero se f è l'applicazione nulla?

Esercizi.

1) Discutere e trovare le soluzioni del seguente sistema al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} 3x + y + kz = k \\ x + 2y + 2z = 2 \\ 2x + ky + z = 1 \end{cases}$$

2) Discutere la diagonalizzabilità della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e trovare, se possibile, una base di autovettori.

3) Siano π il piano che contiene la retta

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$

ed è ortogonale alla retta:

$$s: \begin{cases} x + y = 2 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$$

e $P = (2, 2, 1)$. Si trovi il punto P' simmetrico di P rispetto a π.

4) Scrivere la matrice rispetto alle basi canoniche di R^3 e R^4 dell'applicazione lineare $f: R^4 \to R^3$ tale che

$$f(1,0,0,0) = (3,1,0) \qquad f(0,-1,0,0) = (0,1,1)$$
$$f(0,0,1,1) = (0,k,0) \qquad f(0,0,0,2) = (0,0,0)$$

dove k è un parametro reale. Determinare i sottospazi $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro dimensioni al variare di k.

Soluzione

Domande

(a) La affermazione è falsa. Si ha per esempio

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

mentre

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

(b) La affermazione è vera. Infatti in questo caso la matrice ha tre autovalori distinti: 0, 1, -1.

(c) Possono verificarsi tutti e tre i casi.

(d) La risposta è no. Per esempio se $f(x, y, z) = (x, 0, 0)$ e $g(x, y, z) = (z, 0, 0)$ si ha $(f \circ g)(x, y, z) = (z, 0, 0)$ mentre $(g \circ f)(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
Se f è l'applicazione nulla allora $f \circ g = g \circ f = 0$ perchè per ogni applicazione lineare g risulta $g(0) = 0$.

Esercizio 1.

La matrice dei coefficienti del sistema è la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & k & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante della matrice A è

$$\det(A) = (k-1)(k-9)$$

pertanto per $k \neq 1, 9$ il sistema ammette una unica soluzione. La soluzione è

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = 1$$

Per $k = 1$ esistono infinite soluzioni :

$$\begin{aligned} &x = 0 \\ &y = 1 - t \\ &z = t \quad t \in R. \end{aligned}$$

Per $k = 9$ il sistema ammette di nuovo infinite soluzioni :

$$\begin{aligned} &x = \frac{16}{5} - \frac{16t}{5} \\ &y = \frac{3t}{5} - \frac{3}{5} \\ &z = t \quad t \in R. \end{aligned}$$

Esercizio 2.
Il polinomio caratteristico della matrice è :

$$p(\lambda) = (3 - \lambda)(1 - \lambda)^2$$

dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 3$ con molteplicità algebrica 1.
L'autospazio relativo all'autovalore 1 è

$$V_1 = \mathrm{Ker}(A - I)$$

che si determina risolvendo il l'equazione

$$x + y - z = 0$$

Risulta allora

$$V_1 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ne deduciamo che la matrice è diagonalizzabile.
L'autospazio relativo all'autovalore 3 è

$$V_3 = \mathrm{Ker}(A - 3I)$$

e si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Risulta allora

$$V_3 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 3.
Il piano π deve essere ortogonale alla retta s che ha vettore direttore $(2, -2, 1)$. Dunque la sua equazione cartesiana sarà della forma

$$2x - 2y + z + c = 0, \quad c \in R.$$

Il piano contiene la retta r e dunque passa per il punto $P = (2, 5, 2)$, pertanto deve essere $4 - 10 + 2 + c = 0$ da cui $c = 4$. Il punto P' ha coordinate

$$P' = (-\frac{2}{9}, \frac{38}{9}, -\frac{1}{9}).$$

Esercizio 4.
Risulta

$$\begin{aligned}
&f(1,0,0,0) = (3,1,0)\\
&f(0,1,0,0) = -f(0,-1,0,0) = (0,-1,-1)\\
&f(0,0,1,0) = f(0,0,1,1) - \frac{1}{2}f(0,0,0,2) = (0,k,0)\\
&f(0,0,0,1) = \frac{1}{2}f(0,0,0,2) = (0,0,0)
\end{aligned}$$

La matrice della applicazione f rispetto alle basi canoniche è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per $k \neq 0$ si ha che la dimensione dell'immagine di f è uguale al rango di $M(f)$ ed è uguale 3. Il nucleo di f è il sottospazio:

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per $k = 0$ risulta

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

12. Geometria 30 marzo 1999. Tema B.

Rispondere, giustificando brevemente la risposta, ad **almeno due** delle prime quattro domande e risolvere il maggior numero degli esercizi seguenti.

Domande.

(a) Sia A una matrice quadrata . Quale delle seguenti affermazioni è corretta:
  (a) Il determinante di A è nullo se due colonne sono uguali.
  (b) Il determinante di A non cambia se si scambiano tra loro la prima riga con la seconda riga.

(b) Dire se è vera la seguente affermazione.
Una matrice quadrata di ordine tre il cui polinomio caratteristico è:
$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$
è necessariamente diagonalizzabile?

(c) Siano π e π' due piani tali che $d(\pi, \pi') = 2$. È possibile trovare una retta che abbia in comune con π un solo punto e non tagli π'?

(d) Siano $f : R^2 \to R^3$, $g : R^3 \to R^4$ applicazioni lineari iniettive. È vero che $g \circ f$ è iniettiva?

Esercizi.

1) Discutere e trovare le soluzioni del seguente sistema al variare del parametro reale k:
$$\begin{cases} 3x + y + kz = k \\ x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + ky + z = -k \end{cases}$$

2) Discutere la diagonalizzabilità della seguente matrice
$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & -8 \\ 4 & 3 & -4 \\ 10 & 10 & -11 \end{pmatrix}$$
e trovare, se possibile, una base di autovettori.

3) Siano π il piano che contiene la retta
$$r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 \\ z = 5 + t \end{cases}$$
ed è ortogonale alla retta:
$$s : \begin{cases} y + z = 2 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

e $P = (1, 2, 2)$. Si trovi il punto P' simmetrico di P rispetto a π.

4) Scrivere la matrice rispetto alle basi canoniche di R^3 e R^4 dell'applicazione lineare $f:\ R^4 \to R^3$ tale che

$$f(1,0,0,0) = (3, 1+k, 0) \qquad f(0,-1,0,0) = (3,0,-1)$$
$$f(0,0,1,1) = (0,k,0) \qquad f(0,0,0,2) = (0,0,0)$$

dove k è un parametro reale. Determinare i sottospazi $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f$ e le loro dimensioni al variare di k.

Soluzione

Domande

(a) La prima affermazione è vera. Infatti sia $\overline{A}$ la matrice che si ottiene da A scambiando le due colonne uguali.
In virtù di quetsa operazione elementare risulta $\det(\overline{A}) = -\det(A)$, ma essendo anche $A = \overline{A}$ vale $\det(A) = \det(\overline{A})$. L'unica possibilità è che sia $\det(A) = 0$.
La seconda affermazione è invece falsa. Sia infatti $\overline{A}$ la matrice con le righe scambiate, vale $\det(\overline{A}) = -\det(A)$.

(b) La affermazione è falsa. Essendo

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3,$$

la matrice ha un solo autovalore, 1, con molteplicità algebrica 3. Pertanto è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità geometrica, ovvero la dimensione dell'autospazio è uguale a 3.

(c) La risposta è no. Infatti dal fatto che $d(\pi, \pi') = 2$ segue che i piani sono distinti e paralleli. Ogni retta che incide π incide anche π' e viceversa.

(d) La risposta è sì. Infatti

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Longrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Poiché g è iniettiva segue che

$$f(x_1) = f(x_2)$$

e dunque $x_1 = x_2$ per l'iniettività di f.

Esercizio 1.

La matrice associata al sistema è la matrice:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & k & k \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & k & 1 & -k \end{pmatrix}$$

Riducendo a gradino si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & k-6 & k \\ 0 & 0 & (k-9)(k-1) & k(k-9) \end{pmatrix}$$

pertanto per $k \neq 1, 9$ il sistema ammette una unica soluzione. La soluzione è

$$x = 0 \quad y = -\frac{k}{k-1} \quad z = \frac{k}{k-1}$$

Per $k = 1$ il sistema non ha soluzioni. Per $k = 9$ il sistema dato è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ -5y + 3z = 9 \end{cases}$$

che ammette infinite soluzioni. Una soluzione particolare si trova ponendo ad esempio $y = 0$ e risulta allora $x = -6$ e $z = 3$. Le soluzioni del sistema omogeneo associato sono il sottospazio:

$$\text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -16 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ne segue che le soluzioni del sistema per $k = 9$ sono

$$\begin{aligned} &x = -6 - 16t \\ &y = 3t \\ &z = 3 + 5t \quad t \in R. \end{aligned}$$

Esercizio 2.
Il polinomio caratteristico della matrice è :

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$$

dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica 1.
L'autospazio relativo all'autovalore -1 è

$$V_{-1} = \text{Ker}(A + I)$$

che si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 8x + 8y - 8z = 0 \\ 4x + 4y - 4z = 0 \\ 10x - 10y - 10z = 0 \end{cases}$$

Risulta allora

$$V_{-1} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Ne deduciamo che la matrice è diagonalizzabile.
L'autospazio relativo all'autovalore 1 è

$$V_1 = \text{Ker}(A - I)$$

e si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 6x + 8y - 8z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 0 \\ 10x + 10y - 12z = 0 \end{cases}$$

Risulta allora

$$V_1 = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Una base di autovettori è data dall'insieme

