Esercitazioni del 13-15 Marzo di Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2017/2018

Matteo Bonini
matteo.bonini@unitn.it

Esercizio 1
Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Scrivere la forma bilineare b e la forma quadratica Q associate ad A rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$.

(ii) La forma b definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$?

(iii) Calcolare il radicale di b.

(iv) Verificare che $e_1 = (1,0,0,0)$ è non isotropo per b e trovare le equazioni cartesiane e parametriche del sottospazio ortogonale a e_1 rispetto a b.

(v) Calcolare la segnatura di b.

(vi) Esibire esplicitamente una base diagonalizzante per b e trovare la base che porta in forma canonica Q.

Soluzione dell'esercizio 1 *(i)* Per definizione

$$b(x,y) = x^t A y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$b(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_1 + x_4y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_2 + x_3y_2 + x_2y_3 + 2x_4y_3 + x_1y_4 + 2x_3y_4 + x_4y_4.$$

$$Q(x) = b(x,x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_4 + 2x_2x_3 + 4x_3x_4.$$

(ii) Visto che b è simmetrica quello che ci resta da testare per vedere se b è un prodotto scalare è il fatto che sia definita positiva. Calcoliamo i suoi autovalori

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -\lambda & 2\\ 0 & 2 & 1-\lambda\end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & -\lambda & 2\\ 1 & 2 & 1-\lambda\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}2 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
=&(1-\lambda)(2-\lambda)\det\begin{pmatrix}-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{pmatrix} - (1-\lambda)\det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1-\lambda\end{pmatrix} - 4\det\begin{pmatrix}-\lambda & 2\\ 2 & 1-\lambda\end{pmatrix}\\
&+ 2\det\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix}1 & -\lambda\\ 0 & 2\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= (1-\lambda)(2-\lambda)(\lambda(\lambda-1)-4) - (1-\lambda)^2 - 4(\lambda(\lambda-1)-4) - 4 - 4 - (\lambda(\lambda-2)-1) =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-4) - (\lambda^2-2\lambda+1) - 4(\lambda^2-\lambda-4) - 8 - (\lambda^2-2\lambda-1) =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-4) - \lambda^2 + 2\lambda - 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda + 16 - 8 - \lambda^2 + 2\lambda + 1 =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-4) - 6\lambda^2 + 8\lambda + 8 =$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-4) - 2(3\lambda+2)(\lambda-2) =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda + 4 - 6\lambda - 4) = (\lambda-2)(\lambda^3 - 2\lambda^2 - 9\lambda) =$$

$$= \lambda(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-9) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-1+\sqrt{10})(\lambda-1-\sqrt{10})$$

Da questo ricaviamo che gli autovalori di A non sono tutti positivi e quindi b non è un prodotto scalare.

(iii) Notiamo per prima cosa che il rango di A è 3, quindi la forma è degenere ed in particolare la dimensione del suo radicale sarà uguale ad 1. Cerchiamo quindi lo spazio $N = \{w \in \mathbb{R}^4 \mid b(v,w) = 0,\ \forall v \in \mathbb{R}^4\}$. Quello che stiamo cercando sono le soluzioni del sistema omogeneo associato ad A. Sappiamo che il rango di A è 3, quindi il generatore del radicale è dato da $(3,-2,-2,1)^t$. Nota che questo è anche autovettore associato all'autovettore 0.

(iv) Chiaramente e_1 è non isotropo dato che $Ae_1 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}^t \neq 0$.

$$0 = b(e_1, y) = y_1 + 2y_2 + y_4$$

Da cui otteniamo semplicemente che l'equazione cartesiana del sottospazio ortogonale ad e_1 è $x + y + t = 0$ mentre l'equazione parametrica è data da

$$\begin{cases} x = w_1\\ y = w_2\\ z = w_3\\ t = -w_1 - w_2\end{cases}$$

(v) Dai conti fatti in precedenza sappiamo che la segnatura di A è $(2,1)$.

(vi) Visto che gli autovalori sono tutti distinti il teorema spettrale ci garantisce che una base diagonalizzante per b è costituita dagli autovettori di A. L'autovettore corrispondente a $\lambda_1 = 2$ è $(-1,-2,2,3)$. L'autovettore corrispondente a $\lambda_2 = 1+\sqrt{10}$ è $(\frac{1}{3}(1+\sqrt{10}), \frac{1}{6}(7+\sqrt{10}), \frac{1}{6}(-1+2\sqrt{10}), 1)$. L'autovettore corrispondente a $\lambda_3 = 1-\sqrt{10}$ è $(\frac{1}{3}(1-\sqrt{10}), \frac{1}{6}(7-\sqrt{10}), \frac{1}{6}(-1-2\sqrt{10}), 1)$. L'autovettore corrispondente a $\lambda_4 = 0$ è $(3,-2,-2,1)$. La base ortonormale che andiamo cercando è data da questi autovettori normalizzati ed è quindi data da $\widetilde{v_1} = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{v_1}{3\sqrt{2}}$, $\widetilde{v_2} = \frac{v_2}{||v_2||}$, $\widetilde{v_3} = \frac{v_3}{||v_3||}$ e $\widetilde{v_4} = \frac{v_4}{||v_4||} = \frac{v_4}{3\sqrt{2}}$.

