Esame scritto di Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2016/2017

Appello di gennaio 2018

Esercizio 1
Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, si considerino i sottospazi affini

$$U = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} h^2x + y + (2-h^2)z + h^2w = 2 \\ x - z = 0 \end{cases} \right\},$$

$$V = \left\{ (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} 2x + y - (h+1)z + w = -1 \\ (2-h)x + 2y + z = 1 \end{cases} \right\},$$

con h parametro reale.

(i) Determinare per ogni $h \in \mathbb{R}$ la dimensione degli spazi affini U e V.

(ii) Determinare per ogni $h \in \mathbb{R}$, equazioni parametriche dello spazio affine $U \cap V$.

(iii) Determinare per ogni $h \in \mathbb{R}$, la dimensione del più piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ contenente sia U che V.

Esercizio 2
Sia $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$g(x,y,z,w) = (x - y + 4z - 2w, y - 2z, y - z, x + y + z - 2w).$$

(i) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine di g

(ii) Calcolare gli autovalori e gli autovettori di g e stabilire se l'endomorfismo g è diagonalizzabile.

(iii) Scrivere la matrice $M_{\mathscr{B}}(g)$ che rappresenta g rispetto alla base $\mathscr{B} = \big\{(2,0,0,-1),(1,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,0)\big\}$.

Esercizio 3

Sia $k \in \mathbb{R}$. Siano dati nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$, il punto P, la retta r ed il piano π_k definiti da:

$$P = (1, 9, -3) \qquad r : \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 6z = -9 \end{cases} \qquad \pi_k : kx + 3y - z = 2k.$$

(i) Calcolare la distanza di P da r. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si ha che $P \in \pi_k$? Si ponga $k = -2$ e si ricavi una qualsiasi retta s che sia contenuta in π_{-2}, che passi per $Q = (2, 0, 0)$ e tale che r e s siano sghembe.

(ii) Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si ha che r e π_k sono ortogonali? Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ si ha che r e π_k sono paralleli? Si calcoli in questo ultimo caso la distanza tra r e π_k.

(iii) Si consideri, in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ (munito di coordinate affini (x, y) e origine O),la curva algebrica di equazione $f(x, y) = 0$ dove f è tale che $f(x - 1, y - 3) = x^2 - y^3 + x^4 - x^3y + y^6 + x^6 - 2x^3y^3$. Si ricavino i punti all'infinito della curva e il tipo di singolarità del punto $(1, 3)$.

Esercizio 4

Sia $\mathbb{K}$ un campo e si consideri lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$ su $\mathbb{K}$ munito di un sistema di coordinate omogenee $\underline{x} = [x, y, z, w]$. Si consideri, al variare di $a \in \mathbb{K}$ la forma quadratica

$$q(x, y, z, w) = (a + 1)x^2 + 2xy + 2axz - y^2 - 4yw + az^2 - w^2$$

e la quadrica $Q : q(x, y, z, w) = 0$. Si indichino con $\underline{x}_1 = [x_1, y_1, z_1, w_1]$ delle nuove coordinate su $\mathbb{P}^3$ in modo che valga

$$[x_1, y_1, z_1, w_1] = [x, y, z - y, w - 2y].$$

(i) Supponendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, scrivere le matrici rappresentative della quadrica rispetto alle coordinate $\underline{x}$ e $\underline{x}_1$. Ricavare, al variare di a, il rango della quadrica specificando quando è degenere;

(ii) Supponendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si scriva la forma canonica di Q e una proiettività che riduce Q in forma canonica (*Hint: iniziare sommando e sottraendo all'espressione polinomiale di Q il termine* $4y^2$);

(iii) Supponendo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si dica per quali valori di a si ha che Q è proiettivamente equivalente alla quadrica

$$Q' : q'(x, y, z, w) = (a - i)x^2 - 123123123y^2 + \frac{\pi}{6}z^2 - 2018(a^2 + 1)w^2 = 0.$$