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 3.
Il piano π deve essere ortogonale alla retta s che ha vettore direttore $(1, 2, -2)$. Dunque la sua equazione cartesiana sarà della forma

$$x + 2y - 2z = d, \quad d \in R.$$

Sostituendo le equazioni di r si trova

$$2 + 2t + 4 - 2(5 + t) = d$$

da cui $d = -4$.
La retta passante per $P = (1, 2, 2)$ e ortogonale al piano è

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

La distanza di P da π è uguale a $\frac{5}{3}$ pertanto si impone

$$\frac{|1 + t + 2(2 + 2t) - 2(2 - 2t) + 4|}{3} = \frac{5}{3},$$

che equivale a

$$5 + 9t = \pm 5$$

Per $t = 0$ si ottiene il punto P mentre per $t = -\frac{10}{9}$ si ottengono le coordinate del punto P':

$$P' = (-\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{38}{9}).$$

Esercizio 4.
Risulta

$$\begin{aligned}
&f(1,0,0,0) = (3, 1+k, 0)\\
&f(0,1,0,0) = -f(0,-1,0,0) = (-3,0,1)\\
&f(0,0,1,0) = f(0,0,1,1) - \frac{1}{2}f(0,0,0,2) = (0,k,0)\\
&f(0,0,0,1) = \frac{1}{2}f(0,0,0,2) = (0,0,0)
\end{aligned}$$

La matrice della applicazione f rispetto alle basi canoniche è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ 1+k & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per $k \neq 0$ si ha che la dimensione dell'immagine di f è uguale al rango di $M(f)$ ed è uguale 3. Il nucleo di f è il sottospazio:

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per $k = 0$ risulta

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}$$

13. Geometria 8 giugno 1999. Tema A.

Rispondere, giustificando brevemente la risposta, ad **almeno due** delle prime quattro domande e risolvere il maggior numero degli esercizi seguenti.

Domande.

(a) Siano V e W due sottospazi vettoriali di R^n, $\{w_1, .., w_k\}$ una base di W e $\{u_1, .., u_l\}$ una base di U. E' vero che $\{w_1, .., w_k, u_1, ..., u_l\}$ è una base di $W + U$?

(b) È vera la seguente affermazione: una matrice triangolare è sempre diagonalizzabile? Dimostrarla o trovare un controesempio.

(c) Siano π, π' e π'' tre piani in R^3 a due a due non paralleli. Sia r la retta intersezione di π e π', s la retta intersezione di π' e π''. Si dica se r ed s possono essere sghembe.

(d) Siano $f : R^3 \to R^2$, $g : R^2 \to R^3$ applicazioni lineari con $Im(f) \subseteq Ker(g)$. Descrivere l'applicazione $g \circ f$.

Esercizi.

1) Discutere e trovare le soluzioni del seguente sistema al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} 2x + y + kz = 1 \\ x + 4y + 2z = 2 \\ 2x + ky + z = k \end{cases}$$

2) Discutere la diagonalizzabilità della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -5 & 6 & -5 \\ -6 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

e trovare, se possibile, una base di autovettori.

3) Sia r la retta passante per $P = (1, 1, -1)$ e $Q = (3, 2, -1)$; s la retta perpendicolare al piano

$$\pi : \quad 3x - y - 2z = 1$$

e passante per $(3, -1, -2)$. Si calcoli la distanza di r ed s.

4) Siano $f, g : R^2 \to R^2$ definite da $f(x, y) = (x + 2y, -x - y)$ e $g(1, 1) = (-1, q)$, $g(1, -1) = (q, 1)$ con q parametro reale. Determinare i valori di q per cui $f \circ g$ è invertibile e per tali valori scrivere la matrice dell'inversa rispetto alle basi canoniche.

Soluzione

Domande

(a) La risposta è no. Infatti in generale i vettori
$$\{w_1, .., w_k, u_1, ..., u_l\}$$
sono linearmente dipendenti. Per esempio $V = \langle(1,1)\rangle$ e $W = \langle(1,0),\ (0,1)\rangle$.

(b) La risposta è no. Per esempio la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
è triangolare ma non diagonalizzabile.

(c) La risposta è no. Infatti r e s sono complanari poichè giacciono entrambe sul piano π'.

(d) La applicazione $(g \circ f)$ è l'applicazione nulla. Infatti se $x \in R^3$ risulta:
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0,$$
poiché, per ipotesi, $f(x) \in \operatorname{Ker}(g)$ per ogni $x \in R^3$.

Esercizio 1.

La matrice associata al sistema è la matrice:
$$(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & k & 1 & k \end{pmatrix}$$
Riduciamo la matrice a gradino usando il mnetodo di Gauss. Una possibile riduzione è:
$$(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & k & 1 & k \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & k & 1 \\ 0 & -7 & k-4 & -3 \\ 0 & 1-k & k-1 & 1-k \end{pmatrix}$$
Per $k \neq 1$ possiamo ridurre ancora e otteniamo la matrice:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & k & 1 \\ 0 & -7 & k-4 & -3 \\ 0 & 0 & (1-k)(k-11) & 4(1-k) \end{pmatrix}$$
Per $k = 11$ non esistono soluzioni del sistema.
Per $k = 1$ il sistema dato è equivalente al sistema
$$\begin{cases} 2x + y = 1 - z \\ -7y = 3z - 3 \end{cases}$$
che ammette infinite soluzioni:
$$x = \frac{2}{7} - \frac{2t}{7}$$
$$y = \frac{3}{7} - \frac{3t}{7}$$
$$z = t \quad t \in R.$$

Se $k \neq 1, 11$ esiste una e una sola soluzione del sistema.
La soluzione è
$$x = -2\frac{k+1}{k-11} \quad y = \frac{k-7}{k-11} \quad z = \frac{4}{k-11}$$

Esercizio 2.
Il polinomio caratteristico della matrice è :
$$p(\lambda) = (\lambda - 1)^2(2 - \lambda)$$
dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica 1.
L'autospazio relativo all'autovalore 1 è
$$V_1 = \operatorname{Ker}(A - I) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -5 & 5 & -5 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$
L'autospazio relativo all'autovalore 2 è
$$V_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -5 & 4 & -5 \\ -6 & 6 & -7 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}.$$
Concludiamo che la matrice è diagonalizzabile e una base di autovettori è data
$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}\right\}$$

Esercizio 3.
La retta r ha equazione parametrica:
$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 \end{cases}$$
mentre la retta s ha equazione parametrica
$$\begin{cases} x = 3 + 3\mu \\ y = -1 - \mu \\ z = -2 - 2\mu \end{cases}$$
La direzione di una generica retta incidente r e s è
$$v = \begin{pmatrix} 2\lambda - 3\mu - 2 \\ \lambda + \mu + 2 \\ 2\mu + 1 \end{pmatrix}$$
Affinchè questa retta sia ortogonale a r deve essere $v \cdot (2, 1, 0) = 0$ mentre affinchè sia ortogonale a s deve essere $v \cdot (3, -1, -2) = 0$. Queste due condizioni forniscono il sistema
$$\begin{cases} 5\lambda - 5\mu = 2 \\ 5\lambda - 14\mu = 10 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\lambda = -\frac{22}{45} \quad \mu = -\frac{8}{9}.$$

Il punto di intersezione tra la retta r e la retta ortogonale ad r e s è:

$$P_1 = (\frac{1}{45}, \frac{23}{45}, -1)$$

mentre il punto di intersezione tra la retta s e la retta ortogonale ad r e s è:

$$P_2 = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{2}{9})$$

La distanza tra le rette r e s è pari alla distanza tra P_1 e P_2:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(P_{1,x} - P_{2,x})^2 + (P_{1,y} - P_{2,y})^2 + (P_{1,z} - P_{2,z})^2} = \frac{7}{\sqrt{45}}$$

Esercizio 4.
Scriviamo le matrici di f, g e $f \circ g$ rispetto alla base canonica di R^2.
La matrice della applicazione f è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per scrivere la matrice della applicazione g bisogna determinare $g(1,0)$ e $g(0,1)$.
Ora

$$\begin{aligned} (1,0) &= \frac{1}{2}\left[(1,1) + (1,-1)\right] \\ (0,1) &= \frac{1}{2}\left[(1,1) - (1,-1)\right], \end{aligned}$$

pertanto

$$\begin{aligned} g(1,0) &= \frac{1}{2}\left[g(1,1) + g(1,-1)\right] = \frac{1}{2}\left[(-1,q) + (q,1)\right] \\ g(0,1) &= \frac{1}{2}\left[g(1,1) - g(1,-1)\right] = \frac{1}{2}\left[(-1,q) - (q,1)\right], \end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned} g(1,0) &= (\frac{q-1}{2}, \frac{q+1}{2}) \\ g(0,1) &= (-\frac{q+1}{2}, \frac{q-1}{2}) \end{aligned}$$

Risulta allora

$$M(g) = \begin{pmatrix} \dfrac{q-1}{2} & -\dfrac{q+1}{2} \\ \\ \dfrac{q+1}{2} & \dfrac{q-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Infine la matrice di $(f \circ g)$ è:

$$M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g) = \begin{pmatrix} \dfrac{3q+1}{2} & \dfrac{q-3}{2} \\ \\ -q & 1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice è

$$\det(M(f \circ g)) = \frac{3q+1}{2} + \frac{q^2-3q}{2} = \frac{q^2+1}{2} \neq 0 \quad \forall q \in R.$$

Pertanto $(f \circ g)$ è invertibile per ogni q in R. La matrice dell'inversa rispetto alla base canonica di R^2 è:

$$M((f \circ g)^{-1}) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{q^2+1} & \dfrac{3-q}{q^2+1} \\ \\ \dfrac{2q}{q^2+1} & \dfrac{3q+1}{q^2+1} \end{pmatrix}.$$

14. Geometria 8 giugno 1999. Tema B.

Rispondere, giustificando brevemente la risposta, ad **almeno due** delle prime quattro domande e risolvere il maggior numero degli esercizi seguenti.