La basa ortogonale che ci porta nella forma di Sylvester e dalla quale possiamo quindi trovare la forma canonica di Q è data dalla base ortonormale appena ricavata dove i vettori corrispondenti ad autovalori non nulli sono moltiplicati per lo scalare $\frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}}$.

Esercizio 2
Esercizio 1 della provetta del 31/05/2017 del corso di Geometria A.

Soluzione dell'esercizio 2
Si vedano le soluzioni in rete sulla pagina web del corso.

Esercizio 3
Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo con un sistema di coordinate cartesiane (x, y, z) di centro $\mathcal{O}$. Si considerino i punti $P_k = (3, 0, k)$, $Q = (2, 1, 2)$ e la retta

$$r : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}.$$

Si indichi s_k la retta passante per P_k e Q.

(i) Si dica per quali valori del parametro k si ha $r||s_k$.

(ii) Per i valori di k per cui r ed s sono incidenti, ricavare il punto di intersezione R_k tra le due rette e l'angolo convesso formato dalle due rette.

(iii) Per i valori di k per cui r ed s_k sono incidenti, siano A e B due punti rispettivamente su s_k e su r in modo che:

- Il triangolo $A\widehat{B}R_k$ sia retto in B.
- $d(A, R_k) = 7\sqrt{51}$.
- L'ascissa di A sia positiva.

Ricavare le coordinate dei punti e calcolare l'area del triangolo $A\widehat{B}R_k$.

Soluzione dell'esercizio 3
La giacitura della retta s_k è generata dal vettore che unisce Q a P_k ovvero dal vettore

$$P_k - Q = (3, 0, k) - (2, 1, 2) = (1, 0, k - 2).$$

Abbiamo quindi $G(s_k) =< (1, -1, k - 2) >$. A partire dalle equazioni parametriche per s_k

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + (k - 2)t \end{cases}$$

ricaviamo le equazioni cartesiane della retta s_k

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + (k - 2)t \end{cases} \begin{cases} x - 2 - t = 0 \\ y - 1 + t = 0 \\ z - 2 - (k - 2)t = 0 \end{cases} \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ z - (k - 2)x + 2(k - 2) - 2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ z - (k - 2)x - 2k - 6 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo le equazioni parametriche della retta r

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x + y + x - 2 = 0 \\ z = -x + 2 \end{cases} \begin{cases} y = -2x + 2 \\ z = -x + 2 \end{cases} \begin{cases} x = t \\ y = -2t + 2 \\ z = -t + 2 \end{cases}$$

abbiamo anche trovato la giacitura di r: $G(r) =< (1, -2, -1) >$. Le rette r e s_k sono parallele se e solo se i generatori delle giaciture sono proporzionali, calcoliamo quindi

$$Rk \begin{pmatrix} 1 & -1 & k - 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

abbiamo quindi che le due rette non sono mai parallele. Per ricavare la posizione reciproca di r e s_k possiamo vedere se si intersecano. Le intersezioni si trovano come soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ z-(k-2)x-2k-6=0 \\ x+y-z=0 \\ x+z-2=0 \end{cases} \begin{cases} x+y-3=0 \\ z-(k-2)x-2k-62=0 \\ x+z-2=0 \\ z=3 \end{cases} \begin{cases} x+y-3=0 \\ z-(k-2)x-2k-6=0 \\ x=-1 \\ z=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z-(k-2)x-2k-6=0 \\ x=-1 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases} \begin{cases} 3+k-2-2k-6=0 \\ x=-1 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases} \begin{cases} -k-5=0 \\ x=-1 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases}$$

che ha soluzione se e solo se $k=-5$. Abbiamo quindi che r e s_{-5} si intersecano in $R_{-5}=(-1,4,3)$ mentre r e s_k sono sghembe per $k \neq -5$. Per ricavare l'angolo tra le rette r e s_{-5} calcoliamo il coseno dell'angolo formato tra le direttrici delle rette. Questo è

