Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2021/2022

Gennaio

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^3$ lo spazio euclideo tridimensionale di origine O rispetto al prodotto scalare standard, dotato della base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$. Si considerino le rette

$$r_k : \begin{cases} x = (-2k+1) + t \\ y = (k+1)t \\ z = -1 + (k-1)t \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$.

(1) Studiare la posizione reciproca di r_k e s.

(2) Trovare i valori di k per cui le rette r_k e s formano un angolo $\theta_k = \arccos 1$.

(3) Fissato $k = 0$, calcolare la distanza $d(r_0, s)$ e trovare le equazioni della retta perpendicolare a r_0 e s.

Esercizio 2. Sia $C \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ la quartica di equazione

$$f(x, y) = \left(x^2 - 1\right)^2 - y^2\,(2y + 3) = 0.$$

(1) Trovare i punti singolari di C, la loro molteplicità e le tangenti principali.

(2) Studiare gli asintoti di C.

(3) Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dotato di coordinate omogenee $[x : y : z]$ tale che $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ coincida con la carta affine data da $U_z = \{z \neq 0\}$. Siano $A = [1, 0, 1]$, $B = [-1, 0, 1]$, $C = [0, -1, 1]$ e $D = [0, 1, 0]$. Calcolare l'equazione del fascio di coniche passanti per A, B, C, D e le componenti irriducibili delle tre coniche degeneri del fascio.

Soluzione 1. (1) Siano $v_{r_k} = (1, k+1, k-1)$ e $v_s = (1,2,1)$ i vettori direzione delle rette r_k e s. Cominciamo a vedere per quali $k \in \mathbb{R}$ si ha che r_k è parallela a s: dobbiamo imporre

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & k+1 & k-1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} 2-(k+1)=0 \\ 1-(k-1)=0 \\ k+1-2(k-1)=0 \end{cases}.$$

La prima equazione è risolta per $k=1$ mentre la seconda equazione è risolta per $k=2$, quindi il sistema non ha soluzione. Segue che r_k e s non possono mai essere parallele, rimane da capire quando sono incidenti e quando sono sghembe. Avremo che r_k e s sono incidenti quando ci sono soluzioni al sistema

$$\begin{cases} (-2k+1)+t=t \\ (k+1)t=1+2t \\ -1+(k-1)t=2+t \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} k=1/2 \\ (k-1)t=1 \\ (k-2)t=3 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} k=1/2 \\ t=-2 \end{cases}.$$

Otteniamo che per $k=1/2$ abbiamo rette incidenti nel punto $P=(-2,-3,0)$. Per $k \neq 1/2$ avremo invece rette sghembe.

(2) L'angolo tra le due rette è l'angolo formato dai vettori direzione di quest'ultime, dunque avremo

$$\cos\theta_k = \frac{(v_{r_k}, v_s)}{\|v_{r_k}\| \cdot \|v_s\|} = \frac{3k+2}{\sqrt{2k^2+3}\sqrt{6}}.$$

Allora l'equazione che ci serve è

$$1 = \frac{3k+2}{\sqrt{12k^2+18}} \quad \rightsquigarrow \quad 12k^2+18 = 9k^2+12k+4 \quad \rightsquigarrow \quad 3k^2-12k+14=0.$$

Un semplice conto mostra che il discriminante dell'equazione di secondo grado ottenuta è negativo, dunque l'equazione non ha soluzioni reali. In definitiva, non esistono valori di k che soddisfano le richieste.

(3) Per $k=0$ otteniamo $v_0 = v_{r_0} = (1,1,-1)$ e la retta

$$r_0 : \begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = -1-t \end{cases}.$$

La direzione della retta cercata dovrà essere ortogonale sia a v_0 che a v_s. A questo punto non rimane che prendere punti generici $P_0 = (1+t, t, -1-t) \in r_0$, $Q = (t', 1+2t', 2+t') \in s$ e imporre che $P_0 - Q$ sia ortogonale sia a v_0 che a v_s:

$$\begin{cases} (P_0-Q, v_0)=0 \\ (P_0-Q, v_s)=0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} 3t-2t'+3=0 \\ 2t-6t'-4=0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} t=-13/7 \\ t'=-9/7 \end{cases}.$$

Ne segue che $P_0 - Q = (3/7, -2/7, 1/7)$. Possiamo concludere che

$$d(r_0, s) = d(P_0, Q) = d(P_0 - Q, O) = \sqrt{\frac{2}{7}},$$

mentre

$$\begin{cases} x = -6/7 + 3t/7 \\ y = -13/7 - 2t/7 \\ z = 6/7 + t/7 \end{cases}$$

sono le equazioni della retta passante per P_0 con direzione $P_0 - Q$. $\square$

Soluzione 2. (1) I punti singolari della curva C sono i punti che risolvono il sistema di equazioni dato da f e dalle sue derivate parziali $f_x := \partial f/\partial x$ e $f_y := \partial f/\partial y$, dunque

$$(\star) \qquad \begin{cases} \left(x^2-1\right)^2 - y^2\left(2y+3\right) = 0 \\ f_x(x,y) = 4x\left(x^2-1\right) = 0 \\ f_y(x,y) = -6y(y+1) = 0 \end{cases} .$$

Si ottengono facilmente dalle ultime due equazioni di $(\star)$ i seguenti candidati punti singolari:

$$P_1 = (0,0), \quad P_2 = (0,-1), \quad P_3 = (1,0), \quad P_4 = (-1,0), \quad P_5 = (1,-1), \quad P_6 = (-1,-1).$$

Notiamo che $P_1, P_5, P_6 \notin C$, dunque gli unici punti singolari della curva sono P_2, P_3, P_4.

