



Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circularità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Intelligenza Matematica applicata a questioni di circularità, il problema di Malfatti

Marco Andreatta

Dipartimento di Matematica di Trento
Unione Matematica Italiana

Festa Scienza e Filosofia, Foligno 2025



Il Problema di Didone

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

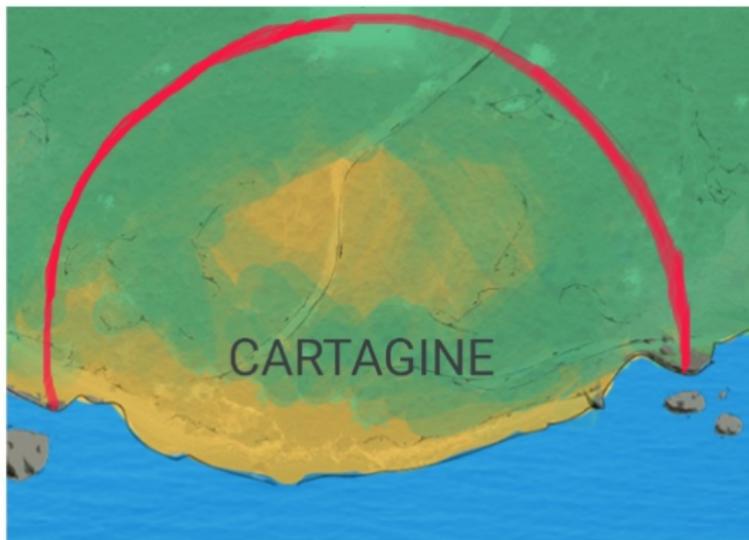
Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere





Il Problema di Didone - Archimede

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Problema: Fissato un contorno chiuso di lunghezza L qual è la posizione che questo contorno deve assumere per contenere una regione di area massima?



Il Problema di Didone - Archimede

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Problema: Fissato un contorno chiuso di lunghezza L qual è la posizione che questo contorno deve assumere per contenere una regione di area massima?

Risposta: il cerchio



Simmetrizzazione di Archimede - Steiner

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

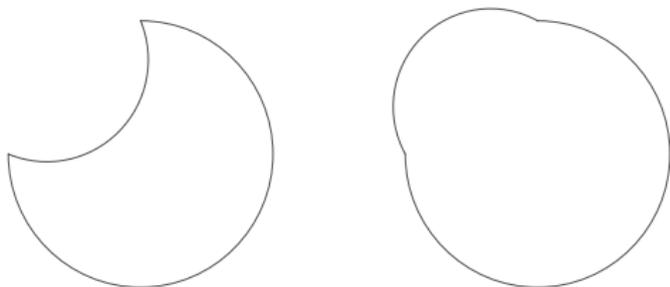
Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere





Simmetrizzazione di Archimede - Steiner

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

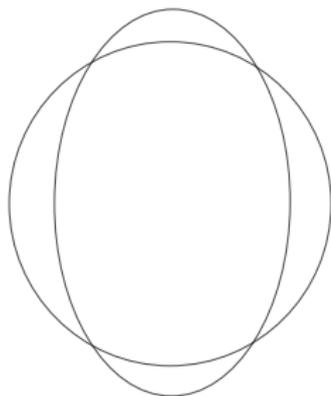
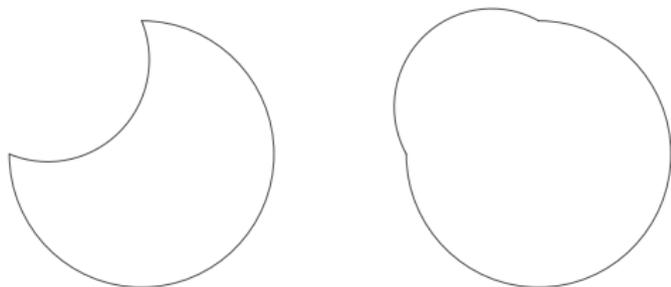
Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere





Disuguaglianza Isoperimetrica

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Proposizione. Consideriamo nel piano una regione delimitata da una curva chiusa. Sia A l'area della regione e L la lunghezza della curva; vale la disuguaglianza

$$4\pi A \leq L^2$$

Avremo uguaglianza se e solo se la figura è un cerchio:

$$4\pi(\pi r^2) = (2\pi r)^2$$



La Sfera

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere





Disuguaglianza Isoperimetrica

Proposizione. Consideriamo nello spazio una regione delimitata da una superficie chiusa; sia V il volume della regione e S l'area della superficie.

$$36\pi V^2 \leq S^3$$

Avremo uguaglianza se e solo se la superficie è una sfera.

