# Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2019/2020
3 Settembre 2020 - Terzo Appello

*Il tempo per la prova è di 2 ore.*

**Esercizio 1.** Sia $\mathbb{R}^4$ lo spazio vettoriale con base canonica $\mathcal{E} = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_4}\}$. Si consideri la forma bilineare simmetrica $b_k : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ al variare del parametro reale $k$, tale che

$$\begin{cases} b_k(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_i}) = 1 \quad \text{per ogni } 1 \leq i \leq 4, \\ b_k(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}) = 1, \\ \langle \boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3} \rangle \subset \boldsymbol{e_4}^{\perp}, \\ \boldsymbol{e_3} \perp (\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}). \end{cases}$$

(i) Si scriva la matrice $A_k$ associata a $b_k$ e se ne calcoli la segnatura al variare di $k \in \mathbb{R}$. *(Suggerimento: il parametro $k$ dipende dall'ultima condizione.)*

(ii) Sia $k = 6$. Trovare una matrice ortogonale $M$ tale che ${}^tMA_6M$ sia una matrice diagonale.

(iii) Si consideri il sottospazio vettoriale $W = \{\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$ e sia $k = 0$. Dopo aver verificato che la restrizione $g = b_{0_{|W}} : W \times W \to \mathbb{R}$ rappresenta un prodotto scalare su $W$, si calcoli l'angolo formato tra i vettori

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rispetto al prodotto scalare $g$.

**Soluzione dell'Esercizio 1.** (i) Dato che $\boldsymbol{e_3}$ è ortogonale a $\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2}$, allora

$$b_k(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_1}) = b_k(\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_2}) = k,$$

inoltre $b_k(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_4}) = 0$ per ogni $1 \leq i \leq 3$. Quindi la matrice $A_k$ è

$$\boxed{A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ k & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Per calcolare la segnatura di questa matrice procediamo al calcolo degli autovalori: il polinomio caratteristico di $A_k$ è dato da

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & k & 0 \\ 1 & 1-\lambda & k & 0 \\ k & k & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & k \\ 1 & 1-\lambda & k \\ k & k & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$\begin{aligned}
&= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(1+\lambda^2-2\lambda-k^2)-(-1-\lambda-k^2)+k(k-k+k\lambda)\right] = \\
&= (1-\lambda)(1+\lambda^2-2\lambda-k^2-\lambda-\lambda^3+2\lambda^2+k^2\lambda-1+\lambda+k^2+k^2\lambda) = \\
&= (1-\lambda)(-\lambda^3+3\lambda^2-2\lambda+2k^2\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2-2k^2).
\end{aligned}$$

Le cui radici sono gli autovalori

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0, \\
\lambda_2 &= 1, \\
\lambda_3 &= \frac{3+\sqrt{1+8k^2}}{2}, \\
\lambda_4 &= \frac{3-\sqrt{1+8k^2}}{2}.
\end{aligned}$$

Chiaramente $\lambda_2$ e $\lambda_3$ sono sempre positivi, mentre $\lambda_1$ è sempre nullo per ogni valore di $k$. Resta da studiare il segno di $\lambda_4$, che è chiaramente dato dal numeratore:

$$\sqrt{1+8k^2} < 3 \rightsquigarrow 1+8k^2 < 9 \rightsquigarrow 8k^2-8 < 0 \rightsquigarrow -1 < k < 1.$$

Quindi la segnatura di $b_k$ è data da:

$$\boxed{\text{Segnatura}(b_k) = \begin{cases} (3,0) & \text{se } -1 < k < 1, \\ (2,1) & \text{se } k < -1 \vee k > 1, \\ (2,0) & \text{se } k = \pm 1. \end{cases}}$$

(ii) Dal punto precedente, sostituendo $k = 6$, troviamo che gli autovalori relativi alla matrice $A_6$ sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 10$ e $\lambda_4 = -7$. Troviamo quindi gli autovettori relativi ai corrispondenti autovalori:

- $\underline{\lambda_1 = 0}$:
  L'autovettore $\boldsymbol{w_1}$ sarà una soluzione non nulla del sistema

$$\begin{cases} x+y+6z=0 \\ x+y+6z=0 \\ 6x+6y+z=0 \\ w=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x=-y-6z \\ -6y-36z+6y+z=0 \\ w=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x=-y \\ z=0 \\ w=0. \end{cases}$$