Domande.

(a) Siano V e W due sottospazi vettoriali di R^n, $\{w_1, .., w_k\}$ una base di W e $\{u_1, .., u_l\}$ una base di U. E' vero che $\{w_1, .., w_k, u_1, ..., u_l\}$ è una base di $W + U$?

(b) È vera la seguente affermazione: una matrice triangolare è sempre diagonalizzabile? Dimostrarla o trovare un controesempio.

(c) Siano π, π' e π'' tre piani in R^3 a due a due non paralleli. Sia r la retta intersezione di π e π', s la retta intersezione di π' e π''. Si dica se r ed s possono essere sghembe.

(d) Siano $f : R^3 \to R^2$, $g : R^2 \to R^3$ applicazioni lineari con $Im(f) \subseteq Ker(g)$. Descrivere l'applicazione $g \circ f$.

Esercizi.

1) Discutere e trovare le soluzioni del seguente sistema al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} 2x + y + kz = 7 \\ x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + ky + z = -3 \end{cases}$$

2) Discutere la diagonalizzabilità della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 12 & 13 & -13 \\ -10 & -11 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

e trovare, se possibile, una base di autovettori.

3) Sia r la retta passante per $P = (5, 3, -1)$ e $Q = (3, 2, -1)$; s la retta perpendicolare a

$$\pi : \quad 3x - y - 2z = 1$$

e passante per $(0, 0, 0)$. Si calcoli la distanza di r ed s.

4) Siano $f, g : R^2 \to R^2$ definite da $f(x, y) = (3x - y, -x - 2y)$ e $g(1, 1) = (-1, r)$, $g(1, -1) = (r, 1)$ con q parametro reale. Determinare i valori di r per cui $f \circ g$ è invertibile e per tali valori scrivere la matrice dell'inversa rispetto alle basi canoniche.

Soluzione

Domande

(a) La risposta è no. Infatti in generale i vettori
$$\{w_1, .., w_k, u_1, ..., u_l\}$$
sono linearmente dipendenti. Per esempio $V = \langle (1,1) \rangle$ e $W = \langle (1,0),\ (0,1) \rangle$.

(b) La risposta è no. Per esempio la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
è triangolare ma non diagonalizzabile.

(c) La risposta è no. Infatti r e s sono complanari poichè giacciono entrambe sul piano π'.

Esercizio 1.

La matrice associata al sistema è la matrice:
$$(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & k & 1 & -3 \end{pmatrix}$$
Riduciamo la matrice a gradino usando il mnetodo di Gauss. Una possibile riduzione è:
$$(A|B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & k & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & k & 7 \\ 0 & -7 & k-4 & 7 \\ 0 & 1-k & k-1 & 10 \end{pmatrix}$$
Possiamo ridurre ancora e otteniamo la matrice:
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & k & 7 \\ 0 & -7 & k-4 & 7 \\ 0 & 0 & (1-k)(k-11) & 7(11-k) \end{pmatrix}$$
Per $k = 1$ non esistono soluzioni del sistema.
Per $k = 11$ il sistema dato è equivalente al sistema
$$\begin{cases} 2x + y = 7 - 11z \\ -7y = 7 - 7z \end{cases}$$
che ammette infinite soluzioni:
$$x = 8 - 12t$$
$$y = t - 1$$
$$z = t \quad t \in R.$$
Se $k \neq 1, 11$ esiste una e una sola soluzione del sistema.
La soluzione è
$$x = -\frac{2}{k-1} \quad y = \frac{-3}{k-1} \quad z = \frac{7}{k-1}$$

Esercizio 2.
Il polinomio caratteristico della matrice è :

$$p(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità algebrica 2.
L'autospazio relativo all'autovalore -1 è

$$V_{-1} = \mathrm{Ker}(A+I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -13 & -13 & 13 \\ 10 & 10 & -10 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'autospazio relativo all'autovalore 1 è

$$V_1 = \mathrm{Ker}(A-I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -11 & -13 & 13 \\ 10 & 12 & -10 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 13 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Concludiamo che la matrice è diagonalizzabile e una base di autovettori è data

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 3.
La retta r ha equazione parametrica:

$$\begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -1 \end{cases}$$

mentre la retta s ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 3\mu \\ y = -\mu \\ z = -2\mu \end{cases}$$

La direzione di una generica retta incidente r e s è

$$v = \begin{pmatrix} 2\lambda - 3\mu + 5 \\ \lambda + \mu + 3 \\ 2\mu - 1 \end{pmatrix}$$

Affinché questa retta sia ortogonale a r deve essere $v \cdot (2,1,0) = 0$ mentre affinché sia ortogonale a s deve essere $v \cdot (3,-1,-2) = 0$. Queste due condizioni forniscono il sistema

$$\begin{cases} 5\lambda - 5\mu = -13 \\ 5\lambda - 14\mu = -14 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\lambda = -\frac{112}{45} \quad \mu = \frac{1}{9}.$$

Il punto di intersezione tra la retta r e la retta ortogonale ad r e s è:

$$P_1 = (\frac{1}{45}, \frac{23}{45}, -1)$$

mentre il punto di intersezione tra la retta s e la retta ortogonale ad r e s è:

$$P_2 = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{2}{9})$$

La distanza tra le rette r e s è pari alla distanza tra P_1 e P_2:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(P_{1,x} - P_{2,x})^2 + (P_{1,y} - P_{2,y})^2 + (P_{1,z} - P_{2,z})^2} = \frac{7}{\sqrt{45}}$$

Esercizio 4.
Scriviamo le matrici di f,g e $f \circ g$ rispetto alla base canonica di R^2.
La matrice della applicazione f è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per scrivere la matrice della applicazione g bisogna determinare $g(1,0)$ e $g(0,1)$.
Ora

$$\begin{aligned} (1,0) &= \frac{1}{2}\left[(1,1) + (1,-1)\right] \\ (0,1) &= \frac{1}{2}\left[(1,1) - (1,-1)\right], \end{aligned}$$

pertanto

$$\begin{aligned} g(1,0) &= \frac{1}{2}\left[g(1,1) + g(1,-1)\right] = \frac{1}{2}\left[(-1,r) + (r,1)\right] \\ g(0,1) &= \frac{1}{2}\left[g(1,1) - g(1,-1)\right] = \frac{1}{2}\left[(-1,r) - (r,1)\right], \end{aligned}$$

In definitiva

$$\begin{aligned} g(1,0) &= (\frac{r-1}{2}, \frac{r+1}{2}) \\ g(0,1) &= (-\frac{r+1}{2}, \frac{r-1}{2}) \end{aligned}$$

Risulta allora

$$M(g) = \begin{pmatrix} \frac{r-1}{2} & -\frac{r+1}{2} \\ \frac{r+1}{2} & \frac{r-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Infine la matrice di $(f \circ g)$ è:

$$M(f \circ g) = M(f) \cdot M(g) = \begin{pmatrix} r-2 & -(2r+1) \\ -\frac{1+3r}{2} & \frac{3-r}{2} \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice è

$$\det(M(f \circ g)) = -\frac{7}{2}(r^2 + 1) \neq 0 \quad \forall q \in R.$$

Pertanto $(f \circ g)$ è invertibile per ogni r in R. La matrice dell'inversa rispetto alla base canonica è:

$$M((f \circ g)^{-1}) = \begin{pmatrix} \dfrac{r-3}{7(r^2+1)} & -\dfrac{2(2r+1)}{7(r^2+1)} \\ \\ -\dfrac{1+3r}{r^2+1} & \dfrac{2(2-r)}{7(r^2+1)} \end{pmatrix}.$$

15. Geometria 9 luglio 1999

Rispondere, giustificando brevemente la risposta, ad **almeno due** delle prime quattro domande e risolvere il maggior numero degli esercizi seguenti.

Domande.

(a) Siano $v_1 = (-1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (0,2,1)$ in $\mathbf{R^3}$. Esiste una applicazione lineare $f : R^3 \to R^3$, tale che

$$F(v_1) = (1,0,0), F(v_2) = (0,1,0), F(v_3) = (0,0,1)?$$

(b) Esiste una matrice quadrata 2×2, A, diversa dalla matrice identica, tale che $AB = BA$ per ogni matrice, B, quadrata di ordine due?

(c) Siano $g : U \to V$ ed $f : V \to W$ applicazioni lineari.

$$Ker(g) \subset Ker(f \circ g)?$$

(d) Sia $f : R^3 \to R^3$ un'applicazione lineare tale che l'equazione

$$f(x_1, x_2, x_3) = (1,0,0)$$

abbia esattamente una soluzione. La applicazione f è invertibile?

Giustificare la risposta.

Esercizi.

1) Discutere e trovare le soluzioni del seguente sistema al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = 5 \\ 2x + ky + 3z = 0 \\ 2x + y + z = -4k. \end{cases}$$

2) Discutere la diagonalizzabilità della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

e trovare, se possibile, una base di autovettori.

3) Date le due rette

$$r : \begin{cases} x - 2y - z = -k \\ ky + z = -1 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 2y - kz = -1 \\ 2x - 3ky - z = -k - 1 \end{cases}$$

Determinare, in funzione del parametro k la loro posizione reciproca e, nel caso siano incidenti, calcolarne il punto di intersezione.