Esame scritto di Geometria II

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2014/2015

Appello di gennaio 2018

Esercizio 5

Sia $\mathbb{K}$ un campo e si consideri lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$ su $\mathbb{K}$ munito di un sistema di coordinate omogenee $\underline{x} = [x, y, z, w]$. Si consideri, al variare di $a \in \mathbb{K}$ la forma quadratica

$$q(x, y, z, w) = (a + 1)x^2 + 2xy + 2axz - y^2 - 4yw + az^2 - w^2$$

e la quadrica $Q : q(x, y, z, w) = 0$. Si indichino con $\underline{x}_1 = [x_1, y_1, z_1, w_1]$ delle nuove coordinate su $\mathbb{P}^3$ in modo che valga

$$[x_1, y_1, z_1, w_1] = [x, y, z - y, w - 2y].$$

(i) Supponendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, scrivere le matrici rappresentative della quadrica rispetto alle coordinate $\underline{x}$ e $\underline{x}_1$. Ricavare, al variare di a, il rango della quadrica specificando quando è degenere;

(ii) Supponendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si scriva la forma canonica di Q e una proiettività che riduce Q in forma canonica (*Hint: iniziare sommando e sottraendo all'espressione polinomiale di Q il termine* $4y^2$);

(iii) Supponendo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si dica per quali valori di a si ha che Q è proiettivamente equivalente alla quadrica

$$Q' : q'(x, y, z, w) = (a - i)x^2 - 123123123y^2 + \frac{\pi}{6}z^2 - 2018(a^2 + 1)w^2 = 0.$$

Esercizio 6

Si consideri $X := [-1, 1]$ e

$$\tau := \{X, \emptyset\} \cup \{A \subseteq X \,:\, 0 \notin A\} \cup \{A \subseteq X \,:\, (-1, 1) \subseteq A\}.$$

- Dimostrare che (X, τ) è uno spazio topologico la cui topologia non è confrontabile con la topologia euclidea su $[-1, 1]$.
- Dimostrare che (X, τ) è T_0. (X, τ) è T_1 o T_2?
- Determinare l'interno degli insiemi $\{0\}, \{1\}, (1/3, 2/3)$ e $[-1/2, 1/2)$ e la chiusura degli insiemi $\{0\}, \{1/2\}$ e $\{1\}$.
- Dire se $\{1\}$ è una componente connessa di X e se (X, τ) è connesso.

Soluzione dell'esercizio 1

(i) Per determinare la dimensione dei due spazi affini, calcoliamo la dimensione della loro giacitura. Osservando le matrici dei sistemi omogenei associati, ci accorgiamo immediatamente che il rango è due in entrambi i casi (ci sono due minori di ordine 2 non nulli)

$$\left(\boxed{\begin{array}{cc} h^2 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}} \begin{array}{cc} 2-h^2 & h^2 \\ -1 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 2-h & 2 \end{array} \boxed{\begin{array}{cc} -h-1 & 1 \\ 1 & 0 \end{array}}\right)$$

quindi la dimensione dei due spazi affini è $4-2=2$.

(ii) Risolviamo il sistema dato dall'unione delle equazioni dei due spazi affini:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ h^2 & 1 & 2-h^2 & h^2 & 2 \\ 2 & 1 & -h-1 & 1 & -1 \\ 2-h & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 \leftarrow R_2 - h^2 R_1 \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - (2-h)R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & h^2 & 2 \\ 0 & 1 & -h+1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3-h & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & h^2 & 2 \\ 0 & 0 & -h-1 & 1-h^2 & -3 \\ 0 & 0 & -h-1 & -2h^2 & -3 \end{array}\right)$$

$$R_4 \leftarrow R_4 - R_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & h^2 & 2 \\ 0 & 0 & -h-1 & 1-h^2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -h^2-1 & 0 \end{array}\right)$$

Dal momento che $-1-h^2 \neq 0$, $\forall\, h$, il sistema è risolubile con un'unica soluzione per ogni $h \neq -1$ e le coordinate del punto di intersezione sono

$$R_4 \leftarrow \frac{1}{-h^2-1} R_4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & h^2 & 2 \\ 0 & 0 & -h-1 & 1-h^2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 \leftarrow R_2 - h^2 R_4 \\ R_3 \leftarrow R_3 - (1-h^2) R_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -h-1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) R_3 \leftarrow \frac{1}{-h-1} R_3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{h+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 \leftarrow R_1 + R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 - 2R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{h+1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2h-4}{h+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{h+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{3}{h+1} \\ y = \frac{2h-4}{h+1} \\ z = \frac{3}{h+1} \\ w = 0 \end{cases}.$$

Per $h=-1$, il sistema risulta essere non risolubile perchè la terza riga della matrice corrisponde all'equazione $0=-3$. Inoltre la matrice dei coefficienti ha rango 3 (e non 2), quindi le giaciture dei due piani non coincidono. Quindi i due piani hanno intersezione vuota e non sono paralleli, cioè sono sghembi.

