GEOMETRIA A 2016/17 – Esercizi 24-26 Ottobre 2016

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$A_a := \begin{pmatrix} 1 & 1 & a-1 \\ a & 2 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

(i) Determinare per ogni $a \in \mathbb{R}$, se il sistema lineare

$$A_a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 9a-3 \end{pmatrix}$$

è risolubile e, in caso affermativo, descrivere le soluzioni del sistema.

(ii) Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la matrice A_a^2 ha rango massimo.

(iii) Calcolare il rango di f_a^2 per $a = \frac{2}{3}$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

(i) Determinare per ogni $k \in \mathbb{R}$, le soluzioni del sistema $M_k \boldsymbol{x} = 0$, con $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ esiste $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ tale che $M_k \boldsymbol{x} = (1, 0, 3, 0)^T$.

Esercizio 3. Si considerino i sistemi lineari

$$(1) \begin{cases} ax + y + (2-a)z + aw = 2 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} 2x + y + bz + w = -1 \\ (b+3)x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

con a e b parametri reali.

(i) Descrivere le soluzioni dei due sistemi al variare di $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) Determinare per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ le soluzioni comuni ai due sistemi.

(iii) Siano U_a e V_b i sottospazi vettoriali delle soluzioni dei sistemi omogenei associati ai sistemi (1) e (2). Determinare per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ una base di $U_a + V_b$.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k-3 & k & -2 \\ 1 & -1 & k \\ k-4 & -k+4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

(i) Determinare per quali valori di k la matrice A ha rango massimo.

(ii) Determinare per ogni $k \in \mathbb{R}$, una base dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato a A.

(iii) Determinare per ogni $k \in \mathbb{R}$, una base dello spazio vettoriale $V = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}\}$.

(iv) Determinare per quali $k \in \mathbb{R}$ il sistema $A\boldsymbol{x} = (k, k, k)^T$ ha soluzione.

Esercizio 5. Si considerino i sottospazi vettoriali:

- $A = \langle 1 + t - t^2, 2 + 3t, t + 2t^2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$;
- $B = \{p_0 + p_1 t + p_2 t^2 \mid p_2 = p_0 - \pi p_1\} \subseteq \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$.

Si calcoli la dimensione di A e B. Si stabilisca se la somma $A + B$ è diretta.

Esercizio 6. Si considerino i sottospazi vettoriali:

- $A = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$;
- $B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$;

Si calcoli la dimensione di A, B, $A \cap B$ e $A + B$. Si stabilisca se la somma $A + B$ è diretta.

Esercizio 7. Trovare tutte le soluzioni $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ dei sistemi lineari $A\boldsymbol{x} = b_i$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/3 \\ \pi \end{pmatrix}.$$