Spazi affini, spazi euclidei e affinità

Laura Facchini

8 marzo 2011

Esercizio 1. *Sia r_1 la retta affine passante per i punti $A = (2, -4, -1)$ e $B = (-1, -1, -1)$ e sia r_2 la retta affine nello spazio di equazioni parametriche*

$$r_2 : \begin{cases} x &= 2 + s \\ y &= -2 - s \\ z &= 1 \end{cases}$$

1. *Mostrare che le due rette sono complanari e trovare un'equazione del piano π che le contiene.*

2. *Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $C = (2, 1, 3)$ e ortogonale al piano π.*

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che la direzione della retta r_1 è data da $\overrightarrow{AB} = (-3, 3, 0)$. Quindi r_1 in forma parametrica sarà

$$r_1 : \begin{cases} x &= 2 - 3t \\ y &= -4 + 3t \\ z &= -1 \end{cases}$$

1. Per controllare che r_1 ed r_2 siano complanari, basta dimostrare che si intersechino o che siano parallele:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t = 2 + s \\ y = -4 + 3t = -2 - s \\ z = -1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -3t \\ -4 \neq -2 \\ -1 \neq 1 \end{cases}$$

   Quindi r_1 ed r_2 non si intersecano. Per controllare che non siano sghembe, basta assicurarsi che i vettori che generano le loro giaciture siano linearmente indipendenti, ovvero che $(-3, 3, 0)$ è multiplo di $(1, -1, 0)$ (oppure osservare che c'è una relazione tra i due parametri: $s = 3t$).

Per avere le coordinate parametriche del piano π che contiene r_1 ed r_2, prendiamo un punto $P \in r_2$, ad esempio ponendo $s = -2$ ed ottenendo $P = (0, 0, 1)$, e calcoliamo $\overrightarrow{PB} = (-1, -1, -2)$.

Il piano π che contiene r_1 ed r_2 è dato dalla somma di un punto appartendente ad esso ($B \in r_1 \subset \pi$) con il generato di due vettori linearmente indipendenti, uno appartenente alle giacitura delle rette parallele $\overrightarrow{AB} = (-3, 3, 0)$ e uno dato dal vettore che le collega tra loro $\overrightarrow{PB} = (-1, -1, -2)$:

$$\pi : \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 - 3t - s \\ y & = & -1 + 3t - s \\ z & = & -1 - 2s \end{array} \right.$$

2. Per trovare la direzione ortogonale al piano π, basta scrivere il piano in coordinate cartesiane $ax + by + cz + d = 0$ ed osservare che l'equazione cartesiane del piano vettoriale corrispondente può essere riletta come condizione di ortogonalità:

$$0 = ax + by + cz = \langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle,$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} s & = & -x - 3t - 1 \\ 3t & = & 1 + y + s \\ z & = & -1 - 2s \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} s & = & -x - \frac{y-x}{2} - 1 \\ t & = & \frac{y-x}{6} \\ z & = & x + y + 1 \end{array} \right.$$

Abbiamo quindi

$$z = x + y + 1 \qquad \Rightarrow \qquad x + y - z + 1 = 0,$$

la cui direzione perpendicolare è data dal vettore $v = (1, 1, -1)$.

La retta passante per $C = (2, 1, 3)$ e ortogonale a π sarà quindi

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2 + t \\ y & = & 1 + t \\ z & = & 3 - t \end{array} \right.$$

$\square$

Esercizio 2. *Sia r_1 la retta affine passante per i punti $A = (2, -4, -1)$ e $B = (-1, -1, -1)$ e sia r_2 la retta affine nello spazio di equazioni cartesiane*

$$r_2 : \left\{ \begin{array}{l} x + z + 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \end{array} \right.$$

1. *Mostrare che le due rette sono complanari e trovare un'equazione del piano π che le contiene.*

2. *Trovare le equazioni parametriche della retta passante per $C = (2, 1, 3)$ e ortogonale al piano π.*

