

# Alcuni esercizi per il corso di Geometria A

Filippo Favale

25 maggio 2017

## 1 Esercizi svolti

Quelli che seguono sono alcuni degli esercizi svolti durante le esercitazioni del secondo modulo di Geometria A (A.A. 2016/2017). Altri esercizi sono stati scelti tra quelli presenti nei temi di esame di Geometria A, di Geometria II o tra quelli svolti durante le esercitazioni degli anni precedenti (i testi sono disponibili online).

### Esercizio 1

Si consideri il piano complesso  $\mathbb{A}^2$  con coordinate  $(x, y)$  e si consideri la curva

$$\mathcal{C}_a : f = x + xy + y^3 + a,$$

dove  $a$  è un parametro reale.

- (i) Si ricavano i punti singolari di  $\mathcal{C}_a$  e della sua chiusura proiettiva e si classificano.
- (ii) Si dimostri che esiste un valore di  $a$  per cui la curva è riducibile (se ho due componenti si intersecano in un punto singolare e siccome la curva è una cubica...). Trovarne le componenti irriducibili e rappresentare, per questo valore, la curva intersecata con  $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ .
- (iii) Si ricavano gli asintoti di  $\mathcal{C}_a$ .
- (iv) Si ricavano le intersezioni di  $\mathcal{C}_0$  e  $\mathcal{C}_2$  e delle loro chiusure proiettive.

### Esercizio 2

Si consideri il piano complesso  $\mathbb{A}^2$  con coordinate  $(x, y)$  e il piano proiettivo complesso  $\mathbb{P}^2$  con coordinate  $[x_0, x_1, x_2]$ . Si identifichi  $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$  con  $\mathbb{A}^2$  tramite le relazioni  $x_1/x_0 = x, x_2/x_0 = y$ . Si considerino, in  $\mathbb{P}^2$ , le curve

$$\bar{\mathcal{C}} : F = x_2^2 x_0 + x_1 x_0^2 - x_1^3 = 0,$$

$$\bar{\mathcal{D}} : G = -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

e sia  $\bar{\mathcal{H}}$  la curva hessiana associata alla cubica  $\bar{\mathcal{C}}$ .

- (i) Dire se  $\bar{\mathcal{C}}$  è singolare. Si scriva un'equazione per  $\bar{\mathcal{H}}$  e se ne ricavano i punti singolari (se esistono).
- (ii) Si dimostri che il punto  $P = [0, 0, 1]$  è punto di flesso per  $\bar{\mathcal{C}}$  e si ricavi la tangente inflessionale  $t$ , le sue intersezioni con la curva (e le relative molteplicità).
- (iii) Si ricavano le intersezioni delle tracce affini delle curve  $\bar{\mathcal{C}}$  e  $\bar{\mathcal{D}}$ .

### Esercizio 3

Si consideri il piano complesso  $\mathbb{A}^2$  con coordinate  $(x, y)$  e il piano proiettivo complesso  $\mathbb{P}^2$  con coordinate  $[x_0, x_1, x_2]$ . Si identifichi  $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$  con  $\mathbb{A}^2$  tramite le relazioni  $x_1/x_0 = x, x_2/x_0 = y$ . Si considerino le curve

$$\mathcal{C} : f = x^2 y^2 + y^2 - 4x^2 + 4y^2 = 0,$$

$$\mathcal{D} : g = 3x^2 + y^2 + 4y = 0.$$

- (i) Si ricavano i punti singolari di delle due curve e delle due chiusure proiettive. Per ogni punto singolare  $P$  si ricavi la molteplicità del punto per la curva, le tangenti principali, la molteplicità con cui esse tagliano la curva e gli eventuali altri punti di intersezione tra le tangenti e la curva.

(ii) Ricavare gli asintoti di  $\mathcal{C}$  e le tangenti principali nei suoi punti all'infinito.

(iii) Si ricavano le intersezioni tra le curve e le loro chiusure proiettive.

#### Esercizio 4

Si consideri lo spazio euclideo  $\mathbb{E}^3$  munito di un sistema di coordinate cartesiane ortonormali  $(x, y, z)$ . Si consideri la quadrica

$$\mathcal{Q}_a : f = x^2 + ay^2 + z^2 - 4xy + 4yz - 2y + 4z + 4 = 0$$

dove  $a$  è un parametro reale.

