Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di Laurea in Matematica
A.A. 2016/2017

17 Gennaio 2017 – Prova intermedia

Esercizio 1. Si consideri l'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ k \in \mathbb{R}$, definita da

$$f_k(1,0,0) = (2k+1,0,1), \quad f_k(0,1,0) = (6,-1,0), \quad f_k(0,0,1) = (k,-3k-2,k-4).$$

(i) Determinare il nucleo dell'applicazione lineare per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(ii) Determinare per ogni k, l'insieme $f_k^{-1}\big((-3k,1,k)\big)$.

(iii) Determinare gli autospazi dell'operatore f_2 e stabilire se l'operatore è diagonalizzabile.

Esercizio 2. Siano dati nello spazio affine reale $\mathbb{R}^4$ i punti

$$A = (1,-1,0,1),\ B = (0,1,-1,0),\ C = (1,0,-1,0), D = (1,2,0,1) \text{ e } E = (-1,1,2,-1).$$

(i) Determinare la posizione relativa della retta r passante per A e parallela al vettore BC e della retta s passante per C e D e le equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine che le contiene.

(ii) Determinare l'equazione cartesiana del piano passante per D e parallelo al piano affine ABC.

(iii) Determinare l'equazione dell'iperpiano affine H passante per E e parallelo all'iperpiano contenente i punti A, B, C, D.

Soluzione 1. L'applicazione lineare f_k è descritta dalla matrice

$$M_k = \begin{pmatrix} 2k+1 & 6 & k \\ 0 & -1 & -3k-2 \\ 1 & 0 & k-4 \end{pmatrix}.$$

Per risolvere il punto *(i)*, è necessario calcolare le soluzioni del sistema omogeneo descritto da M_k, mentre per risolvere il punto *(ii)*, è necessario risolvere il sistema descritto da $(M_k|v)$. Riduciamo quindi per righe la matrice $(M_k|v)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2k+1 & 6 & k & -3k \\ 0 & -1 & -3k-2 & 1 \\ 1 & 0 & k-4 & k \end{array}\right) \; R_1 \leftrightarrow R_3 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k-4 & k \\ 0 & -1 & -3k-2 & 1 \\ 2k+1 & 6 & k & -3k \end{array}\right)$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - (2k+1)R_1 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k-4 & k \\ 0 & -1 & -3k-2 & 1 \\ 0 & 6 & -2k^2+8k+4 & -2k^2-4k \end{array}\right)$$

$$R_3 \leftarrow R_3 + 6R_2 \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k-4 & k \\ 0 & -1 & -3k-2 & 1 \\ 0 & 0 & -2k^2-10k-8 & -2k^2-4k+6 \end{array}\right)$$

Otteniamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k-4 & k \\ 0 & 1 & 3k+2 & -1 \\ 0 & 0 & (k+1)(k+4) & (k-1)(k+3) \end{array}\right) \tag{1}$$

Per $k \neq -1, -4$, l'applicazione lineare è iniettiva, cioè $N(f_k) = \{(0,0,0)\}$, mentre per $k = -1$ e $k = -4$ il nucleo ha dimensione 1. Per la precisione:

$$N(f_{-1}) = \langle (5,1,1) \rangle \qquad \text{e} \qquad N(f_{-4}) = \langle (8,10,1) \rangle.$$

Questo implica che nel caso $k \neq -1, -4$, l'immagine di f_k coincide con $\mathbb{R}^3$ e la controimmagine di $(-3k, 1, k)$ consiste di un singolo vettore:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & k-4 & k \\ 0 & 1 & 3k+2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(k-1)(k+3)}{(k+1)(k+4)} \end{array}\right) \; \begin{array}{c} R_1 \leftarrow R_1 - (k-4)R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 - (3k+2)R_3 \end{array} \; \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{7k^2+15k-12}{(k+1)(k+4)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-3k^3-9k+2}{(k+1)(k+4)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(k-1)(k+3)}{(k+1)(k+4)} \end{array}\right)$$

Quindi

$$k \neq -1, -4 \qquad f_k^{-1}\big((-3k,1,k)\big) = \left(\frac{7k^2+15k-12}{(k+1)(k+4)}, \frac{-3k^3-9k+2}{(k+1)(k+4)}, \frac{(k-1)(k+3)}{(k+1)(k+4)} \right)$$

Per $k = -1$ e $k = -4$, il sistema (1) non è compatibile e

$$f_{-1}^{-1}\big((3,1,-1)\big) = \emptyset \qquad\qquad f_{-4}^{-1}\big((12,1,-4)\big) = \emptyset.$$

(iii) Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice $M_2 - \lambda I_3$:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 6 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & -8 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+4)(\lambda-3)^2.$$