4) Sia data l'applicazione lineare $f : R^3 \to R^3$ definita da

$$f(1,1,0) = (0,0,1), \quad f(1,0,2) = (0,q,1), \quad f(-1,0,0) = (2,1,1),$$

con q parametro reale.
Calcolare $f(0,1,0)$ e i valori del parametro q per cui f è invertibile.
Determinare infine per quali valori di q si ha $f^{-1}(2,1,3) \neq \emptyset$.

Soluzione

Domande

(a) La risposta è no.
Infatti $v_3 = v_1 + v_2$ ma $F(v_3) = F(v_1 + v_2) \neq F(v_1) + F(v_2)$.

(b) La risposta è sì.
Per esempio la matrice nulla

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) La risposta è sì.
Infatti se $v \in \operatorname{Ker} g$ allora $g(v) = 0$ e dunque $(f \circ g)(v) = f(g(v)) = f(0) = 0$. Ne segue che $v \in \operatorname{Ker}(f \circ g)$.
Osserviamo che l'inclusione può essere propria, ovvero

$$Ker(g) \subset Ker(f \circ g)$$

Per esempio quando $f \equiv 0$ e $g \not\equiv 0$.

(d) La risposta è f è invertibile.
Infatti poiché la dimensione del dominio coincide con la dimensione del codominio abbiamo che

$$f \quad \text{invertibile} \iff f \quad \text{è iniettiva} \iff \operatorname{Ker} f = \{0\}$$

Quest'ultimo fatto è vero perché, se così non fosse, detta (x_1, x_2, x_3) la soluzione dell'equazione

$$f(x_1, x_2, x_3) = (1,0,0)$$

ogni terna della forma

$$(v_1, v_2, v_3) = (x_1, x_2, x_3) + (u_1, u_2, u_3)$$

con $(u_1, u_2, u_3) \in \operatorname{Ker} f$, sarebbe soluzione dell'equazione. Dall'assurdo segue che $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Esercizio 1.
La matrice dei coefficienti del sistema è la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & k & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si calcola facilmente il determinante di A, e risulta:

$$\det(A) = -(k+1)$$

Se $k \neq -1$ esiste una e una sola soluzione del sistema, dipendente dal parametro k, data da:

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & k & 3 \\ -4k & 1 & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = -8k + 15$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -4k & 1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = -20$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & k & 0 \\ 2 & 1 & -4k \end{pmatrix}}{\det(A)} = -10 + 12k$$

Se invece $k = -1$ il sistema ammette infinite soluzioni, date da:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = t \qquad\qquad t \in R. \end{cases}$$

Esercizio 2.
Gli autovalori della matrice sono:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -2 \qquad \text{con molteplicità } 2 \\ \lambda_2 &= 6 \qquad\ \ \text{con molteplicità } 1 \end{aligned}$$

Determiniamo la dimensione dei relativi autospazi.
Risulta:

$$V_{-2} = \operatorname{Ker}(A + 2I) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = -2$ risulta avere dimensione 2 pertanto la matrice è diagonalizzabile.
Inoltre

$$V_{-2} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'auospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 6$ risulta essere:

$$V_6 = \mathrm{Ker}\,(A - 6I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

e dunque ha dimensione 1. Inoltre

$$V_6 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Esercizio 3.
Il determinate della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -k \\ 0 & k & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -k & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -k-1 \end{pmatrix}$$

risulta uguale a $k^2(k-1)$. Pertanto per $k \neq 0, 1$ le rette sono sghembe.
Per $k = 1$ il rango della matrice è tre mentre il rango della matrice incompleta è uguale a due e pertanto le rette sono parallele.
Per $k = 0$ il rango della matrice è uguale al rango della matrice incompleta e uguale a tre. Le rette sono incidenti e il loro punto di intersezione è

$$P = (-1, 0, -1).$$

Esercizio 4.
Posto $v = (1, 1, 0)$, $u = (1, 0, 2)$ e $w = (-1, 0, 0)$ risulta evidente che

$$(0, 1, 0) = v + w$$

e, per la linearità di f, riesce:

$$\begin{aligned} f((0,1,0)) &= f(v) + f(w) = (0,0,1) + (2,1,1) \\ &= (2,1,2) \end{aligned}$$

La matrice di f rispetto alla base ordinata $\{v, u, w\}$ del dominio e rispetto alla base canonica del codominio è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & q & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il determinante di $M(f)$ è uguale a $-2q$ ed è diverso da zero se e solo se q è diverso da zero. Pertanto f è invertibile se e solo se $q \neq 0$.
Se $q \neq 0$ l'invertibilità di f assicura che $f^{-1}(2, 1, 3)$ sia diverso dall'insieme vuoto.
Se $q = 0$ abbiamo che

$$f^{-1}(2,1,3) \neq \emptyset \iff (2,1,3) \in Im(f) = \langle (0,0,1), (2,1,1) \rangle$$

cosa che è verificata se e solo se esistono $x, y \in R$ tali che

$$x(0,0,1) + y(2,1,1) = (2,1,3).$$

Scegliendo $x = 2$ e $y = 1$, l'equazione vettoriale scritta sopra risulta soddisfatta, pertanto

$$f^{-1}(2, 1, 3) \neq \emptyset \qquad \forall q \in R.$$

16. Geometria 21 settembre 1999

Rispondere, giustificando brevemente la risposta, ad **almeno due** delle prime quattro domande e risolvere il maggior numero degli esercizi seguenti.

Domande.

(a) Siano $v_1 = (-1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (0,2,1)$ in R^3. Esiste una applicazione lineare $f : R^3 \to R^3$, tale che

$$F(v_1) = (1,0,0), F(v_2) = (0,1,0), F(v_3) = (1,1,0)?$$

(b) Siano $g : U \to V$ ed $f : V \to W$ applicazioni lineari. È vero che

$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f \circ g)?$$

(c) Sia r una retta in R^3 e P un punto fuori di essa. Sia $\mathcal{F}$ il fascio di piani che contiene r e $\mathcal{G}$ l'insieme dei piani che contengono P. Esiste sempre un piano comune a $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$?

(d) Sia $f : R^3 \to R^3$ un'applicazione lineare tale che l'equazione

$$f(x_1, x_2, x_3) = (0,1,0)$$

abbia infinite soluzioni. La applicazione f è suriettiva?

Esercizi.

1) Discutere e trovare le soluzioni del seguente sistema al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} x + 2y + z + w & = -1 \\ x + y - z + 2w & = 1 \\ 2x + ky + kw & = 0 \\ -ky - 2z + kw & = 2 \end{cases}$$

2) Discutere la diagonalizzabilità della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 & -8 \\ -6 & -3 & -8 \\ 6 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

e trovare, se possibile, una base di autovettori.

3) Siano r_1, r_2 le rette in R^3 di equazione

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - t \\ z = 2 \end{cases}$$

Trovare il piano parallelo a r_1 ed r_2 ed equidistante da r_1 e r_2.

4) Dire per quali valori del parametro k l'applicazione $g : R^3 \to R^3$ definita da

$$g(x,y,z) = (x - y, z + 2x + y, k + z)$$

è lineare. Per tali valori scriverne la matrice rispetto alla base canonica, determinare $\mathrm{Ker}\, f$ e scriverne una base.

Soluzione

Domande

(a) La risposta è sì. Infatti esistono infinite applicazioni lineari con la proprietà richiesta. Tali applicazioni sono sono determinate dando l'immagine di un vettore $w \in R^3$ indipendente da v_1 e v_2.
(b) La risposta è no. Infatti siano, per esempio, f una applicazione non identicamente nulla e g la applicazione nulla. Allora $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ e $\mathrm{Im}(f \circ g) = \{0\}$
(c) La risposta è sì. Infatti esiste sempre un piano che contiene una retta e passa per un punto fuori di essa.
(d) La risposta è no. Infatti f non è iniettiva.

Esercizio 1.
La matrice dei coefficienti del sistema è la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & k & 0 & k \\ 0 & -k & -2 & k \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante della matrice A si può applicare lo sviluppo di Laplace ad una riga o una colonna della matrice oppure ridurla con il metodo di Gauss. Una possibile riduzione è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & k & 0 & k \\ 0 & -k & -2 & k \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} II - I \\ III + IV \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2k \\ 0 & -k & -2 & k \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$2I - III \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2-2k \\ 0 & -k & -2 & k \end{pmatrix} \rightsquigarrow II_c + IV_c \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 6-2k & 4 & 2-2k \\ 0 & 0 & -2 & k \end{pmatrix}$$

Il determinante di A risulta:

$$\det(A) = 4(k^2 - 4k + 3) = 4(k-3)(k-1)$$

Se $k \neq 3, 1$ esiste una e una sola soluzione del sistema.