$$cos(\theta) = \frac{<(1,-2,-1),(1,-1,-7)>}{||((1,-2,-1)||\,||(1,-1,-7)||} = \frac{10}{\sqrt{6}\sqrt{51}}$$

quindi l'angolo cercato è $\theta = arccos(\frac{10}{\sqrt{6}\sqrt{51}})$. I punti di s_{-5} a distanza $7\sqrt{11}$ da R_{-5} sono tali che

$$7\sqrt{51} = d(R_{-5}, R_{-5}+t(1,-1,-7)) = |t|\sqrt{51}$$

e quindi $t=\pm 7$. Per $t=-7$ abbiamo $R_{-5}-7(1,-1,-7)=(-1,4,3)-7(1,-1,-7)=(-8,12,52)$ e quindi l'ascissa del punto non è positiva come richiesto, per $t=7$ troviamo invece $A=R_{-5}+7(1,-1,-7)=(6,-3,-46)$. Conosciamo dal punto precedente l'angolo in R_{-5} deve valere da cui ricaviamo facilmente che i cateti del triangolo sono lunghi rispettivamente $7\frac{10}{\sqrt{6}}$ e $7\frac{\sqrt{103}}{\sqrt{3}}$. L'area perciò vale $\frac{245\sqrt{103}}{\sqrt{6}\sqrt{3}}$. Il punto B è la proiezione ortogonale di A su r. Per ottenerlo basta proiettare il vettore $\overrightarrow{R_{-5}A}$ in modo ortogonale sulla giacitura di r ottenendo il vettore $\overrightarrow{R_{-5}B}$, abbiamo quindi

$$\overrightarrow{R_{-5}B} = \frac{<(6,-3,-46),(1,-2,-1)>}{||(1,-2,-1)||^2}(1,-2,-1) = \frac{29}{3}(1,-2,-1) = \left(\frac{29}{3}, \frac{23}{3}, -\frac{29}{3}\right).$$

Abbiamo quindi che il punto B è

$$B = R_{-5} + \overrightarrow{R_{-5}B} = (-1,4,3) + \left(\frac{29}{3}, \frac{23}{3}, -\frac{29}{3}\right) = \left(\frac{26}{3}, \frac{35}{3}, -\frac{23}{3}\right).$$

Esercizio 4

Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo con un sistema di coordinate cartesiane (x,y,z) di centro $\mathcal{O}$. Si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x=t_1+2 \\ y=-t_1+3 \\ z=-4t_1+3 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=-t_2+1 \\ y=3t_2+3 \\ z=-2t_2+1 \end{cases}.$$

Si determini la posizione reciproca di r ed s e la loro distanza minima $d(r,s)$.

Soluzione dell'esercizio 4

Per trovare la posizione reciproca delle rette iniziamo vedendo se $r \parallel s$. La giacitura di r è $G(r) =< (1,-1,4)^t >$, mentre quella di s è $G(s) =< (-1,3,-2) >$ ed il rango della matrice che si ottiene dalle due giaciture è quindi

$$\mathrm{Rk}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

e quindi abbiamo che r e s non sono parallele. Per trovare se le due rette sono incidenti o sghembe cerchiamo le soluzioni del sistema dato dalle equazioni di r ed s

$$\begin{cases} x = t_1 + 2 \\ y = -t_1 + 3 \\ z = -4t_1 + 3 \\ x = -t_2 + 1 \\ y = 3t_2 + 3 \\ z = -2t_2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 + 2 = -t_2 + 1 \\ -t_1 + 3 = 3t_2 + 3 \\ -4t_1 + 3 = 2t_2 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 = -t_2 - 1 \\ t_1 = 3t_2 \\ -4t_1 = 2t_2 - 2 \end{cases}$$

che chiaramente non ha soluzione e quindi abbiamo che r ed s sono sghembe. Per trovare la distanza minima tra le due rette dobbiamo calcolare la direzione perpendicolare ad entrambe le rette, risolviamo quindi il sistema

$$\begin{cases} < (x,y,z), (1,-1,-4) >= 0 \\ < (x,y,z), (-1,3,-2) >= 0 \end{cases} = \begin{cases} x - y - 4z = 0 \\ -x + 3y - 2z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 7z \\ y = 3z \end{cases}.$$