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere



Disuguaglianza Isoperimetrica

Proposizione. Consideriamo nello spazio una regione delimitata da una superficie chiusa; sia V il volume della regione e S l'area della superficie.

$$36\pi V^2 \leq S^3$$

Avremo uguaglianza se e solo se la superficie è una sfera.

Proposizione. Sia A un insieme dello iperspazio euclideo di dimensione n delimitato da un bordo chiuso; sia V il volume della regione e S quello del suo bordo.

$$n^n k_n V^{n-1} \leq S^n$$

Vale uguale se e solo se A è la parte di iperspazio racchiuso in una $(n - 1)$ -sfera S .

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere



Gianfrancesco Malfatti

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere



Ala e Ferrara, (1731 - 1807)



Gianfrancesco Malfatti

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere



Ala e Ferrara, (1731 - 1807)

un intellettuale attivo nell'età dei Lumi,
promotore di nuove idee in diversi
campi della matematica tra i quali
**algebra, calculus, geometria e
teoria della probabilità.**



Gianfrancesco Malfatti

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere



Ala e Ferrara, (1731 - 1807)

un intellettuale attivo nell'età dei Lumi,
promotore di nuove idee in diversi
campi della matematica tra i quali
**algebra, calculus, geometria e
teoria della probabilità.**

ruolo centrale nella creazione della
Nuova Enciclopedia Italiana (1779),
nello spirito della **Encyclopédie**
curata da Diderot e d'Alambert.



.. e il suo problema

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circularità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Memoria sopra un problema stereotomico.
Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, 10 p. 1^a (1803) pp. 235-244 - in 4°.

3

M E M O R I A

SOPRA UN PROBLEMA STEREOTOMICO

DI GIANFRANCESCO MALFATTI.



Dato un Prisma retto triangolare di qualunque materia come di marmo, cavare da esso tre Cilindri dell' altezza del Prisma e della maggior grossezza possibile correspettivamente, e in conseguenza col minor avanzo possibile di materia avuto riguardo alla voluta grossezza .



... e il suo problema

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Il termine **stereotomico** nel titolo è poco usato, parola composta

stereo = $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\omicron$ = solido, rigido

tomia = $\tau\omicron\mu\iota\alpha$ = divisione, sezione



... e il suo problema

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Il termine **stereotomico** nel titolo è poco usato, parola composta

stereo = $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\omicron$ = solido, rigido

tomia = $\tau\omicron\mu\iota\alpha$ = divisione, sezione

per la Treccani

Stereotomia = Insieme di procedimenti e di regole suggeriti dalla geometria descrittiva per il taglio e per il disegno dei conci di una progettata struttura (arco, volta, muro, ...) in pietra da taglio o anche in legno e altri materiali da taglio



Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Memoria sopra un problema stereotomico.

Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana, 10 p. 1^a (1803) pp. 235-244 - in 4^o.

3

M E M O R I A

SOPRA UN PROBLEMA STEREOTOMICO

DI CIANFRANCESCO MALFATTI.



Dato un Prisma retto triangolare di qualunque materia come di marmo, cavare da esso tre Cilindri dell' altezza del Prisma e della maggior grossezza possibile corresponsivamente, e in conseguenza col minor avanzo possibile di materia avuto riguardo alla voluta grossezza.

