Geometria II

Esercitazione 27-05-2013

Luca Tasin

1 Esercitazioni

Esercizio 1. *Sia $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ lo spazio proiettivo reale di dimensione $n \geq 1$. Dire se $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è compatto, connesso, di Hausdorff.*

Soluzione. Sia $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ la sfera n-dimensionale. Ricordiamo che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}} \cong S^n/\sim$, dove, dati $x, y \in S^n$, $x \sim y$ se $x = \pm y$. Sia $\pi : S^n \to S^n/\sim$ la proiezione al quoziente. Essendo S^n connesso e compatto otteniamo subito che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è connesso e compatto.

Dimostriamo che $\mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ è di Hausdorff. Notiamo che π è aperta, infatti preso $A \subset S^n$ aperto, abbiamo che $\pi^{-1}(\pi(A)) = A \cup (-A)$ e dunque la saturazione di ogni aperto è aperta. Siano $p, q \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$ punti distinti e siano $\{p_1, -p_1\} = \pi^{-1}(p)$ $\{q_1, -q_1\} = \pi^{-1}(q)$. Poiché S^n è Hausdorff abbiamo due aperti A, B tali che $\{p_1, -p_1\} \subset A$, $\{q_1, -q_1\} \subset B$ e $A \cap B = \emptyset$. E' sufficiente allora considerare $\pi(A)$ e $\pi(B)$ per avere due intorni aperti disgiunti di p e q.

$\square$

Esercizio 2. *Sia $\mathbb{R}^{n+1}$ lo spazio vettoriale reale $(n+1)$-dimensionale dotato della topologia euclidea. Consideriamo la relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^{n+1}$ data da*

$$v \sim w \text{ se esiste } \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0 \text{ tale che } v = \lambda w.$$

Sia $X := \mathbb{R}^{n+1}/\sim$ lo spazio quoziente. Dire se X è connesso, compatto, di Hausdorff.

Soluzione. Lo spazio X è connesso in quanto lo è $\mathbb{R}^{n+1}$.

Sia $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to X$ la mappa quoziente. Sia $U \subset X$ un aperto che contiene $\pi(0)$. Allora $\pi^{-1}(U)$ è un aperto che contiene 0 e dunque esiste $r \in \mathbb{R}$ positivo per cui $B(0, r) \subset \pi^{-1}(U)$. Ma per ogni $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ non nullo tale che $\lambda x \in B(0, r)$ e dunque $\pi(x) \in U$, da cui $U = X$. Dunque X è compatto e non di Hausdorff (neppure T_1). $\square$

Esercizio 3. *Sia $X \subset \mathbb{N}$ l'insieme dei numeri interi maggiori o uguali a 2. Per ogni $n \in X$ si consideri l'insieme*

$$U_n = \{x \in X : x \text{ divide } n\}.$$

Sia $\mathcal{B} = \{U_n\}_{n \in X}$.

1. *Si dimostri che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su X. Indichiamo con τ tale topologia.*
2. *Si dica se X è compatto.*
3. *Si dimostri che per ogni $x \in X$, $\overline{\{x\}} = \{y \in X : x|y\}$.*
4. *Sia $f : (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon) \to (X, \tau)$ una funzione continua. Si dimostri che f è costante.*

Soluzione.

1. Per ogni $x \in X$, $x \in U_x$, inoltre

   $$U_x \cap U_y = \{z \in X : z|x \text{ e } z|y\} = \{z \in X : z|MCD(x,y)\} = U_{MCD(x,y)}$$

   e dunque $\mathcal{B}$ è una base per una topologia.

2. Consideriamo il ricoprimento aperto $\{U_n\}_{n \in X}$. Dato che ogni U_n è finito non esiste nessun sottoricoprimento finito e quindi X non è compatto.

3. Poniamo $C_x = \{y \in X : x|y\}$ e dimostriamo che C_x è il più piccolo chiuso che contiene x.

   Preso $n \in X \setminus C_x$, abbiamo $U_n \subset (X \setminus C_x)$, in quanto nessun divisore di n può essere un multiplo di x e dunque C_x è chiuso.

   Si noti che se se U è un aperto e $n \in U$, allora $U_n \subset U$, in quanto ogni elemento della base che contiene n deve contenere anche U_n.

   Sia C un chiuso tale che $\overline{\{x\}} \subset C$ e sia y un multiplo di x. Se per assurdo $y \in (X \setminus C)$, allora $x \in U_y \subset (X \setminus C)$, una contraddizione. Dunque $C_x \subset C$ e abbiamo finito.

□