(iii) Il più piccolo spazio affine contenente sia U che V è sempre l'intero spazio. Per $h \neq -1$, infatti lo spazio vettoriale ottenuto come somma delle due giaciture ha dimensione 4 (l'intersezione è vuota, per il teorema di Grassmann...). Per $h=-1$, invece la somma delle giaciture ha dimensione 3 (l'intersezione ha dimensione 1) a cui va aggiunto un qualsiasi vettore congiungente un punto di U con un punto di V (che non appartiene alle giaciture ed è quindi linearmente indipendente rispetto ai vettori di una base della somma delle giaciture).

Soluzione dell'esercizio 2

(i) La matrice che descrive l'endomorfismo è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare il nucleo riduciamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 2R_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 - 4R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 + 2R_3 \\ \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 + R_2 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi, il nucleo ha dimensione 1 ed è generato da $(2, 0, 0, 1)$. L'immagine ha dimensione 3 ed è generata dai vettori descritti dalle prime 3 colonne della matrice (prima e quarta colonna sono linearmente dipendenti).

(ii) Il polinomio caratteristico della matrice è

$$\det(A - \lambda \mathbf{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = t(t+1)(t^2+1).$$

L'endomorfismo ha solo 2 autovalori reali, quindi non è diagonalizzabile. L'autospazio associato all'autovalore 0 è il nucleo, per determinare l'autospazio associato a -1 riduciamo la matrice $A + \mathbf{Id}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ R_4 \leftarrow R_4 - R_1 \end{matrix}$$

Sappiamo che il rango della matrice è 3, quindi possiamo tralasciare la prima riga e considerare il sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 - R_2 \\ \\ R_3 \leftarrow \frac{1}{2}R_3 - R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 \leftarrow R_1 + R_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ottenendo come base del secondo autospazio il vettore $(1, 0, 0, 1)$.

(iii) Per calcolare la matrice $M_{\mathscr{B}}(g)$, calcoliamo la decomposizione rispetto a $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

dei vettori immagine dei vettori della base. Calcoliamo $g(v_i)$ per ogni $v_i \in \mathscr{B}$:

$$g(v_1) = Av_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4v_2$$

$$g(v_2) = Av_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_2$$

$$g(v_3) = Av_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 v_1 + \beta_1 v_2 + v_3 + v_4$$

$$g(v_4) = Av_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_2 v_1 + \beta_2 v_2 - 2v_3 - v_4.$$

Per trovare α_1, β_1 imponiamo che, considerando solo la prima e l'ultima coordinata dei vettori,

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + \beta_1 = -1 \\ -\alpha_1 + \beta_1 = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $\alpha_1 = -\frac{2}{3}$ e $\beta_1 = \frac{1}{3}$, quindi $g(v_3) = -\frac{2}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2 + v_3 + v_4$. Analogamente per trovare α_2, β_2,

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + \beta_2 = 4 \\ -\alpha_2 + \beta_2 = 1 \end{cases}$$

che fornisce come soluzioni $\alpha_2 = 1$ e $\beta_2 = 2$, quindi $g(v_4) = v_1 + 2v_2 - 2v_3 - v_4$. La matrice $M_{\mathscr{B}}(g)$ risulta quindi essere

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 4 & -1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione dell'esercizio 3 *(i)* Per calcolare la distanza dal punto P dalla retta r, ricaviamo le equazioni parametriche della retta r, usando la variabile z come parametro:

$$\begin{cases} x = -4 + 3t \\ y = 5 - 3t \\ z = t. \end{cases}$$

Da queste equazioni è facile ricavare il vettore direzione di r, che è $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. A questo punto calcoliamo γ, il piano perpendicolare alla retta r e passante per P: la giacitura del piano γ ha equazione cartesiana $3x - 3y + z = 0$, quindi γ ha equazione $3x - 3y + z + d = 0$ per $d \in \mathbb{R}$ opportuno. Per trovare il valore esatto di d, imponiamo il passaggio per il punto P:

$$3 - 27 - 3 + d = 0 \implies d = 27.$$

Il piano γ ha equazione $3x - 3y + z + 27 = 0$. Adesso, possiamo trovare il punto di intersezione tra il piano γ e la retta r, per esempio inserendo le equazioni parametriche della retta all'interno di quella cartesiana del piano:

$$\begin{aligned} 3(-4+3t) - 3(5-3t) + t + 27 &= 0 \\ -12 + 9t - 15 + 9t + t + 27 &= 0 \\ 19t &= 0 \\ t &= 0. \end{aligned}$$