La soluzione è

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & k & 0 & k \\ 2 & -k & -2 & k \end{pmatrix}}{\det(A)} = 0$$

$$y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & k \\ 0 & 2 & -2 & k \end{pmatrix}}{\det(A)} = 0$$

$$z = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -k & 0 & k \\ 0 & k & 2 & k \end{pmatrix}}{\det(A)} = -1$$

$$w = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -k & 0 & 0 \\ 0 & k & -2 & 2 \end{pmatrix}}{\det(A)} = 0$$

Se $k = 3$ il sistema dato è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z + w = -1 \\ -y - 2z + w = 2 \\ 4z = -4 \end{cases}$$

che ammette infinite soluzioni:

$$\begin{aligned} x &= -3t \\ y &= t \\ z &= -1 \\ w &= t \quad t \in R. \end{aligned}$$

Infine se $k = 1$ il sistema dato è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z + w = -1 \\ -y - 2z + w = 2 \\ z - w = -1 \end{cases}$$

che ammette infinite soluzioni:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -t \\ z &= -1+t \\ w &= t \quad t \in R. \end{aligned}$$

Esercizio 2.
Il polinomio caratteristico della matrice è :

$$p(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-3)^2$$

dumque gli autovalori sono $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 3$ con molteplicità algebrica 2.
L'autospazio relativo all'autovalore 3 è

$$V_3 = \text{Ker}(A-3I) = \text{Ker}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 8 \\ -6 & -6 & -8 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \{(x,y,z) \in R^3 \mid 3x+3y+4z=0\} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'autospazio relativo all'autovalore -1 è

$$V_{-1} = \text{Ker}(A-3I) = \text{Ker}\begin{pmatrix} -2 & -6 & -8 \\ -6 & -2 & -8 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in R^3 \mid \begin{cases} x+3y+4z=0 \\ y+z=0 \end{cases} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Concludiamo che la matrice è diagonalizzabile e una base di autovettori è data

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Esercizio 3.
La retta r_1 ha parametri direttori $(-1,1,2)$ mentre la retta r_2 ha parametri direttori $(3,-1,0)$. Un generico piano π di equazione cartesiana

$$ax+by+cz=d$$

risulta parallelo alle rette r_1 e r_2 se e solo se il vettore $n_\pi = (a,b,c)$ è ortogonale ai vettori $v_1 = (-1,1,2)$ e $v_2 = (3,-1,0)$. Devve essere allora verificato il sistema

$$\begin{cases} -a+b+2c=0 \\ 3a-b=0 \end{cases}$$

da cui
$$b = 3a \quad c = -a.$$
L'equazione cartesiana di π risulta allora essere
$$ax + 3ay - az = d.$$
La distanza del piano π dalla retta r_1 è
$$d(r_1, \pi) = \frac{|a - 6a - 3a + d|}{\sqrt{11a^2}} = \frac{|d - 8a|}{\sqrt{11a^2}}$$
mentre la distanza del piano *pi* dalla retta r_2 è
$$d(r_2, \pi) = \frac{|2a - 3a - 2a + d|}{\sqrt{11a^2}} = \frac{|d - 3a|}{\sqrt{11a^2}}.$$
Imponendo che le distanze siano uguali si ottiene
$$d = \frac{11}{2}a$$
pertanto l'equazione cartesiana di π è:
$$2x + 6y - 2z + 11 = 0.$$

Esercizio 4.

L'applicazione è lineare solo per $k = 0$. In questo caso la matrice della applicazione è
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Poichè il determinante di M è non nullo abbiamo che il nucleo della applicazione è costituito dal solo vettore nullo.

17. Geometria 3 febbraio 2000.

Domande.

(a) Sia M una matrice quadrata. Il determinante della trasposta M^t è uguale a :

$\boxtimes$ $\det(M)$ $\square$ $-\det(M)$ $\square$ $\dfrac{1}{\det(M)}$.

(b) Siano A,B, C matrici quadrate di ordine n. L'uguaglianza

$$A + B = A + C$$

implica:

$\boxtimes$ $B = C$ $\square$ $B = C$ se e solo se $\det(A) \neq 0$ $\square$ A è la matrice nulla.

(c) Siano v_1, v_2, v_3 e v_4 vettori in R^3. L'insieme

$$\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$$

è:

$\boxtimes$ linearmente dipendente $\square$ linearmente indipendente $\square$ possono verificarsi entrambi i casi.

(d) Sia $M(2 \times 2, R)$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali. Sia

$$S = \{A \in M(2 \times 2, R) \mid \det(A) \neq 0\}\,.$$

$\boxtimes$ S non è un sottospazio di $M(2 \times 2, R)$. $\square$ S è un sottospazio di $M(2 \times 2, R)$. $\square$ $S \cup \{0\}$ è un sottospazio di $M(2 \times 2, R)$.

(e) Sia $f:\ R^n \to R^m$ una applicazione lineare di matrice A. Se $n \leq m$, quale condizione deve verificare A perché f non sia iniettiva?

$\boxtimes$ $\text{rango}(A) < n$ $\square$ $\text{rango}(A) = n$ $\square$ $\text{rango}(A) > n$

(f) Siano $f,\ g:\ R^n \to R^n$ due applicazioni lineari. Sia S il sottoinsieme di R^n in cui f e g coincidono.

$\boxtimes$ S è un sottospazio di R^n $\square$ S non è un sottospazio di R^n $\square$ $S = \emptyset$

(g) Per quali valori del parametro reale k la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile?

$\boxtimes$ $k \neq 0$ $\square$ $k = 0$ $\square$ per ogni valore di k

(h) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale, e siano v_1 e v_2 autovettori di f relativi ad autovalori diversi. Il sottospazio generato da v_1 e v_2 ha dimensione:

$\boxtimes$ 2 $\square$ 1 $\square$ 0

(i) Siano π e π' due piani incidenti e sia $r : \pi \cap \pi'$. Sia π'' un piano ortogonale a π e π'. La retta r è :

☒ ortogonale a π'' ☐ parallela a π'' ☐ contenuta in π''

(j) Siano π e π' due piani ortogonali e sia $r : \pi \cap \pi'$. Sia s una retta in π ortogonale ad r e sia t una retta in π' distinta da r. Le rette s e t sono:

☒ ortogonali ☐ parallele ☐ complanari

Esercizi.

1) Discutere e trovare le soluzioni del seguente sistema al variare del parametro reale k:

$$\begin{cases} -2x + ky + 2z = 0 \\ -x + 3y + kz = k \\ -3x + 4y + 3z = 1 \end{cases}$$

2)Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} -9 & -15 & -10 \\ 2 & 4 & 2 \\ 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare autovalori e autospazi di A.
(b) Se possibile determinare una base di autovettori di A.

3) Sia π il piano passante per i punti $A = (-4, 0, 0)$, $B = (0, 1, -2)$ e $C = (-3, -2, 1)$ e sia r la retta ortogonale a π passante per il punto A. Sia s la retta per i punti $D = (1, 2, 0)$ ed $E = (1, 0, 0)$. Calcolare la distanza tra le rette r e s.

4) Si consideri l'applicazione lineare $g : R^3 \to R^3$ definita da

$$g(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_1, x_2).$$

Se ne scriva la matrice rispetto alla base canonica di R^3. Si trovi una funzione $f : R^3 \to R^3$ lineare e non identicamente nulla tale che $f \circ g$ sia l'applicazione nulla.

Soluzione

Esercizio 1.

La matrice associata al sistema è la matrice:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & k & k \\ -2 & k & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Una possibile riduzione a gradino è

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & k & k \\ -2 & k & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -k & -k \\ 2 & -k & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 3-3k & 1-3k \\ 0 & 8-3k & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3k-3 & 3k-1 \\ 0 & 8-3k & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 3k-3 & 3k-1 \\ 0 & 0 & (8-3k)(3k-3) & -9(k-1)(k-2) \end{pmatrix}$$

Per $k = \frac{8}{3}$ non esistono soluzioni del sistema. Infatti la matrice associata al sistema diventa

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

da cui si deduce facilmente che la matrice incompleta ha rango 2 mentre la matrice completa ha rango 3.
Per $k = 1$ la matrice associata al sistema diventa

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice completa e la matrice incompleta hanno entrambe rango 2 pertanto il sistema ammette infinite soluzioni date da:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{5} + t \\ y &= \frac{2}{5} \\ z &= t \quad t \in R. \end{aligned}$$

Se $k \neq 1, \frac{8}{3}$ la matrice completa e la matrice incompleta hanno entrambe rango 3 pertanto esiste una e una sola soluzione del sistema.
La soluzione è

$$x = \frac{6-2k}{8-3k} \quad y = \frac{2}{8-3k} \quad z = -\frac{3k-6}{8-3k}$$

Esercizio 2.
Il polinomio caratteristico della matrice è :

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)^2$$

dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica 1.

