Geometria II

Esercitazione 28-05-2013

Luca Tasin

1 Esercitazioni

Esercizio 1. *Sia* $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$ *lo spazio euclideo reale. Si consideri la famiglia*

$$\tau = \{X \subset \mathbb{R} : X = \emptyset \text{ oppure } \mathbb{R}\backslash X \text{ è compatto in } (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)\}.$$

1. *Si dimostri che* τ *è una topologia su* $\mathbb{R}$.
2. *Si dimostri che* $(\mathbb{R}, \tau)$ *è* T_1*, ma non* T_2.
3. *Si dimostri che il sottoinsieme dei numeri razionali è denso in* (X, τ).

Soluzione.

1. Chiaramente X e $\emptyset$ sono elementi di τ.

   Sia $\{U_i\}_{i\in I}$ un famiglia di elementi di τ. Allora $\cup U_i \in \tau$ in quanto $\mathbb{R}\backslash \cup U_i = \cap(X\backslash U_i)$ è intersezione di compatti e dunque compatto. Se I è finito allora $X\backslash \cap U_i = \cup(X\backslash U_i)$ è compatto, in quanto unione finita di compatti, e dunque $\cap U_i \in \tau$.

2. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ punti distinti. Allora $X\backslash\{x\}$ è un aperto che contiene y, ma non x. Analogamente per $X\backslash\{y\}$ e quindi $(\mathbb{R}, \tau)$ è T_1.

   Supponiamo ora per assurdo che $(\mathbb{R}, \tau)$ sia T_2, cioè che esistano due aperti disgiunti $x \in U_x$ e $y \in U_y$. Allora $\mathbb{R} = (\mathbb{R}\backslash U_x) \cup (\mathbb{R}\backslash U_y)$, che non è possibile, in quanto i compatti di $\mathbb{R}$ sono limitati.

3. La topologia τ è meno fine della topologia euclidea e quindi un sottoinsieme denso per τ_ε è denso anche per τ.

□

Esercizio 2 (Compattificazione di Alexandroff). *Sia* $X = \mathbb{R}$ *l'insieme dei numeri reali con la topologia euclidea* τ_ε *e sia* σ *la famiglia degli insiemi compatti di* (X, τ_ε). *Sia* ∞ *un punto formale* ($\infty \notin X$) *e si ponga* $X^* = X \cup \{\infty\}$. *Si consideri su* X^* *la seguente famiglia*

$$\tau^* = \{U \subset X \subset X^* : U \in \tau_\varepsilon\} \cup \{U \subset X^* : X^*\backslash U \in \sigma\}.$$

1. Si dimostri che τ^* è una topologia.

2. Si dimostri che (X^*, τ^*) è compatto e connesso.

3. Si dimostri che (X^*, τ^*) è di Hausdorff.

Soluzione. 1. Chiaramente $\emptyset$ e X^* sono elementi di τ^*.

Siano $\{U_i\}_{i \in I}$ elementi di τ^*. Dividiamo I in due insiemi I_1 ed I_2 tali che per ogni $i \in I_1$ abbiamo che $U_i \in \tau$ e per ogni $j \in I_2$, $X^* \backslash U_j \in \sigma$. Allora posto $V_1 = \cup_{i \in I_1} U_i$ e $V_2 = \cup_{j \in I_2} U_j$, abbiamo che $V_1 \in \tau_\varepsilon$ (in quanto τ_ε è una topologia) e $X^* \backslash V_2$ in quanto $X \backslash V_2 = \cap_{j \in I_2}(X \backslash U_j)$ è intersezione di compatti e dunque compatto.

Se $V_2 = \emptyset$ allora $\cup U_i = V_1 \in \tau_\varepsilon$. Se $V_2 \neq \emptyset$ allora $X^* \backslash (V_1 \cup V_2) = (X^* \backslash V_1) \cap (X^* \backslash V_1) \in \sigma$ in quanto l'intersezione di un chiuso e di un compatto è compatta.

