Geometria A

Università degli Studi di Trento

Corso di laurea in Matematica

A.A. 2022/2023

Gennaio

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^2$ lo spazio euclideo dotato di coordinate x, y. Si consideri il fascio di coniche al variare di $k \in \mathbb{R}$:

$$C_k : x^2 + \frac{2k}{3}xy + y^2 + kx + \frac{2k}{3}y + k = 0$$

(1) Classificare le coniche C_k del fascio al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.

(2) Sia $C := C_6$ la conica del fascio corrispondente al valore $k = 6$. Scrivere l'isometria $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ che manda C_6 nella sua forma canonica.

(3) Determinare l'angolo che formano gli asintoti di C_6.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ il piano affine euclideo di coordinate (x, y) e si consideri la curva

$$C_{a,b} : x^3 - 2ay^2 + bxy^2 = 0$$

dove $a, b \in \mathbb{C}$.

(1) Trovare i valori di $a, b \in \mathbb{C}$ per i quali la retta all'infinito è tangente alla chiusura proiettiva $\overline{C}_{a,b} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ di $C_{a,b}$. Studiare per i suddetti valori i casi in cui il punto di tangenza risulti singolare per $\overline{C}_{a,b}$.

(2) Trovare i valori di $a, b \in \mathbb{C}$ per i quali la curva $C_{a,b}$ passi per il punto $P = (1, 2)$ con tangente la retta di equazione $x - y + 1 = 0$.

(3) Mostrare che ogni punto della curva $C_{0,1}$ è un punto di flesso. Dedurre infine che $C_{0,1}$ è un'unione di 3 rette passanti per l'origine.

Soluzione 1. Come prima cosa scriviamo la matrice completa associata alla conica C_k del fascio e la matrice 2×2 corrispondente alla parte quadratica di C_k.

$$A(k) = \begin{pmatrix} k & k/2 & k/3 \\ k/2 & 1 & k/3 \\ k/3 & k/3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_0(k) = \begin{pmatrix} 1 & k/3 \\ k/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le coniche degeneri si ottengono dall'annullarsi del determinante di $A(k)$:

$$\det A(k) = k - \frac{13}{36}k^2 = k(1 - \frac{13}{36}k).$$

Otteniamo che le due coniche degeneri del fascio si ottengono per $k = 0$ e $k = 36/13$ e sono rispettivamente:

$$C_0 = x^2 + y^2 = 0$$

e

$$C_{\frac{36}{13}} = x^2 + \frac{24}{13}xy + y^2 + \frac{36}{13}x + \frac{24}{13}y + \frac{36}{13} = 0$$

Si nota subito che C_0 è un punto, corrispondente all'origine $(0,0)$. Per $C_{\frac{36}{13}}$ studiamo il rango della matrice completa

$$rango(A(k)) = rango \begin{pmatrix} \frac{36}{13} & \frac{18}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{18}{13} & 1 & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{12}{13} & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Poichè $det(A_o(\frac{36}{13})) > 0$ si ha che $C_{\frac{36}{13}}$ è una conica formata da due rette complesse coniugate incidenti. Supponiamo $k \neq 0, \frac{36}{13}$ e studiamo il segno del determinante di $A_0(k)$:

$$\det A_o(k) = \frac{(3+k)(3-k)}{9}.$$

Se $k = -3$ o $k = 3$ otteniamo due parabole non degeneri.

- Se $k < -3$ oppure $k > 3$, allora $\det A_o(k) < 0$ e otteniamo delle iperboli.
- Se $-3 < k < 3$, $\det A_0(k) > 0$ e si tratta di ellissi. Rimane da capire se siano a punti reali o non reali. Si ha che

  $$\operatorname{tr} A_o(k) \det A(k) = 2k(1 - \frac{13}{36}k) < 0$$

  e quindi si hanno ellissi a punti reali se $-3 < k < 0$ oppure se $\frac{36}{13} < k < 3$. Le ellissi sono a punti immaginari invece nel caso in cui $0 < k < \frac{36}{13}$.