(i) Sia  $V = \mathbb{R}^3$ . Si interpreti la parte quadratica di  $f$  come una forma quadratica  $Q$  su  $V$ . Si dica per quali valori di  $a$ ,  $Q$  è definita positiva o definita negativa.

(ii) Si dica, al variare di  $a$ , quando la quadrica è non degenere e quando è a centro.

(iii) Si ponga  $a = -1$ . Si scriva la forma canonica affine e la forma canonica euclidea di  $\mathcal{Q}_a$ .

(iv) Si ponga  $a = -1$ . Si scriva un'isometria che riduce  $\mathcal{Q}_a$  a forma canonica (euclidea).

(v) Si considerino le coniche euclidee ottenute tagliando  $\mathcal{Q}_a$  con i piani coordinati e si classifichino tali coniche.

## 2 Alcuni polinomi...

Sia  $f$  uno dei polinomi seguenti. Si consideri la curva algebrica  $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2$  definita dall'annullarsi di  $f$ . Si studi la natura locale di  $\mathcal{C}$  in  $O = (0, 0)$  (si ricavi  $m_{\mathcal{C}}(O)$ , le tangenti principali in  $O$ , le molteplicità di intersezione tra le tangenti ricavate e la curva e, eventualmente, ulteriori punti di intersezione delle stesse con la curva). Fare lo stesso per la sua chiusura proiettiva nei punti  $[1, 0, 0]$ ,  $[0, 1, 0]$  e  $[0, 0, 1]$ .

I polinomi sono stati generati tramite 4 processi differenti e sono divisi quindi in quattro blocchi. Alcuni polinomi sono stati testati a mano, ma non tutti: se i conti risultassero troppo complessi, considerate un altro punto di quelli richiesti o cambiate polinomio!

Primo blocco di polinomi

$$3x^3y - x^3 + x^2y + 9xy^2 - x + y^4 + 2y^3 - 7y^2 - 8y + 12 \quad (1)$$

$$-x^3y + 3x^3 + x^2y^2 + x^2y - xy^3 + 9xy + 12y^4 - 8y^3 - 7y^2 + 2y + 1 \quad (2)$$

$$36x^4 + 5x^2y^2 + 9x^2y + x^2 - 3xy + x - y^4 - y^3 + y \quad (3)$$

$$36x^4 + 5x^2y^2 + 9x^2y + 9x^2 - y^4 - y^3 - y^2 + y \quad (4)$$

$$4x^4 + x^3 - 15x^2y^2 - 2x^2y + x^2 + xy^2 + 3x - 4y^4 - 2y^3 + y^2 - y \quad (5)$$

$$x^3y - 4x^2y^2 + x^2 - xy^3 + 9xy - y^4 + 5y^2 + 36 \quad (6)$$

$$x^3y + 2x^2y^2 - 7x^2y + 3x^2 - 4xy^3 - 4xy^2 + xy + x - 4y^4 - 15y^2 + 4 \quad (7)$$

$$x^3y - 4x^2y^2 + x^2 - 4xy^3 - 4xy^2 + xy + x - y^4 - 3y^2 + 4 \quad (8)$$

$$-2x^3y + x^3 - 3x^2y^2 + 2x^2y + x^2 + xy^3 + xy^2 + xy + x - y^4 - 3y^2 + 4 \quad (9)$$

$$36x^4 + x^3 + 5x^2y^2 - 2x^2y + x^2 + xy^2 + 3x - y^4 - 2y^3 - y^2 - y \quad (10)$$

$$4x^4 + x^3 - 3x^2y^2 + x^2y - xy^2 + xy + x - y^4 - y^3 - 2y \quad (11)$$

$$4x^4 + x^3 - 15x^2y^2 + x^2y + 3x^2 + xy^2 - 7xy + x - 4y^4 + y^3 + 2y^2 + y \quad (12)$$

$$x^4 + 2x^3y + x^3 + x^2y + x^2 - 8xy^3 - 4xy^2 + x + 12y^4 - 4y^3 - 4y^2 - 2y \quad (13)$$

$$-x^3y + 3x^3 + x^2y^2 + x^2 - 2xy^3 + xy^2 - 2xy + x + 12y^4 - 8y^3 - 7y^2 + 2y + 1 \quad (14)$$