Quindi l'autovettore normalizzato relativo a questo autovalore è

$$\boldsymbol{w_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $\underline{\lambda_2 = 1}$:
  Il nucleo di $A_6 - I$ è formato dai vettori soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y + 6z = 0 \\ x + 6z = 0 \\ 6x + 6y = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

  Quindi l'autovettore relativo è

$$\boldsymbol{w_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\underline{\lambda_3 = 10}$:
  Per trovare un autovettore, calcoliamo le soluzioni di $(A_6 - 10I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$:

$$\begin{cases} -9x + y + 6z = 0 \\ x - 9y + 6z = 0 \\ 6x + 6y - 9z = 0 \\ -9w = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = 9y - 6z \\ -81y + 54z + y + 6z = 0 \\ 18y - 12z + 2y - 3z = 0 \\ w = 0 \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x = 9y - 6z \\ 4y = 3z \\ w = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = y \\ 4y = 3z \\ w = 0. \end{cases}$$

  Quindi l'autovettore normalizzato è

$$\boldsymbol{w_3} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{34}} \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \\ \frac{4}{\sqrt{34}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- $\underline{\lambda_3 = 10}$:

L'ultimo autovettore è dato da una soluzione non nulla del seguente sistema:

$$\begin{cases} 8x+y+6z=0 \\ x+8y+6z=0 \\ 6x+6y+8z=0 \\ 8w=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x=-8y-6z \\ -64y-48z+y+6z=0 \\ -24y-18z+3y+4z=0 \\ w=0 \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} x=-8y-6z \\ 3y=-2z \\ w=0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x=-y \\ 3y=-2z \\ w=0. \end{cases}$$

Dunque l'ultimo autovettore normalizzato è

$$\boldsymbol{w_4} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{17}} \\ \frac{2}{\sqrt{17}} \\ -\frac{3}{\sqrt{17}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $M$ ortogonale diagonalizzante ha quindi per colonne gli autovettori trovati, cioè

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{2}{\sqrt{17}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{2}{\sqrt{17}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{34}} & -\frac{3}{\sqrt{17}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

(iii) Nel punto (i) dell'esercizio, abbiamo già constatato che se $k=0$, allora la segnatura di $A_0$ è $(3,0)$. Restringendoci quindi ad uno spazio di dimensione 3 è possibile ottenere un prodotto scalare. Notiamo che l'autospazio nullo è generato dal vettore $\boldsymbol{w_1}$, che però non appartiene al sottospazio vettoriale $W$, quindi la restrizione $g$ rappresenta un prodotto scalare su $W$. In particolare possiamo scrivere la matrice $B$ che rappresenta tale prodotto scalare: sappiamo che

$$b_0(\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2}) = b_0(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_1}) + b_0(\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_2}) + 2b_0(\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2}) = 1+1+2=4,$$

mentre

$$b_0(\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}) = b_0(\boldsymbol{e_1}+\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_4}) = 0.$$

Quindi

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che rappresenta chiaramente un prodotto scalare. In particolare per due generici vettori di $W$

$$\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

il prodotto scalare $g$ ha la forma

$$g(\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}) = 4ax + by + cz.$$

Scriviamo adesso le coordinate dei due vettori $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ di $\mathbb{R}^4$ rispetto la base di $W$:

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare l'angolo $\theta$ formato tra essi usiamo la formula

$$\cos\theta = \frac{g(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2})}{\sqrt{g(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1})}\sqrt{g(\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_2})}}.$$

Calcoliamo quindi questi valori:

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) &= 4 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 6 \\ g(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_1}) &= 4 \cdot 1^2 + 0^2 + 2^2 = 8 \\ g(\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_2}) &= 4 \cdot 1^2 + 2^2 + 1^2 = 9. \end{aligned}$$

Quindi otteniamo che

$$\cos\theta = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightsquigarrow \boxed{\theta = 45^\circ.}$$

**Esercizio 2.** Sia $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ il piano proiettivo complesso di coordinate $[x_0, x_1, x_2]$ e sia $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ il piano affine complesso di coordinate $(x, y)$. Si consideri inoltre la funzione di proiettivizzazione

$$\begin{aligned} j_0 : \mathbb{A}^2 &\to \mathbb{P}^2 \setminus \{x_0 = 0\} \\ (x, y) &\mapsto [1, x, y] \end{aligned}$$

e si consideri la curva $\mathcal{C}$ su $\mathbb{A}^2$ definita dal polinomio

$$\mathcal{C} : f(x, y) = 5y^5 - x^4 - 2y^3 + 2x^2 - 1 = 0.$$

Sia inoltre $\overline{\mathcal{C}} = j_0(\mathcal{C})$ la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$.