Dal punto precedente sappiamo che C_6 è un'iperbole. Esplicitandola abbiamo:

$$C_6 : x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 4y + 6 = 0.$$

(1)**Rotazione:** Vogliamo diagonalizzare la matrice

$$A_o(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di $A_o(6)$ sono dati da $\lambda = 3$ e $\lambda = -1$. Gli autovettori associati $v = (v_1, v_2)^t$ sono dati dalle soluzioni di

$$(A_0(6) - 3I)v = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v_1 - v_2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v = v_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$(A_0(6) + I)v = 0 \quad \rightsquigarrow \quad -v_1 - v_2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad v = v_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sia M la matrice 2×2 le cui colonne sono date dagli autovettori normalizzati di $A_0(-2)$:

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e imponiamo la condizione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x = (x' - y')/\sqrt{2} \\ y = (x' + y')/\sqrt{2} \end{cases}.$$

Sostituendo nell'equazione di C_6 si ottiene

$$C_6' : 3x'^2 - y'^2 + 5\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' + 6 = 0.$$

Raccogliendo i quadrati possiamo riscrivere C_6' come

Traslazione:

$$3(x' - \frac{5}{6}\sqrt{2})^2 - (y' + \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + \frac{19}{6} = 0.$$

A questo punto non rimane che definire la traslazione

$$\begin{cases} x' = x'' + \frac{5}{6}\sqrt{2} \\ y' = y'' - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

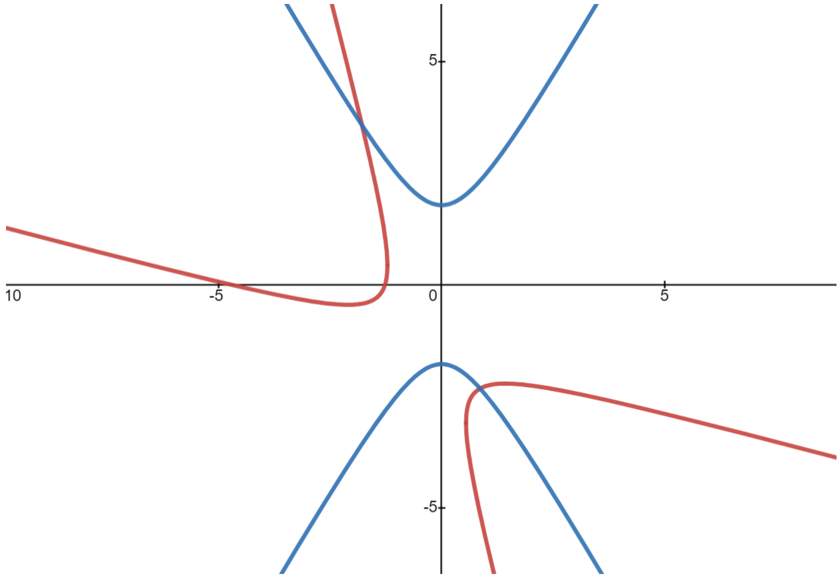
per ottenere la forma canonica

$$3x''^2 - y''^2 = -\frac{19}{6} \rightsquigarrow \frac{x''^2}{\frac{19}{18}} - \frac{y''^2}{\frac{19}{6}} = -1.$$

L'isometria $f : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ è la rototraslazione che manda le coordinate x, y nelle coordinate x'', y'':

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M \left(\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +\frac{5}{6}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right) = M \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Qui sotto il grafico dell'iperbole C_6 originaria in rosso e della sua forma canonica in blu.



(2) Un'iperbole della forma

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1$$

ha come asintoti le rette

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}x$$

Nel nostro caso abbiamo $a^2 = \frac{19}{18}$ e $b^2 = \frac{19}{6}$. Perciò i due asintoti hanno equazione

$$y = \sqrt{3}x \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{3}x$$

I due vettori direzione dei due asintoti saranno perciò

$$v = (1, \sqrt{3}) \quad \text{e} \quad w = (-1, \sqrt{3})$$

Da cui ricaviamo che il coseno dell'angolo θ cercato è

$$cos(\theta) = \frac{< v, w >}{|v||w|} = \frac{1}{2}$$

e quindi l'angolo é $\theta = 60$.

$\square$

Soluzione 2. (1) Vediamo il piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ come $U_0 = \{[x_0, x_1, x_2] | x_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ tramite la biiezione data da

$$j : U_0 \to \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$$
$$[x_0, x_1, x_2] \to (x = \frac{x_1}{x_0}, y = \frac{x_2}{x_0})$$

In questo modo la chiusura proiettiva $\overline{C}_{a,b}$ è data dall'equazione

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_1^3 - 2ax_0x_2^2 + bx_1x_2^2 = 0$$

La retta all'infinito L è perciò descritta dall'equazione

$$L : x_0 = 0$$

Un punto $Q = [0, x_1(Q), x_2(Q)]$ appartenente alla retta all'infinito appartiene alla curva $\overline{C}_{a,b}$ se e solo se $F(0, x_1(Q), x_2(Q)) = 0$. La retta R_Q tangente a $\overline{C}_{a,b}$ in Q è data dall'equazione

$$R_Q : \frac{\partial F}{\partial x_0}(Q)x_0 + \frac{\partial F}{\partial x_1}(Q)x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(Q)x_2 = 0$$