$$x^3y - x^2y^2 + x^2 - 4xy^3 - 4xy^2 + xy + x - 4y^4 - 15y^2 + 4 \quad (15)$$

$$x^4 + 2x^3y + x^3 - 7x^2y^2 + x^2y - 8xy^3 - 4xy^2 + xy + x + 12y^4 - 4y^3 - 2y \quad (16)$$

$$36x^4 + x^3 + 5x^2y^2 + x^2y + x^2 - xy^2 + 2xy + x - y^4 - y^3 - 3y^2 - 2y \quad (17)$$

$$3x^3y - x^3 + 9x^2y^2 - x^2 + xy^3 + xy^2 - 4xy - 4x + 4y^4 - 15y^2 - 4 \quad (18)$$

$$x^3y - 3x^2y + x^2 + xy^3 + xy^2 + xy + x - 4y^4 - 15y^2 + 4 \quad (19)$$

Secondo blocco di polinomi

$$x^2y^2 + x^2 + 9xy^2 - x + 4y^4 - 3y^2 - 1 \quad (20)$$

$$3x^2y^2 - 7x^2y + 2x^2 + xy^3 - 2xy^2 + xy - 2x + 4y^4 - 3y^2 - 1 \quad (21)$$

$$9x^2y^2 - x^2 + 9xy^2 - x + 36y^4 + 5y^2 - 1 \quad (22)$$

$$x^4 + 2x^3y + x^3 - 7x^2y^2 + x^2y + x^2 - 8xy^3 - xy^2 + 2xy + 12y^4 - y^3 - 3y^2 \quad (23)$$

$$4x^4 + x^3 - 15x^2y^2 - 2x^2y + xy^2 + xy - 4y^4 - 2y^3 + y^2 \quad (24)$$

$$x^2y^2 + x^2 + xy^3 + xy^2 - 4xy - 4x + 4y^4 - 3y^2 - 1 \quad (25)$$

$$x^2y + xy^3 - 2xy^2 + xy - 2x + y^4 + 2y^3 - 7y^2 - 8y + 12 \quad (26)$$

$$x^4 + 2x^3y + x^3 - 7x^2y^2 + x^2y + 3x^2 - 8xy^3 - 4xy^2 - 7xy + 12y^4 - 4y^3 + 2y^2 \quad (27)$$

$$x^2y + xy^3 + xy^2 - xy - x + y^4 + 2y^3 - 7y^2 - 8y + 12 \quad (28)$$

$$-4x^2y^2 + x^2 - xy^3 - xy^2 + xy + x + 12y^4 - 8y^3 - 7y^2 + 2y + 1 \quad (29)$$

$$4x^4 + x^3 - 3x^2y^2 - 2x^2y + xy^2 + xy - y^4 - 2y^3 + y^2 \quad (30)$$

$$x^2y^2 + 2x^2y - 3x^2 + xy^3 + xy^2 - 4xy - 4x + 4y^4 - 15y^2 - 4 \quad (31)$$

$$x^2y^2 - x^2 + xy^3 + xy^2 - 4xy - 4x + 36y^4 + 5y^2 - 1 \quad (32)$$

$$x^2y^2 - 4x^2 + 9xy^2 - x + 36y^4 + 5y^2 - 1 \quad (33)$$

$$x^2y + xy^3 - 2xy^2 + xy - 2x + 36y^4 + 5y^2 - 1 \quad (34)$$

$$x^2y + 9xy^2 - x + 36y^4 + 5y^2 - 1 \quad (35)$$

$$36x^4 + x^3 + 5x^2y^2 + x^2y + x^2 + xy^2 - y^4 + y^3 - 4y^2 \quad (36)$$

$$x^2y + xy^3 - 2xy^2 + xy - 2x + 4y^4 - 15y^2 - 4 \quad (37)$$

$$x^2y^2 + 2x^2y - 3x^2 + xy^3 + xy^2 - xy - x + y^4 + 2y^3 - 7y^2 - 8y + 12 \quad (38)$$

$$4x^2y^2 + x^2 + xy^3 + xy^2 - xy - x + 36y^4 + 5y^2 - 1 \quad (39)$$

$$36x^4 + x^3 + 5x^2y^2 + x^2y + 9x^2 + xy^2 - y^4 + y^3 - y^2 \quad (40)$$

$$4x^4 + x^3 - 3x^2y^2 + x^2y + 4x^2 + xy^2 - y^4 + y^3 + y^2 \quad (41)$$

$$-3x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - 2xy^3 + xy^2 - 2xy + x - y^4 - 3y^2 + 4 \quad (42)$$