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che la direzione della retta r_1 è data da $\overrightarrow{AB} = (-3, 3, 0)$. Quindi r_1 in forma parametrica sarà

$$r_1 : \begin{cases} x &= 2 - 3t \\ y &= -4 + 3t \\ z &= -1 \end{cases}$$

1. Per controllare che r_1 ed r_2 siano complanari, basta dimostrare che si intersechino o che siano parallele. Il modo più semplice consiste nel trasformare anche r_2 in coordinate parametriche, ad esempio ponendo una delle variabili uguali al parametro s:

$$\begin{cases} x &= s \\ y &= 2x - z - 3 \\ z &= -1 - s \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad r_2 : \begin{cases} x &= s \\ y &= -2 + 3s \\ z &= -1 - s \end{cases}$$

   Controlliamo ora se le due rette si intersecano:

$$\begin{cases} x &= 2 - 3t &= s \\ y &= -4 + 3t &= -2 + 3s \\ z &= -1 &= -1 - s \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} t = 2/3 \\ -2 + 3 \cdot 0 = -4 + 3 \cdot 2/3 \\ s = 0 \end{cases}$$

   In particolare, il punto di intersezione di r_1 ed r_2 sarà $P = (0, -2, -1)$ e quindi le coordinate parametriche del piano π che contiene r_1 ed r_2 è dato da

$$\pi : \begin{cases} x &= -3t + s \\ y &= -2 + 3t + 3s \\ z &= -1 - s \end{cases}$$

2. Per trovare la direzione ortogonale al piano π, basta scrivere il piano in coordinate cartesiane $ax + by + cz + d = 0$ ed osservare che l'equazione cartesiane del piano vettoriale corrispondente può essere riletta come condizione di ortogonalità:

$$0 = ax + by + cz = \langle (a, b, c), (x, y, z) \rangle,$$

   dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} t &= \frac{1}{3}(s-x) \\ y &= -2+3t+3s \\ s &= -1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3}(-1-z-x) \\ y = -2+3\frac{1}{3}(-1-z-x)+3(-1-z) \\ s = -1-z \end{cases}$$

Abbiamo quindi

$$y = -6-4z-x \qquad \Rightarrow \qquad x+y+4z+6=0,$$

la cui direzione perpendicolare è data dal vettore $v = (1,1,4)$.

La retta passante per $C = (2,1,3)$ e ortogonale a π sarà quindi

$$\begin{cases} x &= 2+t \\ y &= 1+t \\ z &= 3+4t \end{cases}$$

$\square$

Esercizio 3. *Siano r_1, r_2 le rette affini nello spazio di equazioni parametriche*

$$r_1 : \begin{cases} x &= 1+3t \\ y &= -t \\ z &= 1+3t \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} x &= s \\ y &= 2 \\ z &= s \end{cases}$$

1. *Si determini un'equazione cartesiana del piano affine π contenente le rette r_1 e r_2.*

2. *Si stabilisca se il piano π contiene la retta affine r_3 di equazioni cartesiane*
$$r_3 : \begin{cases} x-1=0 \\ z=0 \end{cases}$$

3. *Si stabilisca se la retta affine r_4 di equazione cartesiana*
$$r_4 : \begin{cases} 3x-y+13=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$$
interseca il piano τ di equazione cartesiana
$$\tau : \ -x-y+z=0.$$

Svolgimento.

1. Controlliamo se le rette r_1 e r_2 si intersecano:

$$\begin{cases} x &= 1+3t &= s \\ y &= -t &= 2 \\ z &= 1+3t &= s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = -5 \\ t = -2 \\ -5 = 1 + 3 \cdot (-2) \end{cases}$$

   Quindi le due rette sono complanari e il loro punto di intersezione è $A = (-5, 2, -5)$.

   Notiamo che r_1 ha direzione $(3, -1, 3)$ ed r_2 ha direzione $(1, 0, 1)$, quindi il piano cercato ha equazioni parametriche

$$\pi : \begin{cases} x &= -5 + 3t + s \\ y &= 2 - t \\ z &= -5 + 3t + s \end{cases}$$

   Per avere l'equazione cartesiana basta risolvere il sistema in t ed s:

$$\begin{cases} s &= x + 5 - 3t \\ t &= 2 - y \\ z &= -5 + 3t + s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s &= x + 5 - 3(2-y) \\ t &= 2 - y \\ z &= -5 + 3t + s \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s &= x + 3y - 1 \\ t &= 2 - y \\ z &= -5 + 3(2-y) + (x + 3y - 1) = x \end{cases}$$

   da cui

$$\pi : \ x - z = 0$$

2. Il modo più semplice per verificare se π contiene r_3 è controllare se π contiene due punti distinti di r_3.

   Per esempio i punti $B = (1, 0, 0)$ e $C = (1, 1, 0)$ giacciono sulla retta in questione. Vediamo se il piano π contiene B e C: per entrambi $x - z = 1 - 0 = 1 \neq 0$.

