Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2022/2023

Febbraio

Esercizio 1. Sia $q_b : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da

$$q_b(x, y, z, w) = 2bx^2 + 2by^2 + xy - (b + 1)zw + bz^2$$

al variare di $b \in \mathbb{R}$.

(1) Studiare per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ la forma quadratica risulta degenere. Dimostrare inoltre che non esistono valori di $b \in \mathbb{R}$ che rendono $(\mathbb{R}^4, q_b)$ uno spazio euclideo.

(2) Per i valori di $b \in \mathbb{R}$ tali per cui q_b è degenere indicare la segnatura della forma quadratica.

(3) Sia fissato il valore $b = 0$. Sia $b_0 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare associata a q_0 e sia

$$Q_0 = \{q_0(x, y, z, w) = 0\} \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$$

la quadrica proiettiva associata. Sia $A = [1, 0, 1, 0]$ e si indichi con

$$A^\perp = \{X \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) | b_0(A, X) = 0\}$$

Mostrare che $A^\perp \cap Q_0$ è una conica proiettiva degenere.

Esercizio 2. Sia C la cubica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ data dall'equazione:

$$F(x_0, x_1, x_2) : x_1x_2^2 - 2x_0x_1x_2 - 6x_0^2x_2 + x_0x_2^2 + 8x_0^3 = 0$$

(1) Mostrare che C ha due soli punti singolari A e B. Per ognuno di essi si descriva la molteplicità e le tangenti principali.

(2) Sia $\mathbb{A}^2(\mathbb{C}) = U_1 = \{x_1 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Denotiamo con $C' := C \cap U_1$ la curva affine traccia di C in U_1. Determinare gli eventuali asintoti di C'.

Soluzione 1. (1) Associamo a q_b la matrice che la rappresenta sulla base (x, y, z, w) e moltiplichiamo per 2 in modo da rendere più snella la notazione:

$$M_b = \begin{pmatrix} 4b & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & -(b+1) \\ 0 & 0 & -(b+1) & 0 \end{pmatrix}$$

La forma quadratica q_b è degenere esattamente quando $det(M_b) = 0$. Sviluppando il determinante secondo la prima colonna otteniamo:

$$det(M_b) = 4b \begin{vmatrix} 4b & 0 & 0 \\ 0 & 2b & -(b+1) \\ 0 & -(b+1) & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & -(b+1) \\ 0 & -(b+1) & 0 \end{vmatrix}$$

Sviluppando ulteriormente lungo la prima colonna le due matrici 3×3 ottenute e raccogliendo il fattore

$$det \begin{pmatrix} 2b & -(b+1) \\ -(b+1) & 0 \end{pmatrix} = -(b+1)^2$$

otteniamo

$$det(M_b) = -(16b^2 - 1)(b+1)^2 = -(4b-1)(4b+1)(b+1)^2$$

Perciò la forma quadratica q_0 è degenere se e solo se $b = \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -1$.

Affinchè $(\mathbb{R}^4, q_b)$ sia uno spazio euclideo occorre che q_b sia non degenere definita positiva. Utilizzando il criterio di Sylvester dei minori principali osserviamo che la condizione è equivalente a richiedere

$$\begin{cases} det(M_b^1) = 4b > 0 \\ det(M_b^2) = (4b-1)(4b+1) > 0 \\ det(M_b^3) = 2b(4b-1)(4b+1) > 0 \\ det(M_b^4) = det(M_b) = -(b+1)^2(4b-1)(4b+1) > 0 \end{cases}$$

Notiamo che le condizioni

$$det(M_b^2) = (4b-1)(4b+1) > 0$$

e

$$det(M_b^4) = det(M_b) = -(b+1)^2(4b-1)(4b+1) > 0$$

sono incompatibili, poichè $-(b+1)^2$ ha sempre segno negativo sotto l'ipotesi che q_b sia non degenere. Pertanto non esiste nessun $b \in \mathbb{R}$ che rende $(\mathbb{R}^4, q_b)$ uno spazio euclideo.