$$x^2y + x^2 + xy^3 - 2xy^2 + xy - 2x + 36y^4 + 5y^2 - 1 \quad (43)$$

$$36x^4 + x^3 + 5x^2y^2 + x^2y + x^2 - 4xy^2 - y^4 - 4y^3 - 4y^2 \quad (44)$$

$$x^2y^2 + x^2 + xy^3 + xy^2 + xy + x + 4y^4 - 3y^2 - 1 \quad (45)$$

$$x^2y^2 + 2x^2y - 3x^2 + xy^3 + xy^2 - 4xy - 4x + 36y^4 + 5y^2 - 1 \quad (46)$$

$$-3x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - xy^3 + 9xy - y^4 + 5y^2 + 36 \quad (47)$$

$$36x^4 + x^3 + 5x^2y^2 + x^2y + x^2 - xy^2 - y^4 - y^3 + y^2 \quad (48)$$

$$-3x^2y + x^2 - xy^3 + 9xy - y^4 + 5y^2 + 36 \quad (49)$$

$$9x^2y^2 - x^2 + xy^3 - 2xy^2 + xy - 2x + 4y^4 - 3y^2 - 1 \quad (50)$$

$$x^2y^2 - 3x^2y + xy^3 + xy^2 - 4xy - 4x + 4y^4 - 3y^2 - 1 \quad (51)$$

$$9x^2y^2 - x^2 + 9xy^2 - x + y^4 + 2y^3 - 7y^2 - 8y + 12 \quad (52)$$

$$-4x^2y^2 + x^2 + xy^3 + xy^2 + xy + x + 12y^4 - 8y^3 - 7y^2 + 2y + 1 \quad (53)$$

$$3x^2y^2 - 7x^2y + 2x^2 + xy^3 + xy^2 - 4xy - 4x + 4y^4 - 15y^2 - 4 \quad (54)$$

$$x^2y^2 + x^2 - 2xy^3 + xy^2 - 2xy + x + 12y^4 - 8y^3 - 7y^2 + 2y + 1 \quad (55)$$

$$x^2y + xy^3 + xy^2 + xy + x + y^4 + 2y^3 - 7y^2 - 8y + 12 \quad (56)$$

$$-3x^2y^2 + 2x^2y + x^2 + xy^3 + xy^2 + xy + x - 4y^4 - 15y^2 + 4 \quad (57)$$

$$4x^2y^2 + x^2 + xy^3 - 2xy^2 + xy - 2x + 4y^4 - 3y^2 - 1 \quad (58)$$

$$-3x^2y + x^2 - xy^3 + 9xy + 12y^4 - 8y^3 - 7y^2 + 2y + 1 \quad (59)$$

$$36x^4 + x^3 + 5x^2y^2 + x^2y - xy^2 + xy - y^4 - y^3 + y^2 \quad (60)$$

$$-x^2y^2 + 9x^2 + xy^3 + xy^2 + xy + x - y^4 - 3y^2 + 4 \quad (61)$$

$$4x^4 + x^3 - 15x^2y^2 + x^2y + x^2 + xy^2 - 3xy - 4y^4 + y^3 \quad (62)$$

$$3x^2y^2 - 7x^2y + 2x^2 + xy^3 - 2xy^2 + xy - 2x + 4y^4 - 3y^2 - 1 \quad (63)$$

$$-4x^2y^2 + x^2 - 4xy^3 - 4xy^2 + xy + x - y^4 - 3y^2 + 4 \quad (64)$$

$$3x^2y^2 - 7x^2y + 2x^2 + 9xy^2 - x + 4y^4 - 15y^2 - 4 \quad (65)$$

$$2x^2y^2 - 7x^2y + 3x^2 - xy^3 - xy^2 + xy + x - 4y^4 - 15y^2 + 4 \quad (66)$$

$$-x^2y^2 + x^2 - 4xy^3 - 4xy^2 + xy + x - y^4 + 5y^2 + 36 \quad (67)$$

$$4x^4 + x^3 - 3x^2y^2 + x^2y + x^2 - xy^2 - y^4 - y^3 - y^2 \quad (68)$$

$$x^4 + 2x^3y - 7x^2y^2 + 9x^2y - 8xy^3 + xy + 12y^4 - y^3 \quad (69)$$

$$4x^4 + x^3 - 15x^2y^2 + x^2y + 3x^2 + xy^2 - 7xy - 4y^4 + y^3 + 2y^2 \quad (70)$$