(i) Si verifichi che $\overline{\mathcal{C}}$ ammette due punti singolari $P_1$ e $P_2$ ed un unico punto improprio $Q$.

(ii) Si stabilisca la natura di $P_1$ e $P_2$, calcolando $m_{P_1}(\overline{\mathcal{C}})$ e $m_{P_2}(\overline{\mathcal{C}})$, le loro tangenti principali e la molteplicità di intersezione tra tali rette e la curva $\overline{\mathcal{C}}$ nei punti $P_1$ e $P_2$.

(iii) Si consideri la retta $r$ passante per $P_1$ e $P_2$, si calcoli $I(\overline{\mathcal{C}}, r; P_1)$ e $I(\overline{\mathcal{C}}, r; P_2)$ e si determini se esistono altre intersezioni tra la curva $\overline{\mathcal{C}}$ e $r$.

(iv) Si determini il numero di punti affini della curva $\mathcal{C}$ che hanno tangente orizzontale.

**Soluzione dell'Esercizio 2.** (i) La curva $\overline{\mathcal{C}}$ è definita dal polinomio

$$F(x_0,x_1,x_2) = 5x_2^5 - x_0x_1^4 - 2x_0^2x_2^3 + 2x_0^3x_1^2 - x_0^5 = 0.$$

Il gradiente è dato da

$$\nabla F(x_0,x_1,x_2) = \left(-x_1^4 - 4x_0x_2^3 + 6x_0^2x_1^2 - 5x_0^4, -4x_0x_1^3 + 4x_0^3x_1, 25x_2^4 - 6x_0^2x_2^2\right)$$

quindi per trovare i punti singolari è necessario risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1^4 - 4x_0x_2^3 + 6x_0^2x_1^2 - 5x_0^4 = 0 \\ 4x_0x_1(x_0^2 - x_1^2) = 0 \\ x_2^2(25x_2^2 - 6x_0^2) = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ha soluzioni $x_0 = 0$, $x_1 = 0$, $x_0 = x_1$ e $x_0 = -x_1$. Analizziamo questi casi separatamente:

- $\underline{x_0 = 0}$:
  In questo caso il sistema ha come unica soluzione quella banale, che non corrisponde a nessun punto nello spazio proiettivo, quindi non abbiamo soluzioni.
- $\underline{x_1 = 0}$:
  Il sistema diventa
  $$\begin{cases} x_0(5x_0^3 + 4x_2^3) = 0 \\ x_2^2(25x_2^2 - 6x_0^2) = 0 \end{cases}$$
  Se $x_2 = 0$ oppure se $x_0 = 0$, allora non esistono soluzioni non nulle. Le altre soluzioni delle seconda equazione sono date da $x_2 = \pm\frac{\sqrt{6}}{5}x_0$, che sostituite nella prima danno nuovamente la soluzione nulla.
- $\underline{x_0 = \pm x_1}$:
  In questo caso il sistema diventa
  $$\begin{cases} x_0x_2^3 = 0 \\ x_2^2(25x_2^2 - 6x_0^2) = 0 \end{cases}$$
  ed ha come soluzione non nulla $x_2 = 0$, quindi i due punti proiettivi singolari sono dati da $\boxed{P_1 = [1,1,0] \text{ e } P_2 = [1,-1,0].}$

Per trovare il punto improprio è sufficiente notare che

$$F([0,x_1,x_2]) = 5x_2^5 = 0,$$

che fornisce come unica soluzione il punto $Q$ di coordinate $\boxed{Q = [0,1,0].}$

(ii) Per trovare la molteplicità della curva nei punti $P_1$ e $P_2$, consideriamo la curva affine $\mathcal{C}$ e la disomogeneizzazione dei punti $j_0^{-1}(P_1) = (1,0)$ e $j_0^{-1}(P_2) = (-1,0)$. Calcoliamo quindi le affinità che portano i punti $P_1$ e $P_2$ nell'origine che sono date rispettivamente da

$$\begin{cases} x' = x \mp 1 \\ y' = y \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = x \pm 1 \\ y = y'. \end{cases}$$