L'autospazio relativo all'autovalore 1 è

$$V_1 = \mathrm{Ker}(A - I)$$

e risulta

$$V_1 = \{(x, y, z) \in R^3 \mid -10x - 15y - 10z = 0\}$$

Ne segue allora

$$V_2 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Pioché $\dim(V_1) = 2$ la matrice è diagonalizzabile.
L'autospazio relativo all'autovalore 0 è

$$V_0 = \mathrm{Ker}(A)$$

e si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -9x - 15y - 10z = 0 \\ 3y - z = 0 \end{cases}$$

Risulta allora

$$V_0 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Infine una base di autovettori di A è data dall'insieme:

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (-5, 1, 3),\ v_2 = (0, 2, -3),\ v_3 = (1, 0, -1)\}.$$

Esercizio 3.
Il piano π ha equazione cartesiana:

$$\begin{vmatrix} x+4 & y & z \\ 4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\pi : x + 2y + 3z + 4 = 0.$$

La retta r ha come direzione il vettore, normale al piano π, $u = (1, 2, 3)$ e quindi ha equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 2t \\ z = 3t, \quad t \in R. \end{cases}$$

La retta s ha equazioni parametriche:

$$s : \begin{cases} x = 1 \\ y = 2l \\ z = 0, \quad l \in R. \end{cases}$$

Il vettore che unisce un punto generico della retta r con uno della retta s ha coordinate:

$$\begin{pmatrix} t-5 \\ 2t-2l \\ 3t \end{pmatrix}.$$

Per determinare i punti delle due rette che realizzano la distanza, imponiamo che tale vettore sia ortogonale alle due rette. Si ha:

$$\begin{cases} (t-5, 2t-2l, 3t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \\ (t-5, 2t-2l, 3t) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ l = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Allora $d(r,s) = d(Q_r, Q_s)$, dove Q_r e Q_s sono i punti di r e s rispettivamente, che si ottengono sostituendo i valori trovati dei parametri nelle equazioni parametriche delle rette. Risulta:

$$Q_r = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad Q_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$d(r,s) = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{90}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{10}.$$

Esercizio 4.
La matrice della applicazione g rispetto alla base canonica è:

$$M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una applicazione lineare $f : R^3 \to R^3$ è tale che $f \circ g = 0$ se e solo se $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
Ora, poiché è chiaramente $\dim \mathrm{Im}(g) = 2$, una qualsiasi applicazione lineare f tale che $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(f)$ (e quindi non identicamente nulla) ha la proprietà cercata. Una base di $\mathrm{Im}(g)$ è data dal'insieme:

$$\{(v_1 = (0,1,0),\ v_2 = (1,0,1)\}.$$

Si completa ad una base di R^3 aggiungendo il vettore $v_3 = (1, 0, 0)$. Consideriamo allora l'applicazione f definita da:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (0,0,0) \\ f(v_2) &= (0,0,0) \\ f(v_3) &= v_3 \end{aligned}$$

Tale applicazione f soddisfa la proprietà richiesta.
La sua matrice rispetto alla base canonica è: La matrice della applicazione g rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Come si può facilmente verificare risulta

$$M(f) \cdot M(g) = 0.$$

In alternativa si può procedere nel modo seguente. Osserviamo che

$$M(g) \cdot M(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $M(g)^3 = M(g)$. Segue che $M(g) \cdot (M(g)^2 - I) = 0$. Poiché $M(g)^2 \neq I$, la matrice $M(g)^2 - I$ soddisfa la proprietà cercata.

18. Geometria 1 marzo 2000.

Domande.

(a) Sia M una matrice 3×3 antisimmetrica, i. e. $M = -M^t$. Allora:

☒ $\det(M) = 0$ ☐ $\det(M) \neq 0$ ☐ possono verificarsi entrambi i casi.

(b) Sia A una matrice $n \times n$ con $\det(A) \neq 0$.
Il sistema
$$AX = 0$$
ammette

☒ una soluzione ☐ nessuna soluzione ☐ infinite soluzioni

(c) Siano V uno spazio vettoriale, u, v e w vettori di V linearmente dipendenti. I vettori
$$u \quad u+v \quad u+w$$
sono

☒ linearmente dipendenti ☐ linearmente indipendenti
☐ base di un sottospazio di dimensione tre

(d) Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti reali. Le soluzioni del sistema lineare:
$$AX = 0$$

☒ sono un sottospazio di R^n ☐ non sono un sottospazio di R^n
☐ sono un sottospazio di R^m

(e) Sia $f : R^n \to R^m$ una applicazione lineare di matrice A. Se $n \geq m$ quali condizioni deve verificare A perché f non sia suriettiva?

☒ $\text{rango}(A) < m$ ☐ $\text{rango}(A) = m$ ☐ $\text{rango}(A) > m$

(f) Siano w_1,w_2, w_3 i vettori di R^3 di coordinate:
$$w_1 = (-1, 2, 1) \quad w_2 = (3, -1, 2) \quad w_3 = (7, 1, 8)$$
Esistono applicazioni lineari $f : R^3 \to R^3$ tali che
$$f(w_1) = (1, 0, 0) \quad f(w_2) = (0, 1, 0) \quad f(w_3) = (0, 0, 1) \ ?$$

☒ nessuna ☐ una ☐ infinite

(g) La matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & -7 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}$$

☒ è diagonalizzabile ☐ non è diagonalizzabile
☐ ammette l'autovalore $\lambda = 5$

(h) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale e sia λ un suo autovalore. L'applicazione f^{-1} ammette come autovalore:

$\boxtimes\ \dfrac{1}{\lambda}$ $\square\ \lambda^2$ $\square\ 0$

(i) Siano r e s due rette parallele ad un piano π. Le rette r ed s sono:

$\square$ sghembe $\square$ parallele $\boxtimes$ possono verificarsi entrambi i casi

(j) Dati una retta r e un punto P nello spazio, quante rette esistono passanti per P e ortogonali ad r?

$\boxtimes$ infinite $\square$ una $\square$ nessuna

Esercizi.

1) Discutere e trovare le soluzioni del seguente sistema :

$$\begin{cases} 3x + ky + 2z = 0 \\ -x + 2y - 3z + kw = 1 \\ 5x + 2y + z = 2 \\ 2x + 3y - z + kw = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.

2) Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 7 & 12 & -12 \\ 4 & 9 & -8 \\ 8 & 16 & -15 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare autovalori e autospazi di A.
(b) Se possibile determinare una base di autovettori di A.

3) Sia r la retta di equazioni

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

e sia P il punto $P = (2, 1, 2)$. Siano π il piano contenente r e passante per P, π' il piano contenente r e ortogonale a π e π'' il piano ortogonale ad r e passante per P.
Detta s la retta di intersezione tra π' e π'', determinare le coordinate dei punti $Q \in s$ tali che

$$d(Q, r) = \sqrt{2} \cdot d(P, r)$$

4) Sia $f : R^3 \to R^2$ un'applicazione lineare. Sapendo che

$$f((1, 0, 0)) = (0, 1)$$

e che il nucleo di f contiene, tra gli altri, i vettori

$$(0, 2, 1) \quad \text{e} \quad (-1, 0, 1),$$

ricostruire f e scriverne la matrice rispetto alle basi canoniche di R^3 e R^2. Calcolare la dimensione del nucleo di f.

Soluzione

Esercizio 1.
La matrice associata al sistema è la matrice:

$$(A|B) = \begin{pmatrix} 3 & k & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & k & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

Una possibile riduzione a gradino, per righe, è

$$\begin{pmatrix} 3 & k & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & k & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & k & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & k & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & k & 1 \\ 3 & k & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} II \\ III \\ IV \\ I \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & k & 1 \\ 0 & 12 & -14 & 5k & 7 \\ 0 & 7 & -7 & 3k & 3 \\ 0 & k+6 & -7 & 3k & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ II+5I \\ III+2II \\ IV+3I \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & k & 1 \\ 0 & 12 & -14 & 5k & 7 \\ 0 & 0 & 14 & k & -13 \\ 0 & 0 & 14k & -5k^2+6k & -7k-6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 12III-7II \\ 12IV-(k+6)II \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & k & 1 \\ 0 & 12 & -14 & 5k & 7 \\ 0 & 0 & 14 & k & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -6k^2+6k & 6(k-1) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ IV-kIII \end{matrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & k & 1 \\ 0 & 12 & -14 & 5k & 7 \\ 0 & 0 & 14 & k & -13 \\ 0 & 0 & 0 & k(1-k) & k-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \frac{1}{6}IV \end{matrix}$$

Per $k = 0$ non esistono soluzioni del sistema. Infatti la matrice associata al sistema diventa

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & -14 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 14 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'ultima riga corrisponde all'equazione $0 = -1$ manifestamente falsa.

Per $k = 1$ la matrice associata al sistema diventa

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 12 & -14 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 14 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice completa e la matrice incompleta hanno entrambe rango 3 pertanto il sistema ammette infinite soluzioni date da:

$$\begin{aligned} x &= -3t - 2 \\ y &= 6 + 7t \\ w &= -13 - 14t \\ z &= t \qquad\qquad\qquad\qquad t \in R. \end{aligned}$$

Se $k \neq 0, 1$ la matrice completa e la matrice incompleta hanno entrambe rango 4 pertanto esiste una e una sola soluzione del sistema.
La soluzione è

$$x = \frac{4}{7}, \quad y = 0, \quad z = -\frac{6}{7}, \quad w = -\frac{1}{k}.$$

Esercizio 2.
Il polinomio caratteristico della matrice è :

$$p(x) = \det(A - xI) = -(x-1)^2(x+1),$$

dunque gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica 2 e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità algebrica 1.
L'autospazio relativo all'autovalore 1 è

$$V_1 = \mathrm{Ker}(A - I)$$

e risulta

$$V_1 = \{(x, y, z) \in R^3 \; | x + 2y - 2z = 0\}$$

Ne segue allora

$$V_1 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Poiché $\dim(V_1) = 2$ la matrice è diagonalizzabile.
L'autospazio relativo all'autovalore -1 è

$$V_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I)$$

e si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 8x + 12y - 12z = 0 \\ 4x + 10y - 8z = 0 \\ 8x + 16y - 14z = 0. \end{cases}$$

La matrice completa associata a questo sistema è:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \\ 4 & 8 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una possibile riduzione a gradino, per righe, è

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \\ 4 & 8 & -7 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il sistema associato all'ultima matrice è il sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 3z = 0 \\ 2y - z = 0, \end{cases}$$

pertanto

$$V_{-1} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Infine una base di autovettori di A è data dall'insieme:

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (3, 2, 4),\ v_2 = (2, 0, 1),\ v_3 = (2, -1, 0)\}.$$