Vi sono in Geometria alcuni problemi, la soluzione analitica de' quali non si può presentare senza tedio del lettore attesa la lunghezza e l' improbità de' calcoli, ai quali ha dovuto soggiacere il Geometra nella soluzione del suo problema; laddove dopo aver conosciuto il vero risultato, convertendo l' analisi in sintesi simbolica, ed il problema in teorema, succede parecchie volte che si possa per una via più agevole e piana dare di esso una comoda dimostrazione. Di questa specie è l' enunziato Problema che mi fu proposto non ha guari, e che mi parve sul principio di facile soluzione, osservando che esso riducevasi alla iscrizione di tre cerchi nei due triangoli delle basi parallele del Prisma, cosicchè ciascun de' cerchi toccasse gli altri due ed insieme due lati del triangolo. Intrapresa per tanto la soluzione di questo secondo Problema, mi vidi contro ogni mia aspettazione ingolfato in prolissi calcoli e scabrose formole, atte a stancar la pazienza d' un uomo meno di me ostinato. Superata però la difficoltà e avuti de' risultati assai semplici, tentai, cambiando il Problema in Teorema, di aprirmi una

A a

via



Osservazioni

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

1. Malfatti, nel titolo, osserva che il problema si riduce, con una stereotomia, ad un problema di geometria piana, che si può così enunciare:

disporre all'interno di un dato triangolo tre cerchi non intersecantesi tra loro e di area complessiva massima.

Questo è conosciuto in letteratura come il *Malfatti's marble problem*.



Osservazioni

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

1. Malfatti, nel titolo, osserva che il problema si riduce, con una stereotomia, ad un problema di geometria piana, che si può così enunciare:

disporre all'interno di un dato triangolo tre cerchi non intersecantesi tra loro e di area complessiva massima.

Questo è conosciuto in letteratura come il *Malfatti's marble problem*.

2. Quindi afferma, senza giustificare (!), che esso "riducevasi alla iscrizione di tre cerchi nei due triangoli delle basi parallele, cosicchè ciascun de' cerchi toccasse gli altri due e insieme due lati del triangolo". Questa configurazione geometrica è detta *Malfatti's configuration*



Malfatti's configuration

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

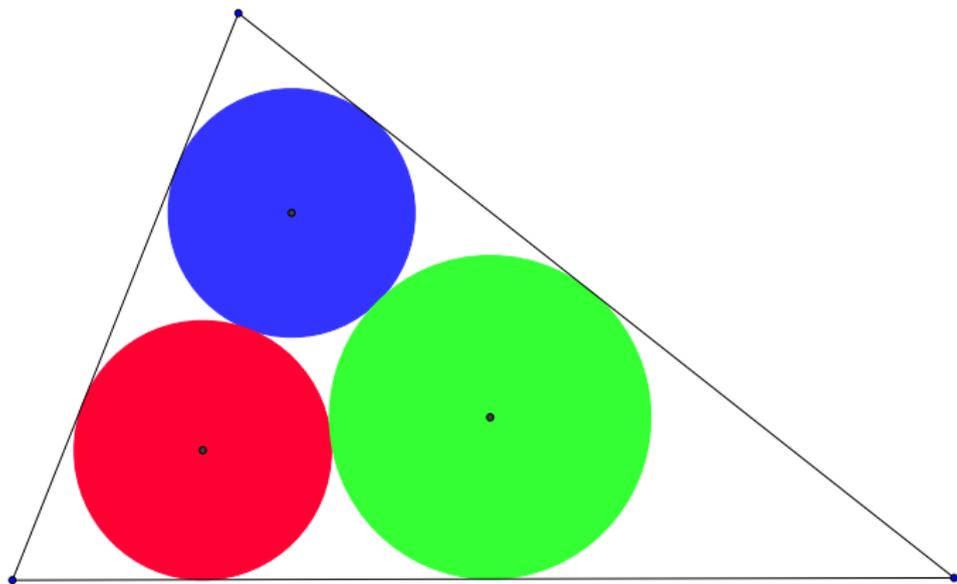
Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere



*iscrizione di tre cerchi in un triangolo, cosicchè ciascun de' cerchi
toccasse gli altri due e insieme due lati del triangolo*



Costruzione della configurazione di Malfatti

” .. Intrapresa pertanto la soluzione di questo secondo problema, mi vidi contro ogni mia aspettazione ingolfato in prolissi calcoli e scabrose formole,....”

Malfatti dedica il resto del lavoro per proporre una costruzione algebrica della configurazione per ogni dato triangolo; calcola il centro dei tre cerchi coinvolti, notando anche che questi centri possono essere costruiti con riga e compasso.