L'autovalore $\lambda = -4$ ha molteplicità algebrica e geometrica uguale a 1 e l'autospazio è formato dalle soluzioni del sistema omogeneo descritto dalla matrice $M_2 + 4I$

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice ha rango 2 e otteniamo $V_{-4} = \langle(-6, 8, 3)\rangle$. Il secondo autovalore $\lambda = 3$ ha molteplicità algebrica 2. Per determinare la molteplicità geometrica, calcoliamo le soluzioni del sistema omogeneo descritto dalla matrice $M_2 - 3I$

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & -8 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3 \\ R_2 \leftarrow -\frac{1}{4}R_2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 12 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Il rango della matrice è 2 e $V_3 = \langle(5, -2, 1)\rangle$. La molteplicità geometrica $m_g(3) = 1$ è minore della molteplicità algebrica $m_a(3) = 2$, quindi f_2 non è diagonalizzabile.

Soluzione 2. *(i)* Le equazioni parametriche della retta r sono

$$r : A + t\overline{BC} = \begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = -1 - t \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

da cui si deducono le equazion cartesiane $x_1 + x_2 = x_3 = x_4 - 1 = 0$. La retta s ha equazioni parametriche

$$s : C + t\overline{CD} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2t \\ x_3 = -1 + t \\ x_4 = t \end{cases}$$

ed equazioni cartesiane $x_1 - 1 = x_2 - 2x_4 = x_3 - x_4 + 1 = 0$. Le due rette sono sghembe perché non sono parallele (non hanno la stessa giacitura) e non hanno punti in comune:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 - 1 = 0 \\ x_1 - 1 = 0 \\ x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 + 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_2 = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Il più piccolo sottospazio affine che contiene r ed s ha quindi dimensione 3 e può essere descritto in forma parametrica come $A + t\overline{BC} + s\overline{CD} + u\overline{AC}$ da cui si deduce che l'equazione cartesiana che lo definisce è

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - x_1(A) & x_2 - x_2(A) & x_3 - x_3(A) & x_4 - x_4(A) \\ x_1(C) - x_1(B) & x_2(C) - x_2(B) & x_3(C) - x_3(B) & x_4(C) - x_4(B) \\ x_1(D) - x_1(C) & x_2(D) - x_2(C) & x_3(D) - x_3(C) & x_4(D) - x_4(C) \\ x_1(C) - x_1(A) & x_2(C) - x_2(A) & x_3(C) - x_3(A) & x_4(C) - x_4(A) \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} x_1 - 1 & x_2 + 1 & x_3 & x_4 - 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -3(x_3 - x_4 + 1) = 0.$$

(ii) La giacitura del piano è

$$\langle \overline{AB}, \overline{AC} \rangle = \big\langle (-1,2,-1,-1),(0,1,-1,-1) \big\rangle$$

e le equazioni cartesiane si ottengono imponendo che il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_1(D) & x_2 - x_2(D) & x_3 - x_3(D) & x_4 - x_4(D) \\ x_1(B) - x_1(A) & x_2(B) - x_2(A) & x_3(B) - x_3(A) & x_4(B) - x_4(A) \\ x_1(C) - x_1(A) & x_2(C) - x_2(A) & x_3(C) - x_3(A) & x_4(C) - x_4(A) \end{pmatrix}$$

sia 2. Riducendo la matrice,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ x_1 - 1 & x_2 - 2 & x_3 & x_4 - 1 \end{pmatrix} \quad R_3 \leftarrow R_3 + (x_1 - 1)R_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2x_1 + x_2 - 4 & -x_1 + x_3 + 1 & -x_1 + x_4 \end{pmatrix} \quad R_3 \leftarrow R_3 - (2x_1 + x_2 - 4)R_2$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & x_1 + x_2 + x_3 - 3 & x_1 + x_2 + x_4 - 4 \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 - 4 = 0 \end{cases} .$$

(iii) L'equazione dell'iperpiano è data dal determinante

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - x_1(E) & x_2 - x_2(E) & x_3 - x_3(E) & x_4 - x_4(E) \\ x_1(B) - x_1(A) & x_2(B) - x_2(A) & x_3(B) - x_3(A) & x_4(B) - x_4(A) \\ x_1(C) - x_1(A) & x_2(C) - x_2(A) & x_3(C) - x_3(A) & x_4(C) - x_4(A) \\ x_1(D) - x_1(A) & x_2(D) - x_2(A) & x_3(D) - x_3(A) & x_4(D) - x_4(A) \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} x_1 + 1 & x_2 - 1 & x_3 - 2 & x_4 + 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -3(x_3 - x_4 - 3) = 0.$$