Cominciamo a studiare la singolarità in P_2. Spostiamoci nell'origine con la traslazione

$$\tau_2 : \begin{cases} x \mapsto x \\ y \mapsto y+1 \end{cases} ,$$

la quale ci dà la nuova equazione

$$\begin{aligned} f\left(\tau_2^{-1}(x,y)\right) &= \left(x^2-1\right)^2 - (y-1)^2\left(2(y-1)+3\right) = \\ &= x^4 - 2x^2 + 1 - \left(y^2 - 2y + 1\right)(2y+1) = \\ &= x^4 - 2y^3 - 2x^2 + 3y^2 = 0 \end{aligned}$$

il cui termine omogeneo di grado minimo è $-2x^2 + 3y^2$. Segue allora che $m_{P_2}(C) = 2$ e che le tangenti principali sono date dalla fattorizzazione di questo termine omogeneo di grado minimo:

$$L_1 = \left\{y\sqrt{3} + x\sqrt{2} = 0\right\}, \quad L_2 = \left\{y\sqrt{3} - x\sqrt{2} = 0\right\}.$$

Ripetiamo i conti per $P_{3/4} = (\pm 1, 0)$: la traslazione questa volta sarà

$$\tau_{3/4} : \begin{cases} x \mapsto x \mp 1 \\ y \mapsto y \end{cases}$$

e la nuova equazione sarà data da

$$f\left(\tau_{3/4}^{-1}(x,y)\right) = \left((x \pm 1)^2 - 1\right)^2 - 2y^3 - 3y^2 = x^4 \pm 4x^3 - 2y^3 + 4x^2 - 3y^2 = 0.$$

à Il termine omogeneo di grado minimo in ogni caso è $4x^2 - 3y^2$, da cui segue che $m_{P_3}(C) = m_{P_4}(C) = 2$ e le tangenti principali sono sempre

$$L_3 = \left\{2x + y\sqrt{3} = 0\right\}, \quad L_4 = \left\{2x - y\sqrt{3} = 0\right\}.$$

(2) Per definizione gli asintoti di C sono le tangenti principali nei punti impropri della curva. Immergiamoci nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee $[x, y, z]$ in modo che $\mathbb{A}^2(\mathbb{R}) = U_z = \{z \neq 0\}$. Allora la chiusura proiettiva della curva C è data dalla curva proiettiva $\overline{C}$ di equazione

$$F(x, y, z) = \left(x^2 - z^2\right)^2 - y^2(2yz + 3z^2) = 0.$$

I punti impropri si ottengono intersecando $\overline{C}$ con la retta di equazione $z = 0$, quindi sono le soluzioni dell'equazione

$$x^4 = 0.$$

Segue che esiste un unico punto improprio, dato da $P = [0, 1, 0]$. Studiamo le tangenti principali di $\overline{C}$ in P: ci mettiamo nella carta affine $U_y = \{y \neq 0\}$ (e per comodità possiamo supporre $y = 1$), dove la traccia affine di $\overline{C}$ è data dall'equazione

$$F(x, 1, z) = \left(x^2 - z^2\right)^2 - 2z - 3z^2 = 0$$

Chiaramente il termine omogeneo di grado minimo è dato da $-2z$, per cui P è un punto semplice e la sua tangente è data dalla retta $L = \{z = 0\}$. Per concludere, dobbiamo tornare nella carta U_z dove vive la curva C, ma $L = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus U_z$, dunque non esistono asintoti per C.

(3) Con le notazioni dei punti precedenti abbiamo

$$A = [P_3], \quad B = [P_4], \quad C = [P_2], \quad D = [P].$$

Una conica nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è descritta da un'equazione del tipo

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0$$

con $[a, b, c, d, e, f] \in \mathbb{P}^5(\mathbb{R})$. Se imponiamo il passaggio per i quattro punti in questione, otterremo quattro equazioni lineari nei coefficienti:

$$(\star\star) \qquad \begin{cases} a + c + e = 0 \\ a + c - e = 0 \\ b + c - f = 0 \\ b = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} b = 0 \\ f = c \\ e = 0 \\ a = -c \end{cases}.$$

Usando le relazioni date da $(\star\star)$, otteniamo il fascio di coniche

$$-cx^2 + cz^2 + dxy + cyz = 0$$

con $[c, d] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Per trovare le coniche degeneri, andiamo a calcolare quando il determinante della matrice associata alla conica si annulla:

$$\det \begin{pmatrix} -2c & d & 0 \\ d & 0 & c \\ 0 & c & 2c \end{pmatrix} = 2c^3 - 2cd^2 = 2c(c^2 - d^2) = 0.$$

Se $c = 0$, otteniamo $xy = 0$ e quindi la conica degenere è data dall'unione delle rette

$$\{x = 0\}, \quad \{y = 0\}.$$

D'altra parte, se $c = \pm d$, otterremo l'equazione

$$-x^2 + z^2 \pm xy + yz = \left(\frac{1}{2}y + z\right)^2 - \left(x \mp \frac{1}{2}y\right)^2 = 0,$$

quindi ancora unione di due rette. Esplicitamente, se $c = d$, le rette sono

$$\{x + z = 0\}, \quad \{-x + y + z = 0\},$$

mentre se $c = -d$ avremo

$$\{x + y + z = 0\}, \quad \{-x + z = 0\}. \qquad \square$$