(2) Ci sono vari metodi equivalenti per calcolare la segnatura di una forma quadratica. Sotto l'ipotesi di rango non massimo la via più rapida è il metodo del completamento dei quadrati

di Gauss. Facciamo i 3 casi separatamente.

(a) (Caso $b = \frac{1}{4}$) La forma quadratica risulta la seguente

$$xy - \frac{5}{4}zw + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

Completando i quadrati avremo

$$\frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{4}(z - \frac{5}{2}w)^2 - \frac{25}{16}w^2$$

Pertanto si hanno 2 coefficienti positivi ed uno negativo. La segnatura risulta quindi essere $sgn(q_{\frac{1}{4}}) = (p,q) = (2,1)$.

(b) (Caso $b = -\frac{1}{4}$) La forma quadratica risulta la seguente

$$xy - \frac{3}{4}zw - \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

Completando i quadrati avremo

$$-\frac{1}{2}(x-y)^2 - \frac{1}{4}(z + \frac{3}{2}w)^2 + \frac{9}{16}w^2$$

Pertanto si hanno 2 coefficienti negativi ed uno positivo. La segnatura risulta quindi essere $sgn(q_{-\frac{1}{4}}) = (p,q) = (1,2)$.

(c) (Caso $b = -1$) La forma quadratica risulta la seguente

$$xy - z^2 - 2x^2 - 2y^2$$

Completando i quadrati avremo

$$-2(x^2 - \frac{1}{4}y^2) - \frac{15}{8}y^2 - z^2$$

Pertanto si hanno 3 coefficienti negativi. La segnatura risulta quindi essere $sgn(q_{-1}) = (p,q) = (0,3)$.

(3) Sia $Q_0 : xy - zw = 0$ la quadrica associata alla forma quadratica q_0. La matrice rappresentativa di b_0 nella base standard (x,y,z,w) è data, a meno di un coefficiente moltiplicativo, da

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Perciò l'equazione del piano $A^\perp$ è data da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$$

Da cui otteniamo l'equazione

$$A^{\perp} : y - w = 0$$

Pertanto abbiamo

$$A^{\perp} \cap Q_0 = \begin{cases} xy - zw = 0 \\ y - w = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y = w \\ xy - zy \end{cases}$$

dove $xy - zy = 0$ è l'equazione di $A^{\perp} \cap Q_0$ nel piano proiettivo $A^{\perp} = [x, y, z, y] \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Notiamo che in questo piano la conica $xy - zy = 0$ si scompone come $y(x - z) = 0$. Pertanto l'intersezione è una conica formata dalle due rette $y = 0$ e $x - z = 0$ nel piano $A^{\perp}$, e risulta quindi degenere.

□

Soluzione 2. (1) Per trovare i punti singolari di C dobbiamo risolvere il sistema delle derivate parziali di $F(x_0, x_1, x_2)$, ovvero

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_0} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} -2x_1x_2 - 12x_0x_2 + x_2^2 + 24x_0^2 = 0 \\ x_2^2 - 2x_0x_2 = x_2(x_2 - 2x_0) = 0 \\ 2x_1x_2 - 2x_0x_1 - 6x_0^2 + 2x_0x_2 = 0 \end{cases}$$

Osservando la seconda equazione del sistema dobbiamo analizzare i seguenti due casi:

(a) (Caso $x_2 = 0$) Sostituendo $x_2 = 0$ nella prima equazione otteniamo $24x_0^2 = 0$ che ha come unica soluzione $x_0 = 0$. Poichè anche la terza equazione risulta identicamente nulla abbiamo che un punto singolare è $A = [0, 1, 0]$.

(b) (Caso $x_2 = 2x_0$) Sostituendo nella prima equazione otteniamo l'equazione $-4x_1x_0 + 4x_0^2 = 4x_0(x_0 - x_1) = 0$, che fornisce come soluzioni $x_0 = 0$ oppure $x_0 = x_1$. Se $x_0 = 0$ dall'ipotesi abbiamo $x_2 = 0$ e quindi ritroviamo il punto A. Considerando quindi $x_0 = x_1$ troviamo il punto $B = [1, 1, 2]$. Questo è un punto singolare in quanto verifica anche la terza equazione del sistema.

