GEOMETRIA A 2016/17 – Esercizi 19 Dicembre 2016

Esercizio 1. Si determini, per ciascuno dei seguenti insiemi di vettori $\{v_1, \dots, v_3\} \in V$ e $\{w_1, \dots, w_3\} \in W$, quante applicazioni lineari $F\colon V \to W$ esistono tali che $\forall i\ F(v_i) = w_i$:

(1) $\{t^2+1, t+1, t^2+t\} \in V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $\{1, t-1, t^2-t\} \in W = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

(2) $\{t^2+1, t+1, t^2+t\} \in V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $\{1, t-1, t^2-t\} \in W = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$

(3) $\{t^2+1, t+1, t^2+t\} \in V = \mathbb{R}[t]_{\leq 3}$, $\{1, t-1, t^2-t\} \in W = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

(4) $\{t^2-1, t+1, t^2+t\} \in V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $\{1, t-1, t^2-t\} \in W = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

(5) $\{t^2-1, t+1, t^2+t\} \in V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $\{(t-1)^2, t-1, t^2-t\} \in W = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

In ciascuno dei cinque casi si determino i possibili valori di $F(t^2)$ al variare di F tra le applicazioni lineari i $F\colon V \to W$ tali che $\forall i\ F(v_i) = w_i$.

Esercizio 2. Si considerino le seguenti basi di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{b} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathbf{b}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Si calcoli $M_{\mathbf{b},\mathbf{b}'}(1_{\mathbb{R}^3})$.

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale con base $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e sia $F : V \to V$ l'endomorfismo definito da

$$F(x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + x_3\, e_3) = -2(x_2 + x_3)e_1 + 2(x_1 + 2x_2 + x_3)e_2 - 2(x_1 + x_2)e_3.$$

(1) Si determini la matrice $M_{\mathbf{e}}(F)$.

(2) Si determini la matrice $M_{\mathbf{v}}(F)$, con $\mathbf{v} = \{v_1 = -e_1 + e_3, v_2 = e_2 - e_3, v_3 = e_1 - e_2 + e_3\}$.

Esercizio 4. Si considerino:

- uno spazio vettoriale V con basi $\mathbf{e} = \{e_1, e_2, e_3\}$ e $\mathbf{v} = \{v_1 = e_1 + e_3, v_2 = e_3, v_3 = e_1 + e_2\}$;
- uno spazio vettoriale W con basi $\mathbf{f} = \{f_1, f_2\}$ e $\mathbf{u} = \{u_1 = f_1 + 3f_2, u_2 = 2f_1 + f_2\}$;
- un'applicazione lineare $F : V \to W$ definita da $F(v_1) = f_1 + f_2$, $F(v_2) = f_1$ e $F(v_3) = 2f_1 + f_2$.

Determinare le matrici $M_{\mathbf{f},\mathbf{e}}(F)$ e $M_{\mathbf{u},\mathbf{v}}(F)$.

Esercizio 5. Siano $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e $\{f_1, f_2, f_3\}$ le basi canoniche di $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^3$ e sia f l'applicazione lineare definita da

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3 + we_4) = (2x - y + z + 5w)f_1 + (-x + 2y + 3z - 4w)f_2 + (x + 5z + 6w)f_3.$$

Determinare il nucleo e l'immagine di f.

Esercizio 6. Sia f un endomorfismo dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ definito da

$$f(1) = 1 + t + t^2, \quad f(t) = 1 - 2t, \quad f(t^2) = 1 - t + \frac{1}{3}t^2.$$

(1) Determinare il nucleo di f, una sua base e la sua dimensione.

(2) Determinare l'immagine di f, una sua base e la sua dimensione.

Esercizio 7. Stabilire se gli endomorfismi di $\mathbb{R}^4$ definiti dalle seguenti matrici sono diagonalizzabili

(i)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -10 \\ -1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e, in caso di risposta positiva, calcolare una base diagonalizzante.

Esercizio 8. Stabilire se gli endomorfismi di $\mathbb{C}^4$ definiti dalle matrici A, B e C del precedente esercizio sono diagonalizzabili e, in caso affermativo, calcolare una base diagonalizzante.

Esercizio 9. Calcolare la matrice X^{100000} con

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 10. Si stabilisca se l'endomorfismo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[t]_{\leqslant 100} & \longrightarrow & \mathbb{K}[t]_{\leqslant 100} \\ P(t) & \longmapsto & P(t) + P'(t) \end{array}$$

è diagonalizzabile.

Esercizio 11. Si stabilisca per quali valori del parametro reale k l'operatore

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + ky \\ ky \end{pmatrix}$$

su $\mathbb{R}^2$ è diagonalizzabile

Esercizio 12. Si stabilisca per quali valori del parametro k l'operatore

$$F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ky \\ -kx \end{pmatrix}$$

su $\mathbb{R}^2$ è diagonalizzabile