Esercizio 3.
Il fascio di piani per r ha equazione:

$$\lambda(x - 1) + \mu(y - z) = 0,$$

ossia

$$\lambda x + \mu y - \mu z - \lambda = 0.$$

Per trovare π imponiamo il passaggio per P e otteniamo:

$$\pi : x + y - z = 1.$$

Per trovare π' imponiamo che il vettore normale al piano sia ortogonale al vettore normale a π. Quest'ultimo ha coordinate $(1, 1, -1)$, pertanto imponiamo:

$$(\lambda, \mu, -\mu) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0.$$

L'equazione di π' è :

$$\pi' : 2x - y + z - 2 = 0.$$

Il piano π'' ha come vettore normale il vettore direzione di r, che è $(0, 1, 1)$, e passa per P, dunque:

$$\pi'' : y + z - 3 = 0.$$

La retta s ha equazione cartesiana:

$$s : \begin{cases} 2x - y + z - 2 = 0 \\ y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

e equazioni parametriche:

$$s:\begin{cases} x=\frac{5}{2}-t \\ y=3-t \\ z=t, \quad t\in R. \end{cases}$$

I punti Q avranno quindi coordinate

$$Q=\begin{pmatrix} \frac{5}{2}-t \\ 3-t \\ t \end{pmatrix}.$$

Ora:

$$\sqrt{2}\cdot d(P,r)=\sqrt{2}\cdot d(P,\pi')=\sqrt{2}\cdot\frac{|4-1+2-2|}{\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{3}}$$

e

$$d(Q,r)=d(Q,\pi)=\frac{|\frac{5}{2}-t+3-t-t|}{\sqrt{3}}=\frac{|\frac{11}{2}-3t|}{\sqrt{3}}.$$

I punti cercati sono quelli per i quali:

$$|\frac{11}{2}-3t|=3$$

ovvero

$$t=\frac{17}{6},\frac{5}{6}.$$

Otteniamo quindi i punti:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \\ \frac{1}{6} \\ \\ \frac{17}{6} \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \\ \frac{13}{6} \\ \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4.

I tre vettori $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(0,2,1)$ e $v_3=(-1,0,1)$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di R^3. Risulta infatti

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}=2\neq 0.$$

Le posizioni $f((1,0,0))=(0,1)$ e $\{(0,2,1),(-1,0,1)\}\subset \mathrm{Ker}(f)$ individuano l'applicazione lineare $f:R^3\to R^2$. Evidentemente è $\dim(\mathrm{Ker}(f))=2$.
Procuriamoci ora $f(e_1)$, $f(e_2)$ e $f(e_3)$, essendo come al solito $\{e_1,e_2,e_3\}$ la base canonica di R^3.
Come si può ricavare facilmente è $e_1=v_1$, $e_2=-\frac{1}{2}v_1+\frac{1}{2}v_2-\frac{1}{2}v_3$ e $e_3=v_1+v_3$, pertanto $f(e_1)=(0,1)$, $f(e_2)=(0,-\frac{1}{2})$, $f(e_3)=(0,1)$.
La matrice richiesta è:

$$M_{\underline{e}_{R^3},\underline{e}_{R^3}}(f)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

19. Geometria 20 giugno 2000.

Domande.

(a) Siano A, B, C matrici $n \times n$ a coefficienti reali. L'uguaglianza

$$A \cdot B = A \cdot C$$

implica

☒ $B = C$ se $\det(A) \neq 0$ ☐ $B = C$ ☐ $\det(B) = \det(C)$

(b) Sia A una matrice $n \times n$ con $\det(A) = 0$.
Il sistema

$$AX = 0$$

ammette

☒ infinite soluzioni ☐ nessuna soluzione ☐ una soluzione

(c) Siano $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di R^3. L'insieme:

$$\mathcal{E} = \{v_1 + v_2, v_1 + 2v_3, v_3 - v_2\}$$

☒ è una base di R^3 ☐ non è una base di R^3 ma genera R^3

☐ genera un sottospazio proprio di R^3

(d) Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti reali. Le soluzioni del sistema lineare:

$$AX = 0$$

☒ sono un sottospazio di R^n ☐ non sono un sottospazio di R^n

☐ sono un sottospazio di R^m

(e) Siano V e W spazi vettoriali con $\dim(V) = 1$. Sia $f : W \to V$ una applicazione lineare non nulla. Allora

☒ f è suriettiva ☐ f è iniettiva ☐ f è iniettiva e suriettiva

(f) Siano U e W i sottospazi di R^4 generati da:

$$U = \langle(-1, 0, 2, 0), (0, 3, 0, 1)\rangle \quad W = \langle(0, 0, 1, 0), (2, 3, -4, 1)\rangle.$$

La dimensione di $U + W$ è :

☒ tre ☐ quattro ☐ due

(g) Per quali valori del parametro reale k la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2k & 3 & 5 \\ 0 & k & 7 \\ 0 & 0 & 3k \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile?

☒ $k \neq 0$ ☐ per ogni valore di k ☐ $k = 0$

(h) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale e sia v un autovettore relativo all'autovalore λ. Il vettore $\lambda \cdot v$ è un autovettore relativo all'autovalore:

☒ λ ☐ λ^2 ☐ 0

(i) Siano r una retta parallela ad un piano π ed s una retta incidente il piano π. Le rette r ed s sono:

☐ sghembe ☐ incidenti ☒ possono verificarsi entrambi i casi

(j) Siano π e π' due piani paralleli e distinti. Sia π'' un piano incidente π e π' e siano $r : \pi \cap \pi''$ e $t : \pi' \cap \pi''$. Le rette r e t sono:

☒ parallele ☐ sghembe ☐ incidenti

Esercizi.

1) Discutere e trovare le soluzioni del seguente sistema :

$$\begin{cases} 2x + ky + 3z = 0 \\ -x + 3y + z + kw = 1 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.

2) Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare autovalori e autospazi di A.
(b) Se possibile determinare una base di autovettori di A.

3) Sia r la retta passante per i punti $A = (1, 0, 1)$ e $B = (3, -1, 2)$ e sia π il piano ortogonale ad r che passa per il punto A.
Sia s la retta di intersezione tra il piano π e il piano π' di equazione

$$\pi' \ : \ x + 2y - 3z = 0$$

e sia l la retta parallela ad s passante per il punto $C = (1, 1, 0)$.
Si dica se le rette r, s e l sono a due a due complanari, motivando la risposta.

4) Sia $h : \ R^3 \to R^3$ definita da

$$h(x_1, x_2, x_3) = (0, x_1, x_2).$$

Provare che si tratta di una applicazione lineare e quindi scriverne la matrice rispetto alla base canonica di R^3. Calcolare $h \circ h \circ h$. Provare che l'applicazione $id_{R^3} - h$ è invertibile.

Soluzione

Esercizio 1.
La matrice completa associata al sistema è la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & k & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Una possibile riduzione a gradino per righe è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 2 & k & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & k & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & k & 1 \\ 2 & k & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 4 & 3k & 5 \\ 0 & 3k+4 & 7 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3k & 0 \\ 0 & 3k+4 & 7 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4k-11 & 0 & 5k+16 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$$

Per $k \neq 0, \frac{11}{4}$ la matrice dei coefficienti del sistema ha rango (massimo) 4, sicchè si ha una sola soluzione:

$$x = \frac{k-24}{4k-11}, \quad y = -\frac{17}{4k-11}, \quad z = \frac{5k+16}{4k-11}, \quad w = 0.$$

Per $k = 0$ le matrici completa e incompleta del sistema hanno entrambe rango 3 sichè abbiamo infinite soluzioni, dipendenti da un parametro. Precisamente:

$$x = \frac{24}{11}, \quad y = \frac{17}{11}, \quad z = -\frac{16}{11}, \quad w = t, \qquad t \in R.$$

Infine per $k = \frac{11}{4}$ non esistono soluzioni del sistema. Infatti la matrice associata diventa :

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{11}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

L'equazione corrispondente alla terza riga è manifestamente falsa.

Esercizio 2.
Il polinomio caratteristico della matrice è :

$$p(x) = (x+8)(x-1)^2$$

dunque gli autovalori sono $x_1 = 1$ con molteplicità algebrica 2 e $x_2 = -8$ con molteplicità algebrica 1.
L'autospazio relativo all'autovalore 1 è

$$V_1 = \mathrm{Ker}(A - I)$$

e risulta

$$V_1 = \{(x, y, z) \in R^3 \; |2x - 2y + z = 0\}$$

Ne segue allora

$$V_1 = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Poiché $\dim(V_1) = 2$ la matrice è diagonalizzabile.
L'autospazio relativo all'autovalore -8 è

$$V_{-8} = \mathrm{Ker}(A + 8I)$$

e si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 5x + 4y - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

Risulta allora

$$V_{-8} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Infine una base di autovettori di A è data dall'insieme:

$$\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, -2),\ v_2 = (0, 1, 2),\ v_3 = (2, -2, 1)\}.$$

Esercizio 3.
La retta r ha equazione

$$r : \begin{cases} x & = 1 + 2t \\ y & = -t \\ z & = 1 + t, \quad t \in R, \end{cases}$$

e il piano π ha equazione

$$\pi : 2x - y + z - 3 = 0.$$

La retta s ha rappresentazione cartesiana

$$s : \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + 2y - 3z = 0, \end{cases}$$

e rappresentazione parametrica

$$s : \begin{cases} x & = \frac{6}{5} + t' \\ y & = -\frac{3}{5} + 7t' \\ z & = 1 + 5t', \quad t' \in R. \end{cases}$$

La retta l è pertanto:

$$l : \begin{cases} x & = 1 + t'' \\ y & = 1 + 7t'' \\ z & = 5t'', \quad t'' \in R. \end{cases}$$

Le rette l e s sono complanari perchè parallele.
Le rette r ed s sono ortogonali e quindi sono complanari se e solo se si intersecano in un punto, ovvero se e solo se $A \in \pi'$, ma questo non accade.
Le rette l ed r sono complanari se e solo se si intersecano in un punto, ma il sistema formato dalle loro equazioni non ha soluzioni pertanto non sono complanari.
Esercizio 4.
Proviamo che sussistono le seguenti uguaglianze:

$$h((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = h(x_1, x_2, x_3) + h(y_1, y_2, y_3)$$
$$h(a(x_1, x_2, x_3)) = ah(x_1, x_2, x_3),$$

per ogni $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)$ in R^3 e per ogni $a \in R$.
La prima uguaglianza è vera perchè

$$(0, x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (0, x_1, x_2) + (0, y_1, y_2),$$

la seconda perchè

$$(0, ax_1, ax_2) = a(0, x_1, x_2).$$

La matrice rispetto alla base canonica di R^3 è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice di $h \circ h \circ h$ è A^3 ed è, con facile calcolo,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'applicazione (lineare !) $id_{R^3} - h$ ha matrice $I - A$ rispetto alla base canonica di R^3:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\det(I - A) = 1 \neq 0$, da cui segue che $id_{R^3} - h$ è invertibile.