   Il piano π non contiene i punti B e C e quindi neppure la retta r_3.

3. Per calcolare l'eventuale intersezione tra r_4 ed il piano τ mettiamo a sistema l'equazione cartesiana di r con quella del piano:

$$\begin{cases} 3x - y + 13 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{array}{cc} -1 & \\ 3 & 1 \\ & 1 \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -13 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)
=
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 1 \end{array}
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 10 \end{array}\right) =
$$

$$
= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right)
$$

Di conseguenza la retta interseca il piano nel punto $P = (-4, 1, -3)$.

□

Esercizio 4. *Si considerino i punti nello spazio*

$$A_0 = (1,1,1) \qquad A_1 = (2,1,1) \qquad A_2 = (1,1,4) \qquad A_3 = (3,0,1)$$

$$B_0 = (1,-2,0) \qquad B_1 = (1,-1,0) \qquad B_2 = (4,-5,0) \qquad B_3 = (1,0,-1)$$

1. *Verificare che A_0, A_1, A_2, A_3 sono affinemente indipendenti.*
2. *Verificare che B_0, B_1, B_2, B_3 sono affinemente indipendenti.*
3. *Scrivere esplicitamente un'affinità che manda A_i in B_i per ogni i.*

Svolgimento. Calcoliamo i vettori di punto iniziale A_0 e punto finale A_i

$$\overrightarrow{A_0A_1} = (1,0,0) \qquad \overrightarrow{A_0A_2} = (0,0,3) \qquad \overrightarrow{A_0A_3} = (2,-1,0)$$

ed i vettori di punto iniziale B_0 e punto finale B_i

$$\overrightarrow{B_0B_1} = (0,1,0) \qquad \overrightarrow{B_0B_2} = (3,-3,0) \qquad \overrightarrow{B_0B_3} = (0,2,-1)$$

1. $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \overrightarrow{A_0A_3}$ sono vettori linearmente indipendenti, infatti

   $$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \neq 0,$$

   quindi A_0, A_1, A_2, A_3 sono affinemente indipendenti.

2. $\overrightarrow{B_0B_1}, \overrightarrow{B_0B_2}, \overrightarrow{B_0B_3}$ sono vettori linearmente indipendenti, infatti

   $$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0,$$

   quindi B_0, B_1, B_2, B_3 sono affinemente indipendenti.

3. Vogliamo trovare un'affinità f tale che

$$f(A_0) = B_0, \qquad f(A_1) = B_1, \qquad f(A_2) = B_2, \qquad f(A_3) = B_3,$$

ovvero tale che $f(A_0) = B_0$ e

$$\varphi(\overrightarrow{A_0A_1}) = \overrightarrow{B_0B_1}, \qquad \varphi(\overrightarrow{A_0A_2}) = \overrightarrow{B_0B_2}, \qquad \varphi(\overrightarrow{A_0A_3}) = \overrightarrow{B_0B_3},$$

dove φ è un automorfismo sugli spazi vettoriali associati rispetto alla base standard.

L'affinità f risulterà quindi essere della forma

$$f(P) = f(A_0) + \varphi(\overrightarrow{A_0P}) = B_0 + M \cdot \overrightarrow{A_0P},$$

dove M è una matrice associata all'automorfismo φ.

Ci rimane quindi da trovare M, chiedendo che per ogni i

$$M \cdot \overrightarrow{A_0A_i} = \overrightarrow{f(A_0)f(A_i)} = \overrightarrow{B_0B_i}$$

ovvero, esplicitamente,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & 3a_{13} & 2a_{11} - a_{12} \\ a_{21} & 3a_{23} & 2a_{21} - a_{22} \\ a_{31} & 3a_{33} & 2a_{31} - a_{32} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

da cui

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

In conclusione, l'affinità cercata è

$$f(P) = B_0 + M \cdot \overrightarrow{A_0P} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 - 1 \\ p_2 - 1 \\ p_3 - 1 \end{pmatrix},$$

per $P = (p_1, p_2, p_3)$.

