GEOMETRIA A 2016/17 – Esercizi 28 Novembre 2016

Esercizio 1. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine con sistema di riferimento affine $Oe_1e_2e_3$, e si considerino i punti $A(3,0,-1)$, $B(1,1,1)$, $C(1,2,0)$, $A'(-1,-1,-1)$, $B'(1,0,0)$, $C'(0,-1,0)$.

(i) Si diano equazioni cartesiane del piano p contenente A, B, C e del piano p' contenente A',B', C'.

(ii) Si diano equazioni parametriche dello spazio affine $p \cap p'$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine con sistema di riferimento affine $Oe_1e_2e_3$. Verificare che la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

è parallela al piano $\pi : x + 2y + z = 1$.

Esercizio 3. Siano date le rette, in uno spazio affine con sistema di riferimento affine $Oe_1e_2e_3$,

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad r' : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 + t \\ z = -t \end{cases} \qquad r'' : \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \qquad r''' : \begin{cases} x + y = 4 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

(i) Determinare, per ciascuna delle coppie di rette (r, r'), (r, r''), (r, r'''), (r', r''), (r', r'''), (r'', r''') se sono coincidenti, parallele, incidenti o sghembe.

(ii) Inoltre, per ciascuna delle coppie di rette suddette che siano incidenti o parallele ma non coincidenti, si calcoli l'equazione cartesiana del piano che le contiene.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio affine $\mathbb{R}^3$. Si discuta, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la posizione relativa delle rette

$$r : \begin{cases} x + 4y + 2z - 2 = 0 \\ 2x + ky + z - 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r' : \begin{cases} x + 4y + kz - 2 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5. Nello spazio affine $\mathbb{R}^5$, si considerino le rette

$$r : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mostrare che r ed s sono sghembe e determinare le equazioni parametriche e cartesiane dell'unico spazio affine di dimensione 3 che le contiene.

Esercizio 6. Nello spazio affine $\mathbb{R}^4$, si considerino i punti $A = (1, -1, 0, 1)$, $B = (0, 1, -1, 0)$, $C = (1, 0, -1, 0)$ e $D = (1, 2, 0, 1)$. Determinare:

(i) equazioni cartesiane della retta passante per A e parallela all'unica retta passante per B e C;

(ii) equazioni cartesiane del piano passante per il punto D e parallelo al piano per A, B e C;

(iii) l'equazione cartesiana dell'iperpiano affine α passante per i punti A, B, C e D;

(iv) l'equazione cartesiana dell'iperpiano affine β passante per $E = (-1, 1, 2, -1)$ e parallelo ad α.

Esercizio 7. In uno spazio affine con sistema di riferimento affine $Oe_1e_2e_3$, data la retta

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = -t \end{cases}$$

si determini

(i) il fascio di iperpiani (in questo caso si parla di fascio di piani) contenenti r;

(ii) il piano contenente r ed il punto $A(1, 1, 0)$ (se esiste);

(iii) il piano contenente r e parallelo al piano $-2x + 2y + 5z - 4 = 0$ (se esiste).

Esercizio 8. Nello spazio affine $\mathbb{R}^4$, si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 - x_3 = -2 \\ x_3 - x_4 = 3 \end{cases} \qquad r_3 : \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = 2 + t \\ x_4 = -1 - t \end{cases}.$$

(i) Scrivere un'equazione dell'iperpiano contenente $P_1 = (1, -1, 1, -1)$, $P_2 = (-1, 1, -1, 1)$ e r_1.

(ii) Determinare lo spazio affine di dimensione minima contenente le rette r_1 e r_2.

(iii) Determinare se esiste una retta che interseca simultaneamente r_1, r_2 e r_3.