Allora applicando queste trasformazioni al polinomio $f$, esso diventa

$$\begin{aligned} f(x' \pm 1, y') &= 5(y')^5 - (x' \pm 1)^4 - 2(y')^3 + 2(x' \pm 1)^2 - 1 = \\ &= 5(y')^5 - [(x')^4 \pm 4(x')^3 + 6(x')^2 \pm 4x' + 1] + \\ &- 2(y')^3 + 2(x')^2 \pm 4x' + 2 - 1 = \\ &= 5(y')^5 - (x')^4 \mp 4(x')^3 - 2(y')^3 - 4(x')^2 = 0 \end{aligned}$$

Quindi entrambi i punti $P_1$ e $P_2$ hanno molteplicità

$$\boxed{m_{P_1}(\overline{\mathcal{C}}) = m_{P_2}(\overline{\mathcal{C}}) = 2}$$

con tangenti principali rispettivamente

$$\boxed{\begin{aligned} t_1 : x' = 0 \rightsquigarrow x = 1 \rightsquigarrow x_1 - x_0 = 0 \\ t_2 : x' = 0 \rightsquigarrow x = -1 \rightsquigarrow x_1 + x_0 = 0. \end{aligned}}$$

Infine per calcolare le molteplicità di intersezione, una parametrizzazione di $t_1$ nel piano affine è data da $(1,t)$, mentre $(-1,t)$ è una parametrizzazione per $t_2$. Quindi il polinomio calcolato nelle parametrizzazioni è

$$f(1,t) = f(-1,t) = t^3(5t^2 - 2) = 0,$$

quindi $t = 0$ è una soluzione con molteplicità algebrica 3, dunque

$$\boxed{I(\overline{\mathcal{C}}, t_1; P_1) = 3 \qquad \text{e} \qquad I(\overline{\mathcal{C}}, t_2; P_2) = 3.}$$

(iii) La retta $r$ ha equazione $y = 0$, che corrisponde alla parametrizzazione $(t,0)$, quindi il polinomio $f(t,0) = -t^4 + 2t^2 - 1 = -(t^2-1)^2 = -(t-1)^2(t+1)^2 = 0$. Quindi sia $t = 1$, che $t = -1$ hanno molteplicità 2 e dunque

$$\boxed{I(\overline{\mathcal{C}}, r; P_1) = 2 \qquad \text{e} \qquad I(\overline{\mathcal{C}}, r; P_2) = 2.}$$

Per il Teorema di Bezout, esiste quindi un altro punto che interseca la curva $\overline{\mathcal{C}}$ e la retta $r$. Per trovare tale punto consideriamo $x_2 = 0$ e controlliamo come diventa il polinomio $F$,

$$F(x_0, x_1, 0) = -x_0(x_1^4 - 2x_0^2x_1^2 + x_0^4) = -x_0(x_0 - x_1)^2(x_0 + x_1)^2 = 0,$$

dunque il terzo punto di intersezione è il punto $\boxed{Q = [0,1,0]}$.

(iv) Il gradiente del polinomio $f$ è dato da

$$\nabla f(x,y) = (-4x^3 + 4x, 25y^4 - 6y^2)$$

dunque una generica tangente $t$ nel punto $(a,b)$ è del tipo

$$t : (-4a^3 + 4a)(x-a) + (25b^4 - 6b^2)(y-b) = 0.$$

Questa retta è orizzontale se il coefficiente delle $x$ è nullo, dunque

$$4a(a^2-1) = 4a(a-1)(a+1) = 0 \rightsquigarrow a = 0, a = 1, a = -1.$$

Il numero dei punti che hanno tangente orizzontale è quindi dato dal numero di valori possibili per $a$ e $b$.

- Se $a = 0$, allora i possibili valori di $b$ sono dati dalle soluzioni di $5b^5 - 2b^3 - 1 = 0$, la cui derivata è $25b^4 - 6b^2 = b^2(25b^2 - 6)$, che non ha radici in comune con il polinomio di partenza. Quindi abbiamo 5 punti che soddisfano l'equazione che hanno tangente orizzontale.
- Se $a = \pm 1$, allora i valori di $b$ sono le soluzioni di $5b^5 - 2b^3 = b^3(5b^2 - 2) = 0$. Questa dà origine a 3 soluzioni per $a = 1$ e 3 soluzioni per $a = -1$. Tuttavia occorre ricordare che i punti $(1,0)$ e $(-1,0)$ sono punti singolari e non hanno quindi la tangente data dalla formula usata precedentemente, ma abbiamo già calcolato che hanno una tangente verticale. Quindi per questi casi abbiamo 4 punti a tangente orizzontale.

Ricapitolando abbiamo quindi $\boxed{\text{9 punti a tangente orizzontale.}}$