Affinchè la retta all'infinito L sia tangente in Q dobbiamo imporre che $R_Q = L$, ovvero

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(Q) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(Q) = 0$$

Dobbiamo perciò risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ F(x_0, x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_0, x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_0, x_1, x_2) = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1^3 - 2ax_0x_2^2 + bx_1x_2^2 = 0 \\ 3x_1^2 + bx_2^2 = 0 \\ -4ax_0x_2 + 2bx_1x_2 = 0 \end{cases}$$

Dalla quarta equazione, sostituendo $x_0 = 0$, otteniamo la condizione $\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2bx_1x_2 = 0$. Distinguiamo perciò 3 casi:

(a) $x_0 = x_1 = 0$, da cui sostituendo della terza equazione otteniamo $bx_2^2 = 0$ che sotto l'ipotesi $b \neq 0$ restituisce $x_2 = 0$. Perciò non abbiamo una soluzione accettabile.

(b) $x_0 = x_2 = 0$, da cui sostituendo nella seconda equazione otteniamo $x_1^3 = 0$ che restituisce $x_1 = 0$. Nemmeno in questo caso otteniamo una soluzione accettabile.

(c) $x_0 = 0$ e $b = 0$. Sostituendo nella seconda e terza equazione otteniamo due condizioni equivalenti pari a $x_1 = 0$. Poichè tutte le altre equazioni risultano automaticamente soddisfatte otteniamo il punto soluzione $Q = [0, 0, 1]$.

Perciò, riassumendo, la retta all'infinito L è tangente alla curva proiettiva $\overline{C}_{a,b}$ se e solo se $b = 0$. Affinchè il punto di tangenza Q sia anche un punto singolare per la curva dobbiamo imporre che

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(Q) = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial x_1}(Q) = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial x_2}(Q) = 0$$

Le ultime due condizioni sono già implicite dall'aver imposto precedentemente che L fosse la retta tangente in Q. L'unica condizione che dobbiamo imporre è perciò

$$\frac{\partial F}{\partial x_0}(Q) = [-2ax_2^2](0, 0, 1) = -2a = 0$$

da cui deduciamo che $a = 0$.

(2) La curva $C_{a,b}$ passa per il punto $P = (1, 2)$ se il polinomio $x^3 - 2ay^2 + bxy^2$ si annulla in P. Imponendo quindi $f(1, 2) = 0$ otteniamo la condizione $1 - 8a + 4b = 0$. La direzione della retta tangente a $C_{a,b}$ in P è definita dalla coppia $(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2), \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2))$. Poichè la retta $x - y + 1 = 0$ passa per $P = (1, 2)$ basta imporre la proporzionalità delle direzioni per avere l'uguaglianza. Abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + by^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4ay + 2bxy$$

Valutando le due derivate parziali in $P = (1, 2)$ otteniamo il vettore $(3 + 4b, -8a + 4b)$.

Imponendo quindi la proporzionalità delle direzioni otteniamo

$$det \begin{pmatrix} 3+4b & 1 \\ -8a+4b & -1 \end{pmatrix} = 0$$

che restituisce la condizione $3 - 8a + 8b = 0$. Mettendo a sistema le due condizioni otteniamo infine

$$\begin{cases} 1 - 8a + 4b = 0 \\ 3 - 8a + 8b = 0 \end{cases} \rightsquigarrow a = -\frac{1}{8} \quad \text{e} \quad b = -\frac{1}{2}$$

(3) La curva $C_{0,1}$ è descritta dall'equazione

$$C_{0,1} : x^3 + xy^2 = 0$$

Per trovare i flessi dobbiamo intersecare $C_{0,1}$ con l'Hessiana $H_f := H_{C_{0,1}}$

$$det(H_f) = det \begin{pmatrix} 6x & 2y & 0 \\ 2y & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Questo mostra che ogni punto di $C_{0,1}$ è un punto di flesso. Notiamo che l'equazione di $C_{0,1}$ si può scrivere come

$$C_{0,1} : x(x - iy)(x + iy) = 0$$

Questo mostra che $C_{0,1}$ è l'unione delle tre rette definite da

$$x = 0 \quad \text{e} \quad x - iy = 0 \quad \text{e} \quad x + iy = 0$$

$\square$