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere



Costruzione della configurazione di Malfatti

” .. Intrapresa pertanto la soluzione di questo secondo problema, mi vidi contro ogni mia aspettazione ingolfato in prolissi calcoli e scabrose formole,....”

Malfatti dedica il resto del lavoro per proporre una costruzione algebrica della configurazione per ogni dato triangolo; calcola il centro dei tre cerchi coinvolti, notando anche che questi centri possono essere costruiti con riga e compasso.

Questa configurazione si trova anche in raffigurazioni geometriche in **Templi Giapponesi**, attribuite a Chokuyen Naonobu Ajima (1732 – 1798).

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere



Costruzione della configurazione di Malfatti

” .. Intrapresa pertanto la soluzione di questo secondo problema, mi vidi contro ogni mia aspettazione ingolfato in prolissi calcoli e scabrose formole,....”

Malfatti dedica il resto del lavoro per proporre una costruzione algebrica della configurazione per ogni dato triangolo; calcola il centro dei tre cerchi coinvolti, notando anche che questi centri possono essere costruiti con riga e compasso.

Questa configurazione si trova anche in raffigurazioni geometriche in **Templi Giapponesi**, attribuite a Chokuyen Naonobu Ajima (1732 – 1798).

Molti matematici famosi hanno contribuito con realizzazioni originali di questa configurazione, tra questi Steiner, Cayley, Schellbach e Clebsch.

Nel 1811 Gergonne pose il problema di costruire un simile arrangiamento nello spazio tridimensionale, usando un tetraedro e quattro sfere; fu costruito da Sansone (Presidente UMI) nel 1968.

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere



La Configurazione di Malfatti non risolve il problema del marmista!

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

H. Lob and H.W. Richmond, *On the solution of the Malfatti problem for a triangle* *Proc. London Math. Soc. vol. 2, 1930*

in una breve nota conclusiva notano che in un triangolo equilatero il cerchio iscritto e due piccoli cerchi iscritti negli angoli hanno area complessiva più grande dei cerchi della configurazione di Malfatti (sottolineano anche che un massimo locale non è necessariamente un massimo).



Malfatti's versus Lob Richmond's

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

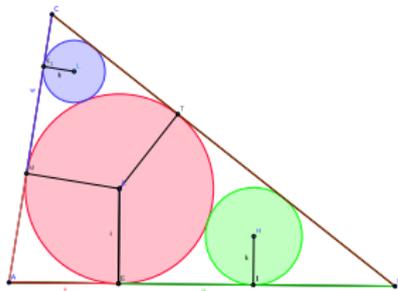
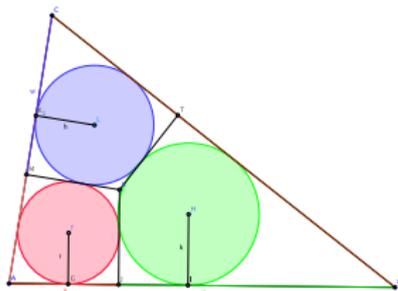
Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere





Dall'Italia ... alla Russia

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere



Gianfrancesco Malfatti

Ala e Ferrara

Italia (1731 - 1807)

Viktor Zalgaller
Parfino e San Pietroburgo
Russia (1920-)





La Soluzione

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

M. Goldberg, *On the original Malfatti problem*, *Math. Magazine*. vol. 40, 1967

prova che, per ogni triangolo, la configurazione di Lob Richmond è di area più grande di quella di Malfatti.



La Soluzione

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

M. Goldberg, *On the original Malfatti problem*, *Math. Magazine*. vol. 40, 1967

prova che, per ogni triangolo, la configurazione di Lob Richmond è di area più grande di quella di Malfatti.

V.A. Zalgaller - G. A. Los, *Solution of the Malfatti problem*, *Ukrain. Geom. Sb.*, n. 35, 1992, tradotto nel 1994:

la configurazione di Lob Richmond risolve il problema del marmista di Malfatti.



La Soluzione

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

M. Goldberg, *On the original Malfatti problem*, *Math. Magazine*. vol. 40, 1967

prova che, per ogni triangolo, la configurazione di Lob Richmond è di area più grande di quella di Malfatti.