$\square$

Esercizio 5. *Siano r, r' le rette affini nello spazio di equazioni*

$$r: \begin{cases} 2x+y-6=0 \\ y-z+2=0 \end{cases}$$

$$r': \begin{cases} x &=& 1+t \\ y &=& 1-t \\ z &=& 3 \end{cases}$$

e siano π, π' i piani affini di equazioni cartesiane

$$\pi: \; 2x+z-1=0$$

$$\pi': \; x+y+z=1$$

Esiste un'affinità che manda r in r' e π in π'?

Svolgimento. Osserviamo innanzitutto che π ed r sono paralleli tra loro, infatti

$$r: \begin{cases} x &=& t \\ y &=& 6-2t \\ z &=& 8-2t \end{cases}$$

$$\pi: \begin{cases} x &=& t \\ y &=& s \\ z &=& 1-2s \end{cases}$$

e che le affinità conservano la posizione reciproca di sottospazi, quindi è possibile trovare l'affinità richiesta proprio poiché anche π' ed r' sono paralleli fra loro, infatti

$$\pi': \begin{cases} x &=& t \\ y &=& s \\ z &=& 1-t-s \end{cases}$$

Ricordiamo che fissati quattro punti A_0, A_1, A_2, A_3 affinemente indipendenti e quattro punti B_0, B_1, B_2, B_3 affinemente indipendenti, esiste ed è unica l'affinità che manda ogni A_i nel corrispondente B_i.

Fissiamo dunque $A_0 \neq A_1$ sulla retta r e $B_0 \neq B_1$ sulla retta r': poiché ogni retta é determinata dal passaggio per due punti, ogni affinità che manda A_0 in B_0 e A_1 in B_1, manderà r in r'.

Ora fissiamo $A_2 \neq A_3$ sul piano π tali che $\overrightarrow{A_2A_3}$ non sia parallelo a $\overrightarrow{A_0A_1}$. Allo stesso modo prendiamo $B_2 \neq B_3$ sul piano π' tali che $\overrightarrow{B_2B_3}$ non sia parallelo a $\overrightarrow{B_0B_1}$.

Consideriamo l'affinità che manda A_i in B_i per ogni i. Essa manderà π in π', perché manda la giacitura di π nella giacitura di π' e un punto di π in un punto di π' (punto e giacitura individuano univocamente il piano).

Abbiamo quindi trovato un'affinità con le proprietà cercate. Essa non è unica: ad esempio se τ è una traslazione nella direzione di r', allora $\tau \circ \varphi$ è ancora un'affinità che soddisfa le proprietà richieste. □

Esercizio 6. *Siano π, π' i piani affini di equazioni cartesiane*

$$\pi: \ x - z - 1 = 0$$

$$\pi': \ x + y + 1 = 0$$

Esiste un'affinità che manda π in π' e fissi il punto $P = (1, -1, 2)$? E un'isometria?

Svolgimento. Ricordiamo che fissati quattro punti A_0, A_1, A_2, A_3 affinemente indipendenti e quattro punti B_0, B_1, B_2, B_3 affinemente indipendenti, esiste ed è unica l'affinità che manda ogni A_i nel corrispondente B_i.

Chiaramente un piano è determinato da tre suoi punti affinemente indipendenti.

Fissiamo dunque tre punti A_1, A_2, A_3 affinemente indipendenti sul piano π e altri tre punti B_1, B_2, B_3 affinemente indipendenti sul piano π'.

Dato che $P \notin \pi \cup \pi'$, sia P, A_1, A_2, A_3 che P, B_1, B_2, B_3 sono affinemente indipendenti, quindi esiste un'affinità che manda A_i nel corrispondente B_i per ogni i e P in P.

Ricordiamo che un'affinità è un'isometria se e soltanto se conserva le distanze, quindi ad esempio se $d(P, \pi) \neq d(P, \pi')$, non può esistere un'isometria con le proprietà richieste. Si trova che

$$d(P, \pi) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

mentre

$$d(P, \pi') = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dunque non esiste un'isometria con le proprietà richieste. □