Abbiamo quindi che la retta perpendicolare a r e s avrà giacitura $G =< (7,3,1)^t >$. Per trovare il vettore che realizza la distanza minima proiettiamo quindi un qualsiasi vettore avente estremi P e Q, dove $P \in r$ e $Q \in s$. Se scegliamo $P = (2,3,3)^t$ e $Q = (1,3,2)^t$ abbiamo e scegliamo di proiettare il vettore $\overrightarrow{PQ} = (-1,0,-1)^t$ troviamo che la proiezione cercata è

$$v = \frac{> (-1,0,-1), (7,3,1)}{||(7,3,1)||^2}(7,3,1)^t = -\frac{8}{60}(7,3,1)$$

e quindi

$$d(r,s) = ||v|| = \frac{8}{60}\sqrt{60}.$$

Esercizio 5

Si consideri $\mathbb{E}^2$ con coordinate cartesiane ortonormali (x,y) e centro O. Si consideri la trasformazione

$$\sigma(x,y) = \left(\frac{1}{13}(5x + 12y + 6), \frac{1}{13}(12x - 5y - 9) \right).$$

Sia τ la traslazione di vettore $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(i) Dimostrare che σ è una riflessione rispetto a una retta r. Si specifichi un'equazione cartesiana per r e la giacitura di r.

(ii) Si scriva τ in forma matriciale e si dica se è vero che $\tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau$. Verificare che lo spazio vettoriale $\langle v \rangle$ e la giacitura di r sono paralleli. Dire che tipo di isometria è $\tau \circ \sigma$ e determinarne gli eventuali punti fissi.

Soluzione dell'esercizio 5 (i) Innanzitutto, possiamo scrivere la funzione σ come un'affinità in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

ed indichiamo con A la matrice

$$A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$$

e con $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ il vettore

$$w = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Affinché σ rappresenti una riflessione, per il teorema di Chasles, è necessario che sia un'isometria indiretta con una retta di punti fissi (la retta di riflessione). Per verificare che σ è un'isometria indiretta, basta controllare che la matrice A sia una matrice ortogonale e che abbia determinante -1, cioè che $A \in O(2) \setminus SO(2)$. Calcoliamo quindi:

$${}^tA \cdot A = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{169}\begin{pmatrix} 169 & 0 \\ 0 & 169 \end{pmatrix} = I_2.$$

Allora A è una matrice ortogonale e si vede facilmente che $\det(A) = -1$, allora σ è un'isometria indiretta. Per calcolare la retta di punti fissi basta risolvere le equazioni:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix},$$

che corrispondono al sistema

$$\begin{cases} x = \frac{1}{13}(5x + 12y + 6) \\ y = \frac{1}{13}(12x - 5y - 9) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x = 5x + 12y + 6 \\ 13y = 12x - 5y - 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x - 12y - 6 = 0 \\ -12x + 18y + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 6y - 3 = 0 \\ \cancel{-4x + 6y + 3 = 0}. \end{cases}$$

Abbiamo mostrato che vi è una retta r di punti fissi data dall'equazione cartesiana $4x - 6y - 3 = 0$, che ha giacitura $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$, e pertanto σ è la riflessione rispetto alla retta r.

(ii) La scrittura matriciale di τ è:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza $\tau \circ \sigma$ è descritta da

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{13}(5x + 12y + 6) + 3 \\ \frac{1}{13}(12x - 5y - 9) + 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{13}(5x + 12y + 45) \\ \frac{1}{13}(12x - 5y + 17). \end{cases}$$

mentre $\sigma \circ \tau$ è tale che

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{13}\left(5(x+3)+12(y+2)+6\right) \\ \frac{1}{13}\left(12(x+3)-5(y+2)-9\right) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{13}\left(5x+15+12y+24+6\right) \\ \frac{1}{13}\left(12x+36-5y-10-9\right) \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{13}\left(5x+12y+45\right) \\ \frac{1}{13}\left(12x-5y+17\right). \end{cases}$$

Ciò dimostra che $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$. La direzione del vettore v di traslazione è $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, che è la stessa direzione della retta di simmetria, allora i due spazi vettoriali, $\langle v \rangle$ e la giacitura della retta sono paralleli. Per classificare $\tau \circ \sigma$, osserviamo che la matrice dell'affinità associata è sempre la matrice A. Di consequenza, $\tau \circ \sigma$ è un'isometria indiretta. Quindi se abbiamo una retta di punti fissi corrisponderà ad una riflessione, mentre se non ci sono punti fissi avremo una glissoriflessione. I punti fissi sono dati dal sistema:

$$\begin{cases} 13x = 5x + 12y + 45 \\ 13y = 12x - 5y + 17 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 8x - 12y - 45 = 0 \\ -12x + 18y - 17 = 0, \end{cases} .$$

Si vede facilmente che le due equazioni non sono proporzionali, quindi l'isometria non possiede punti fissi (non ci sono altre alternative) e $\tau \circ \sigma$ corrisponde ad una glissoriflessione.