$$-3x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - 2xy^3 + xy^2 - 2xy + x - 4y^4 - 15y^2 + 4 \quad (71)$$

$$-4x^2y^2 + x^2 + xy^3 + xy^2 + xy + x - 4y^4 - 15y^2 + 4 \quad (72)$$

$$4x^4 + x^3 - 15x^2y^2 - 2x^2y + 3x^2 + xy^2 - 7xy - 4y^4 - 2y^3 + 2y^2 \quad (73)$$

$$x^2y^2 - 4x^2 + xy^3 - 2xy^2 + xy - 2x + 36y^4 + 5y^2 - 1 \quad (74)$$

$$x^2y^2 + x^2y - 2xy^3 + xy^2 - 2xy + x - y^4 - 3y^2 + 4 \quad (75)$$

$$4x^4 + x^3 - 15x^2y^2 + x^2y + xy^2 + xy - 4y^4 + y^3 + y^2 \quad (76)$$

$$4x^4 + x^3 - 3x^2y^2 + x^2y + x^2 - xy^2 - 3xy - y^4 - y^3 \quad (77)$$

$$4x^4 - 15x^2y^2 + 9x^2y + x^2 - 4y^4 - y^3 + y^2 \quad (78)$$

Terzo blocco di polinomi

$$x^3y - 2x^2y^2 - xy^3 + 9xy + 12y^4 - 8y^3 - 7y^2 + 2y + 1 \quad (79)$$

$$-2x^3y + x^3 + 4x^2y^2 - 4x^2y + x^2 - xy^3 + 9xy - y^4 + 5y^2 + 36 \quad (80)$$

$$x^3 + xy^3 + xy^2 - xy - x + y^4 + 2y^3 - 7y^2 - 8y + 12 \quad (81)$$

$$x^3y + x^2y^2 - xy^3 + 9xy + 12y^4 - 8y^3 - 7y^2 + 2y + 1 \quad (82)$$

$$36x^4 + 5x^2y^2 + 9x^2y - y^4 - y^3 + 2y^2 + y \quad (83)$$

$$4x^4 - 3x^2y^2 + 9x^2y - y^4 - y^3 - 2y^2 + y \quad (84)$$

$$-2x^3y + x^3 + 4x^2y^2 - 4x^2y + x^2 - xy^3 + 9xy - y^4 + 5y^2 + 36 \quad (85)$$

$$x^3y - 2x^3 + xy^3 + xy^2 - xy - x + 4y^4 - 15y^2 - 4 \quad (86)$$

$$4x^4 - 3x^2y^2 + 9x^2y - y^4 - y^3 + y \quad (87)$$

$$x^3y + x^3 - xy^3 + 9xy + 12y^4 - 8y^3 - 7y^2 + 2y + 1 \quad (88)$$

$$36x^4 + x^3 + 5x^2y^2 + x^2y - 2x^2 - 4xy^2 - 4xy + x - y^4 - 4y^3 - 2y^2 + y \quad (89)$$

$$x^3y + x^3 - x^2y^2 - 2x^2y - x^2 - 2xy^3 + xy^2 - 2xy + x - y^4 + 3y^2 + 4 \quad (90)$$

$$4x^4 - 3x^2y^2 + 9x^2y - 2x^2 - 4xy + x - y^4 - y^3 - 2y^2 + y \quad (91)$$

$$4x^4 - 3x^2y^2 + 9x^2y + x^2 - 4xy + x - y^4 - y^3 + 4y^2 - 2y \quad (92)$$

$$36x^4 + x^3 + 5x^2y^2 - 2x^2y + xy^2 - y^4 - 2y^3 + y^2 + y \quad (93)$$

$$x^3y + x^2y^2 - xy^3 + 9xy + 12y^4 - 8y^3 - 7y^2 + 2y + 1 \quad (94)$$

$$-x^3y + 3x^3 - 2x^2y^2 + 12x^2y - 18x^2 - xy^3 - xy^2 + xy + x - 4y^4 - 15y^2 + 4 \quad (95)$$

$$-2x^3y + x^3 + 4x^2y^2 - 4x^2y + x^2 - xy^3 + 9xy + 12y^4 - 8y^3 - 7y^2 + 2y + 1 \quad (96)$$