Supponiamo ora che I sia finito. Per induzione possiamo assumere che $I = \{1, 2\}$. Se $U_1, U_2 \in \tau_\varepsilon$, allora e $U_1 \cap U_2 \in \tau_\varepsilon \subset \tau$. Se $X^* \backslash U_1 \in \sigma$ e $X^* \backslash U_2 \in \sigma$, allora $X^* \backslash U_1 \cap U_2 = (X^* \backslash U_1) \cup (X^* \backslash U_2)$ è unione di compatti in (X, τ_ε) e dunque compatto. Possiamo quindi assumere, per simmetria, che $X^* \backslash U_1 \in \sigma$ e $U_1 \in \tau$. Allora $U_1 \cap U_2 \in \tau_\varepsilon$.

2. Sia $X = U_1 \cup U_2$ con U_1, U_2 aperti disgiunti, tali che $\infty \in U_1$. Allora $X^* \backslash U_1 = U_2$ è un aperto compatto di $\mathbb{R}$, cioè $U_2 = \emptyset$ e quindi X^* è connesso.

   Dimostriamo ora che X^* è compatto. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X. Sia $k \in I$ tale che $\infty \in U_k$; allora $X^* \backslash U_k$ è compatto in (X, τ_ε) e $\{U_i \cap (X^* - U_k)\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di $X^* \backslash U_k$, possiamo dunque estrarne un sottoricoprimento finito e poi ottenere un sottoricoprimento finito di X.

3. Siano $x, y \in X^*$ punti distinti. Se $x, y \in X$ possiamo separarli con aperti di τ_ε e quindi possiamo assumere $x = \infty$. Sia K un intervallo chiuso e limitato che contiene y al suo interno. Allora prendiamo $U_x = X^* \backslash \overset{\circ}{K}$ e $U_y = \overset{\circ}{K}$.

□

Esercizio 3. *Ricordiamo che una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è localmente costante se per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno aperto $U \subset X$ di x, tale che $f_{|U} : U \to \mathbb{R}$ è costante. Sia X uno spazio topologico connesso. Si dimostri che ogni funzione continua $f : X \to \mathbb{R}$ localmente costante è costante.*

Soluzione. Sia $x_0 \in X$ un punto e si definisca

$$U := \{x \in X : f(x) = f(x_0)\}.$$

Vogliamo mostrare che U è aperto e chiuso. Per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto di x su cui f è costante e quindi se $x \in U$, tale aperto è tutto contenuto in U e dunque U è aperto.

D'altra parte U è chiuso, in quanto $U = f^{-1}(f(x_0))$.

Dunque $U = X$ poiché U è un sottoinsieme aperto, chiuso, non vuoto e X è connesso.

$\square$

Esercizio 4. *Ricordiamo che se A è un sottoinsieme di uno spazio topologico X, si indica con $X/A = X/\sim_A$ il quoziente di X per la relazione di equivalenza data da*

$$x \sim_A y \text{ se e solo se } x = y \text{ oppure } x, y \in A.$$

Si dica quali dei seguenti spazi sono fra loro omeomorfi e quali no.

$$I = [0,1], \qquad I/[0,1/3], \qquad [0,1)$$

Soluzione. I primi due spazi sono omeomorfi. Infatti, si consideri la mappa

$$f : I \to I$$

data da

$$f(x) : \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1/3] \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & \text{se } x \in [1/3,1] \end{cases}$$

Allora f è ovviamente continua, chiusa (in quanto mappa continua da uno spazio compatto ad uno spazio di Hausdorff) e suriettiva, da cui otteniamo, passando al quoziente, l'omeomorfismo cercato.

Del resto $[0,1]$ non è omeomorfo a $[0,1)$, in quanto il primo è compatto, mentre il secondo no. Alternativamente si può notare che esiste un solo punto che non disconnette $[0,1)$, mentre ce ne sono due che non disconnettono I. $\square$