V.A. Zalgaller - G. A. Los, *Solution of the Malfatti problem*, *Ukrain. Geom. Sb.*, n. 35, 1992, tradotto nel 1994:

la configurazione di Lob Richmond risolve il problema del marmista di Malfatti.

Entrambe le dimostrazioni si basano su un argomenti numerico e quindi fanno uso del computer; alcuni matematici considerano queste prove incomplete.



Cenni sulla prova di Los-Zallgaller

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Definizione. Un sistema di tre cerchi non intersecantisi in un dato triangolo si dice rigido se non è possibile deformare uno dei cerchi aumentando il raggio, senza muovere gli altri due e senza sovrapporre i cerchi.

La soluzione del problema di Malfatti è evidentemente all'interno dei sistemi rigidi



Cenni sulla prova di Los-Zallgaller

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Definizione. Un sistema di tre cerchi non intersecantisi in un dato triangolo si dice rigido se non è possibile deformare uno dei cerchi aumentando il raggio, senza muovere gli altri due e senza sovrapporre i cerchi.

La soluzione del problema di Malfatti è evidentemente all'interno dei sistemi rigidi

Ogni cerchio di un sistema rigido ha almeno tre punti di contatto con gli altri cerchi o con i lati del triangolo.

Ci sono, a meno di ovvie equivalenze, 14 sistemi rigidi differenti, descritti nella figura seguente.



Cenni sulla prova di Los-Zalgaller

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circularità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Definizione. Un sistema di tre cerchi non intersecantisi in un dato triangolo si dice rigido se non è possibile deformare uno dei cerchi aumentando il raggio, senza muovere gli altri due e senza sovrapporre i cerchi.

La soluzione del problema di Malfatti è evidentemente all'interno dei sistemi rigidi

Ogni cerchio di un sistema rigido ha almeno tre punti di contatto con gli altri cerchi o con i lati del triangolo.

Ci sono, a meno di ovvie equivalenze, 14 sistemi rigidi differenti, descritti nella figura seguente.

Zalgaller and Los hanno mostrato, attraverso una elaborata analisi caso per caso, che tutti gli arrangiamenti, a parte quello greedy, ammettono un miglioramento.



Rigid Arrangements of 3-circles

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

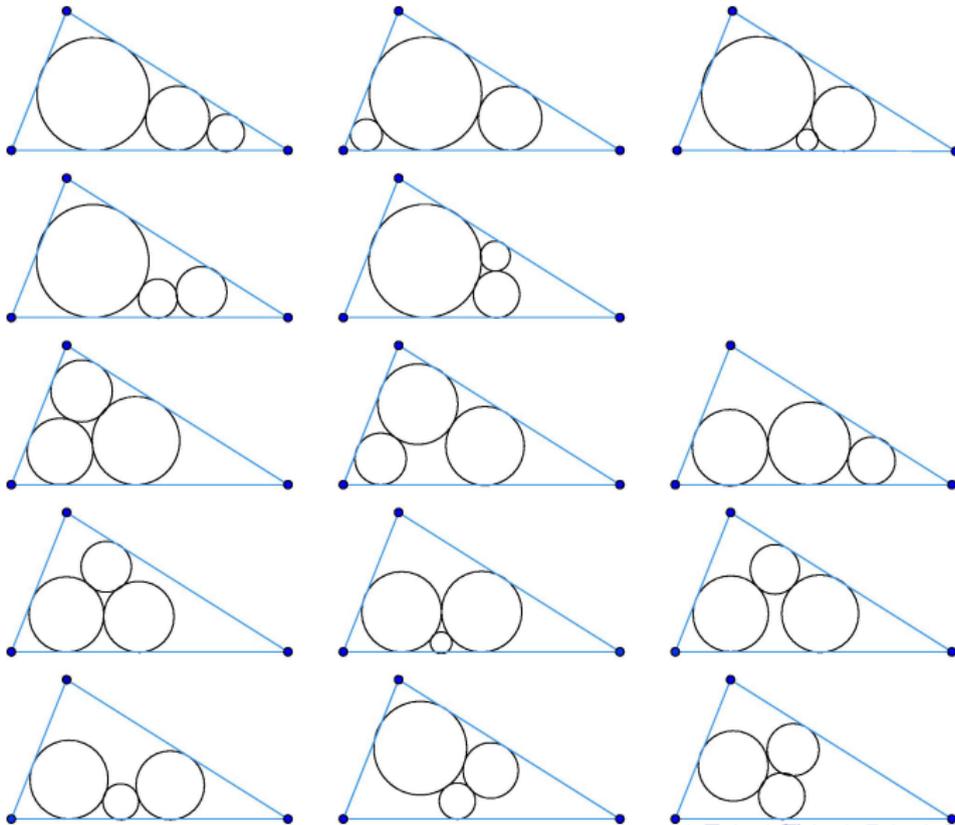
Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere





L'arrangiamento Greedy

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Diremo che tre (o in generale n) cerchi in una data regione formano un *arrangiamento greedy*, se sono il risultato di un processo finito di tre (o in generale n) passi, dove ad ogni passo si sceglie il cerchio più grande che non si sovrapponga ai cerchi precedenti e che sia contenuto nella regione.



Algoritmo Greedy

Un **algoritmo greedy** è un algoritmo che procede per passi successivi e che a ogni passo sceglie la soluzione migliore o più conveniente (scelta ottimale locale). Questo tipo di algoritmo, applicato a **problemi di ottimizzazione**, termina a volte con la soluzione globale migliore, ma non sempre.

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere



Algoritmo Greedy

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Un **algoritmo greedy** è un algoritmo che procede per passi successivi e che a ogni passo sceglie la soluzione migliore o più conveniente (scelta ottimale locale). Questo tipo di algoritmo, applicato a **problemi di ottimizzazione**, termina a volte con la soluzione globale migliore, ma non sempre.

Ad esempio l'algoritmo greedy risolve il problema di trovare **il numero minimo di monete per dare un resto**;

ed anche il problema di determinare **il cammino più breve da un vertice ad un altro in un grafo pesato e orientato** (programmi di navigazione satellitare).



Algoritmo Greedy

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Un **algoritmo greedy** è un algoritmo che procede per passi successivi e che a ogni passo sceglie la soluzione migliore o più conveniente (scelta ottimale locale). Questo tipo di algoritmo, applicato a **problemi di ottimizzazione**, termina a volte con la soluzione globale migliore, ma non sempre.

Ad esempio l'algoritmo greedy risolve il problema di trovare **il numero minimo di monete per dare un resto**;

ed anche il problema di determinare **il cammino più breve da un vertice ad un altro in un grafo pesato e orientato** (programmi di navigazione satellitare).

Se per un dato problema di ottimizzazione l'algoritmo greedy non funziona, spesso significa che la soluzione va ricercata in algoritmi con esecuzioni "esponenziali".



Una Congettura

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Congettura. L'arrangiamento greedy è l'arrangiamento di area più grande tra tutti i possibili arrangiamenti di n cerchi in un triangolo senza sovrapposizioni.



Un cerchio

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

La congettura è ovvia per $n = 1$
(il cerchio inscritto è una configurazione rigida e dunque è il cerchio di
area massima contenuto nel triangolo.)



Due cerchi

Teorema: L'arrangiamento greedy ha l'area totale maggiore tra tutte le coppie di cerchi non sovrapposti in un triangolo.

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

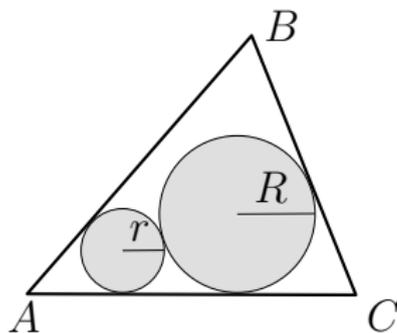
Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere



Due cerchi

Teorema: L'arrangiamento greedy ha l'area totale maggiore tra tutte le coppie di cerchi non sovrapposti in un triangolo.



La figura rappresenta un arrangiamento rigido di due cerchi. Siano r, R i due raggi; R è unicamente determinato da r , ovvero $R = R(r)$. Si prova che la funzione area totale:

$$(r^2 + R^2(r))\pi$$

è convessa.