Quarto blocco di polinomi

$$x^2 + xy^3 + xy^2 - 4xy - 4x + 4y^4 - 15y^2 - 4 \quad (97)$$

$$x^2y^2 + 2x^2y + x^2 + 2xy^3 + 2xy^2 + 2xy + 2x - y^4 + 5y^2 + 36 \quad (98)$$

$$x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - y^4 + 5y^2 + 36 \quad (99)$$

$$x^4 + 2x^3y - x^3 - 7x^2y^2 - x^2y - 8xy^3 + 4xy^2 + 12y^4 + 4y^3 + y^2 \quad (100)$$

$$x^2y^2 + 2x^2y + x^2 + 4xy^3 - 2xy^2 + 4xy - 2x - y^4 + 5y^2 + 36 \quad (101)$$

$$4x^2y^2 - 4x^2y + x^2 + 12y^4 - 8y^3 - 7y^2 + 2y + 1 \quad (102)$$

$$x^4 + 2x^3y - 7x^2y^2 + 9x^2 - 8xy^3 - 6xy + 12y^4 + y^2 \quad (103)$$

$$x^2y^2 - 2xy^3 + 18xy - y^4 - 3y^2 + 4 \quad (104)$$

$$4x^4 - 15x^2y^2 - 9x^2y - 4y^4 + y^3 + y^2 \quad (105)$$

$$x^2y^2 - 6x^2y + 9x^2 - 2xy^3 + 18xy - y^4 - 3y^2 + 4 \quad (106)$$

$$x^2y^2 - 4x^2y + 4x^2 - xy^3 - xy^2 - xy - x + 4y^4 - 3y^2 - 1 \quad (107)$$

$$x^2 - 18xy^2 + 2x + 36y^4 + 5y^2 - 1 \quad (108)$$

$$x^2y^2 + 4xy^3 - 2xy^2 + 4xy - 2x - y^4 + 5y^2 + 36 \quad (109)$$

$$x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - 2xy^3 - 2xy^2 + 8xy + 8x + 36y^4 + 5y^2 - 1 \quad (110)$$

$$36x^4 - x^3 + 5x^2y^2 - x^2y + 9x^2 + xy^2 - 6xy - y^4 + y^3 + y^2 \quad (111)$$

$$36x^4 - 2x^3 + 5x^2y^2 - 2x^2y + x^2 + 2xy^2 - 4xy - y^4 + 2y^3 + 4y^2 \quad (112)$$

$$4x^2y^2 - 4x^2y + x^2 + 2xy^3 + 2xy^2 - 2xy - 2x - 4y^4 - 15y^2 + 4 \quad (113)$$

$$x^2y^2 + 2x^2y + x^2 + 4xy^3 + 4xy^2 - xy - x - 4y^4 - 15y^2 + 4 \quad (114)$$

$$x^2y^2 - 4xy^3 - 4xy^2 + xy + x - y^4 - 3y^2 + 4 \quad (115)$$

$$36x^4 + 2x^3 + 5x^2y^2 + 2x^2y + x^2 - 8xy^2 - 4xy - y^4 - 8y^3 + 4y^2 \quad (116)$$

$$9x^2y^2 - 6x^2y + x^2 - xy^3 + 2xy^2 - xy + 2x + 4y^4 - 15y^2 - 4 \quad (117)$$

$$x^4 + 2x^3y - 7x^2y^2 + 9x^2 - 8xy^3 - 6xy + 12y^4 + y^2 \quad (118)$$

$$x^2y^2 - 8xy^3 - 8xy^2 + 2xy + 2x - y^4 + 5y^2 + 36 \quad (119)$$

$$x^4 + 2x^3y - 7x^2y^2 + 9x^2 - 8xy^3 - 6xy + 12y^4 + y^2 \quad (120)$$

$$x^2y^2 - 4x^2y + 4x^2 - 18xy^2 + 2x + 4y^4 - 3y^2 - 1 \quad (121)$$

$$x^2y^2 - 4x^2y + 4x^2 + 2xy^3 - 4xy^2 + 2xy - 4x + 36y^4 + 5y^2 - 1 \quad (122)$$

$$x^2y^2 + 2xy^3 - 18xy - y^4 - 3y^2 + 4 \quad (123)$$