Per studiare le singolarità nei due punti partiamo da $B = [1, 1, 2]$. Notiamo che $B \in U_1 = \{[x_0, x_1, x_2] | x_1 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Dotiamo $U_1 = \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ di coordinate (x, y) in modo tale che $x = \frac{x_0}{x_1}$ e $y = \frac{x_2}{x_1}$. Pertanto possiamo deomogeneizzare l'equazione di C rispetto a x_1 e considerare quindi la traccia affine $C' = C \cap U_1$. Otteniamo dunque che l'equazione di C' è la seguente:

$$C' : y^2 - 2xy - 6x^2y + xy^2 + 8x^3 = 0$$

Per studiare la singlarità in B dobbiamo traslare C' in modo tale che B coincida con l'origine. Per fare ciò usiamo la trasformazione:

$$\begin{cases} X = x - 1 \\ Y = y - 2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases}$$

Sostituendo otteniamo l'equazione:

$$8x^3 - 6x^2y + 12x^2 + xy^2 - 10xy + 2y^2 = 0$$

Notiamo che la forma di grado 2 non è nulla e pertanto in B la curva ha un punto doppio. Per calcolare le tangenti principali dobbiamo fattorizzare la forma

$$12x^2 - 10xy + 2y^2 = 2(3x - y)(2x - y)$$

Pertanto le tangenti principali (traslate) sono $y = 3x$ e $y = 2x$. Invertendo la traslazione troviamo le tangenti principali originarie

$$L_1 : y - 2 = 3(x - 1) \quad \text{e} \quad L_2 : y - 2 = 2(x - 1)$$

Analogamente per il punto $A = [0, 1, 0]$, che ora corrisponde all'origine in U_1, si ha un punto doppio con tangenti principali date dalla fattorizzazione della forma:

$$y^2 - 2xy = y(y - 2x)$$

Pertanto le tangenti principali in A risultano

$$R_1 : y = 0 \quad \text{e} \quad R_2 : y = 2x$$

(2) L'equazione di $C' = C \cap U_1$ abbiamo visto essere la seguente:

$$y^2 - 2xy - 6x^2y + xy^2 + 8x^3 = 0$$

Gli asintoti corrispondono alle rette tangenti ai punti impropri. Perciò intersechiamo C' con la retta all'infinito $x_1 = 0$ di U_1. Sostituendo nell'equazione della chiusura proiettiva di C', che corrisponde a C, la condizione $x_1 = 0$ otteniamo:

$$C \cap \{x_1 = 0\} : -6x_0^2x_2 + x_0x_2^2 + 8x_0^3 = 0$$

Raccogliendo x_0 otteniamo $x_0(8x_0^2 - 6x_0x_2 + x_2^2)$. Risolvendo l'equazione di secondo grado omogenea in parentesi otteniamo le due soluzioni $2x_0 = x_2$ e $4x_0 = x_2$. Pertanto i punti impropri di C' sono $P_1 = [0, 0, 1], P_2 = [1, 0, 2], P_3 = [1, 0, 4]$. Calcoliamo i 3 asintoti associati:

(a) (Caso P_1) Abbiamo che la retta tangente a C è data da

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(P_1)x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(P_1)x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(P_1)x_2 = 0$$

Sostituendo si ottiene la retta:

$$S_1 : x_0 + x_1 = 0$$

(b) (Caso P_2) Abbiamo che la retta tangente a C è data da

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(P_2)x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(P_2)x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(P_2)x_2 = 0$$

Sostituendo si ottiene la retta:

$$S_2 : -4x_0 - 2x_2 = 0$$

(c) (Caso P_3) Abbiamo che la retta tangente a C è data da

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(P_3)x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(P_3)x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(P_3)x_2 = 0$$

Sostituendo si ottiene la retta:

$$S_3 : -12x_0 + 8x_1 + 2x_2 = 0$$

Nel piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{C}) = U_1$ le equazioni dei tre asintoti risultano:

$$x + 1 = 0 \quad \text{e} \quad -4x - 2y = 0 \quad \text{e} \quad -12x + 2y + 8 = 0$$

$\square$