20. Geometria 12 luglio 2000

Domande.

(a) Siano A e B due matrici $n \times n$ a coefficienti reali. Il determinante della matrice prodotto
$$A \cdot B$$
è uguale a

☒ $\det(A) \cdot \det(B)$ ☐ $\det(A) + \det(B)$

☐ non si può calcolare solo in funzione di $\det(A)$ e $\det(B)$

(b) Siano A e B due matrici $n \times n$ a coefficienti reali. Il determinante della matrice somma
$$A + B$$
è uguale a

☐ $\det(A) + \det(B)$ ☐ $\det(A) \cdot \det(B)$

☒ non si può calcolare solo in funzione di $\det(A)$ e $\det(B)$

(c) Siano $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di R^3. L'insieme:
$$\mathcal{E} = \{2v_1 + 5v_2 + 4v_3, 3v_1 - v_2 + v_3, v_1 + 2v_2 + v_3\}$$

☒ è una base di R^3

☐ è linearmente indipendente ma non genera R^3

☐ non è linearmente indipendente

(d) Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare e iniettiva. Siano $v_1, v_2, \ldots v_n$ in V vettori linearmente indipendenti. I vettori:
$$f(v_1), f(v_2), \ldots f(v_n)$$
sono

☒ linearmente indipendenti ☐ linearmente dipendenti

☐ possono verificarsi entrambi i casi

(e) Siano $f, g : R^n \to R^m$ applicazioni lineari e sia $m < n$. Esistono vettori non nulli sui quali f e g coincidono?

☒ esistono ☐ non esistono

☐ possono verificarsi entrambi i casi

(f) Sia $f : R^2 \to R^2$ una applicazione lineare di matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
Risulta:

☒ $f \circ f = id_{R^2}$ ☐ $f \circ f = 0$ ☐ $f \circ f = f$

(g) Sia V uno spazio vettoriale e f l'endomorfismo di V definito da

$$f(v) = kv \qquad k \in R.$$

L'endomorfismo f è diagonalizzabile

$\boxtimes$ per ogni valore di k $\square$ $k \neq 0$ $\square$ $k \neq 0, 1$

(h) Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale e siano v_1 e v_2 due autovettori relativi ad autovalori distinti. Il vettore

$$v_1 + v_2$$

$\boxtimes$ non è un autovettore di f $\square$ è un autovettore di f

$\square$ $\dim(\text{Span}\{v_1, v_2\}) = 1$

(i) Siano r e t due rette incidenti e sia s una retta incidente t. Le rette r ed s sono

$\square$ complanari $\square$ sgembe $\boxtimes$ possono verificarsi entrambi i casi

(j) Siano π un piano e r una retta ortogonale a π. Sia $\mathcal{G}$ il fascio di piani per r. Esistono piani di $\mathcal{G}$ paralleli a π?

$\boxtimes$ nessuno $\square$ uno $\square$ infiniti

Esercizi.

1) Discutere e trovare le soluzioni del seguente sistema :

$$\begin{cases} -3y + 2z + 3w = -1 \\ kx + 3y - z + 3w = 1 \\ 2y + z + kw = 2 \\ -y + 3z + 4w = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale k.

2) Sia A la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & 2 \\ 1 & -8 & 4 \\ 2 & -14 & 7 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinare autovalori e autospazi di A.
(b) Se possibile determinare una base di autovettori di A.

3) Sia π il piano di equazione

$$\pi \; : \; x + 2y + z - 4 = 0$$

e sia π' il piano per l'origine $O = (0, 0, 0)$ e ortogonale alla retta s di equazioni

$$s \; : \; \begin{cases} x + 2y - z - 3 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

Dette r la retta di intersezione tra π e π' ed l la retta di equazioni parametriche

$$l \ : \ \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

si studi la posizione reciproca di r e l.

4) Sia $f : \ R^4 \to R^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 + 2x_3 + 3x_4, x_1 + x_3 + 2x_4, 2x_1 + x_2 + x_4, 3x_1 + 2x_2 + x_3).$$

Scrivere la matrice di f rispetto alla base canonica di R^4. Provare che l'applicazione f è invertibile e trovare la controimmagine di $(18, 10, 2, 0)$.

Soluzione

Esercizio 1.
La matrice completa associata al sistema è la matrice

$$\begin{pmatrix} k & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & k & 2 \end{pmatrix}.$$

Riducendola a gradino si ottiene :

$$\begin{pmatrix} k & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & k & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} k & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 7 & k+8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per $k \neq 0, 1$ le matrici completa e incompleta associate al sistema hanno entrambe rango 4 sicchè il sistema ha una unica soluzione:

$$x = -\frac{4}{7k}, \quad y = \frac{5}{7}, \quad z = \frac{4}{7}, \quad w = 0.$$

Per $k = 1$ la matrice completa associata al sistema diventa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le matrici completa e incompleta associate al sistema hanno entrambe rango 3 dunque il sistema ammette infinite soluzioni:

$$\begin{cases} x &= -\frac{33}{7}t - \frac{4}{7} \\ y &= \frac{1}{7}t + \frac{5}{7} \\ z &= -\frac{9}{7}t + \frac{4}{7} \\ w &= t, \qquad t \in R. \end{cases}$$

Infine per $k = 0$ la matrice completa diventa

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riducendola ulteriormente si trova:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 15 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 15 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 15 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'ultima riga della matrice corrisponde all'equazione (manifestamente falsa)

$$0 = 1$$

da cui segue che per $k = 0$ il sistema non ha soluzioni.

Esercizio 2.

Il polinomio caratteristico della matrice A è:

$$p(x) = -(x+1)(x-2)^2.$$

Gli autovalori di A sono $x_1 = -1$ con molteplicità algebrica 1 e $x_2 = 2$ con molteplicità algebrica 2.

L'autospazio relativo all'autovalore -2 è

$$\begin{aligned} V_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I) &= \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ x - 10y + 4z = 0 \quad \text{e} \quad 6y - 3z = 0\} \\ &= \{(2t, t, 2t) \ : \ t \in R\} \\ &= \mathrm{Span}\{(2, 1, 2)\}. \end{aligned}$$

L'autospazio relativo all'autovalore -1 è

$$\begin{aligned} V_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I) &= \{(x, y, z) \in R^3 \ : \ x - 7y + 4z = 0 \quad \text{e} \quad 3y - 2z = 0\} \\ &= \{(2t, 2t, 3t) \ : \ t \in R\} \\ &= \mathrm{Span}\{(2, 2, 3)\}. \end{aligned}$$

La matrice A non è diagonalizzabile perchè

$$\dim(V_{-1}) + \dim(V_2) = 2 \neq \dim(R^3),$$

pertanto non si può trovare una base di autovettori di A.

Esercizio 3

Il vettore direttore di s è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

e quindi il piano π‘ ha equazione

$$\pi' : x + 2y + 5z = 0.$$

La retta r è pertanto

$$r : \begin{cases} x + 2y + +z - 4 = 0 \\ x + 2y + 5z = 0, \end{cases}$$

ossia:

$$r : \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Quindi le rette r e l non sono parallele; non avendo punti in comune sono allora sghembe.

Esercizio 4

La matrice di f rispetto alla base canonica di R^4 è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Riduciamo a scala $M(f)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = M_r(f),$$

matrice ridotta di f. È noto che $\det(M(f)) \neq 0 \iff \det(M_r(f)) \neq 0$, perciò essendo $\det(M_r(f)) = -24$, è $\det(M(f)) \neq 0$ e quindi f è invertibile.

La controimmagine di $(18, 10, 2, 0)$ sarà pertanto costituita da un solo vettore, l'unica soluzione del sistema

$$M(f) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice completa associata al sistema appena scritto è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 18 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che, ridotta a gardino, diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 18 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -24 \end{pmatrix}.$$

L'ultima matrice corrisponde al sistema:

$$\begin{cases} x + 2z + 2w = 10 \\ y + 2z + 3w = 18 \\ 4z + 6w = 36 \\ -6w = -24 \end{cases}$$

che ammette l'unica soluzione

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 3 \\ w = 4. \end{cases}$$

La controimmagine di $(18, 10, 2, 0)$ è quindi il vettore $(-1, 0, 3, 4)$.

Indice