Dunque è massima agli estremi dell'intervallo.

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

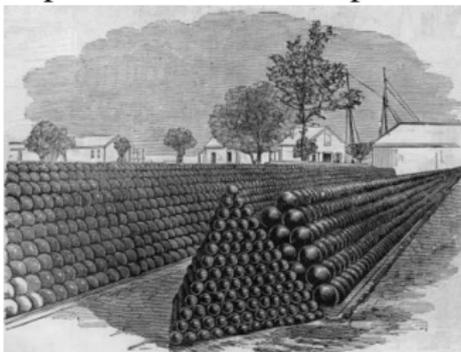
Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere



Impacchiamo le sfere

Nel 1611 nel lavoro *Il fiocco di neve a sei angoli* Keplero formula una congettura su quale sia il modo migliore (maggiore densità) per impaccare sfere nello spazio.



Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere



Impacchiamo le sfere

Nel 1831 Gauss dimostra che l'impaccamenti esagonale e cubico sono i migliori sotto l'ipotesi che la griglia sia regolare
(densità di impaccamento $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \sim 0,74048\dots$)

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

**Impacchiamo le
sfere**



Impacchiamo le sfere

Nel 1831 Gauss dimostra che l'impaccamenti esagonale e cubico sono i migliori sotto l'ipotesi che la griglia sia regolare
(densità di impaccamento $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \sim 0,74048\dots$)

È parte del **XVIII problema di Hilbert**.

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

**Impacchiamo le
sfere**



Impacchiamo le sfere

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Nel 1831 Gauss dimostra che l'impaccamenti esagonale e cubico sono i migliori sotto l'ipotesi che la griglia sia regolare (densità di impaccamento $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \sim 0,74048\dots$)

È parte del [XVIII problema di Hilbert](#).

Dimostrata da Thomas Hales in un progetto durato parecchi anni (1992-1998) con l'ausilio del computer. La rivista *Annals of Math* accettò il lavoro nel 2003 *con una certezza del 99 per cento*.



Impacchiamo le sfere

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere

Nel 1831 Gauss dimostra che l'impaccamenti esagonale e cubico sono i migliori sotto l'ipotesi che la griglia sia regolare (densità di impaccamento $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \sim 0,74048\dots$)

È parte del [XVIII problema di Hilbert](#).

Dimostrata da Thomas Hales in un progetto durato parecchi anni (1992-1998) con l'ausilio del computer. La rivista *Annals of Math* accettò il lavoro nel 2003 *con una certezza del 99 per cento*.

Una prova formale ma *assistita dal computer* è stata ottenuta e pubblicata nel 2014 da Hales e altri: un passo verso l'uso dell'Intelligenza Artificiale per automatizzare la formalizzazione dei processi matematici.



Impacchiamo le ipersfere

Nel 2016 Maryna S. Vjazovska (1984), matematica ucraina, ha risolto il problema dell'impacchettamento di sfere in dimensione 8 e 24.



Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circolarità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

**Impacchiamo le
sfere**



Impacchiamo le ipersfere

Nel 2016 Maryna S. Vjazovska (1984), matematica ucraina, ha risolto il problema dell'impacchettamento di sfere in dimensione 8 e 24.



La dimostrazione di Vjazovska è considerata dai matematici del settore "incredibilmente semplice".

Nel 2022 Vjazovska ha vinto la medaglia Fields.

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circularità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere



Impacchiamo le ipersfere

Nel 2016 Maryna S. Vjazovska (1984), matematica ucraina, ha risolto il problema dell'impacchettamento di sfere in dimensione 8 e 24.



La dimostrazione di Vjazovska è considerata dai matematici del settore "incredibilmente semplice".

Nel 2022 Vjazovska ha vinto la medaglia Fields.

In alcune dimensioni il record è attualmente detenuto da impacchettamenti non regolari.

Intelligenza
Matematica
applicata a
questioni di
circularità,
il problema di
Malfatti

Marco Andreatta

Massimizzare o
Minimizzare

Malfatti

Il Problema

Una nuova
soluzione

La Soluzione

Soluzioni Greedy

Due Cerchi

Impacchiamo le
sfere