Allora il punto $A(-4, 5, 0)$ è l'intersezione tra γ e r. Per trovare la distanza tra il punto P e la retta r, basterà calcolare la distanza tra A e P, in quanto A è la proiezione ortogonale sulla retta r del punto P. Quindi

$$\overline{AP} = \sqrt{(1+4)^2 + (9-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+16+9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Per calcolare i valori di k per cui $P \in \pi_k$, imponiamo semplicemente il passaggio per il punto P nell'equazione del piano π_k:

$$\begin{aligned} k + 27 + 3 &= 2k \\ k &= 30. \end{aligned}$$

Il punto P appartiene al piano se e solo se $k = 30$.

Il piano π_{-2} ha equazione $\pi_{-2} : -2x + 3y - z + 4 = 0$. Per ricavare una retta che soddisfi le richieste, scriviamo le generiche equazioni parametriche di una retta s passante per il punto Q:

$$\begin{cases} x = 2 + lt \\ y = mt \\ z = nt, \end{cases}$$

dove $l, m, n \in \mathbb{R}$. Dal momento che s deve essere contenuta nel piano π_{-2}, le sue equazioni parametriche devono soddisfare l'equazione di π_{-2}:

$$\begin{aligned} -2(2+lt) + 3mt - nt &= -4 \\ t(-2l + 3m - n) &= 0 \\ -2l + 3m - n &= 0 \end{aligned}$$

Quindi $n = 3m - 2l$. Per imporre la condizione di essere sghemba con la retta r, possiamo calcolare il determinante della matrice data dalla due direzione delle rette ed un vettore tra due punti di esse, per esempio $\overrightarrow{AQ}$ e supporre che esso sia diverso da 0, in questo modo le due rette risulteranno non complanari e cioè sghembe. Allora

$$\left| \begin{pmatrix} 6 & -5 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ l & m & 3m - 2l \end{pmatrix} \right| = 6(-9m + 6l - m) + 5(9m - 6l - l) = -15m + l \neq 0.$$

Quindi la retta s non è univocamente determinata, ma ad esempio può avere equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 3t. \end{cases}$$

(ii) Scriviamo le equazioni parametriche del piano π_k:

$$\pi_k : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = ku + 3v - 2k. \end{cases}$$

Da queste capiamo che la giacitura di π_k è $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$. Per trovare i piani perpendicolari alla retta r, basta imporre che entrambi i vettori che generano la giacitura di π_k siano perpendicolari al vettore direzione di r. Quindi calcoliamo:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 + k = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = -3 + 3 = 0.$$

Otteniamo quindi la condizione $k = -3$, allora π_{-3} è l'unico piano perpendicolare a r.
I valori di k per cui π_k e r sono paralleli i valori per cui il vettore direzione della retta appartiene alla giacitura del piano. Questo equivale a chiedere che il determinante della matrice data dai vettori generatori delle giaciture dei due spazi sia nullo:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1 + 9 - 3k = 10 - 3k = 0,$$

cioè $k = \frac{10}{3}$. In questo caso, inoltre, $A \notin \pi_{\frac{10}{3}}$ quindi r e $\pi_{\frac{10}{3}}$ sono paralleli e non uno contenuto nell'altro. Il piano $\pi_{\frac{10}{3}}$ ha equazione $10x + 9y - 3z = 20$; per calcolare la distanza tra esso e la retta r, basta considerare un punto appartenente alla retta, per esempio A, e considerare la formula della distanza punto-piano in $\mathbb{E}^3$:

$$d(\pi_{\frac{10}{3}}, A) = \frac{|10 \cdot (-4) + 9 \cdot 5 - 3 \cdot 0 - 20|}{\sqrt{100 + 81 + 9}} = \frac{15}{\sqrt{190}}.$$

(iii) Indichiamo con g il polinomio tale che $g(x, y) = f(x - 1, y - 3)$ e con $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ rispettivamente le curve descritte dall'annullarsi di f e di g. Per costruzione, la natura del punto $P = (1, 3)$ per $\mathcal{C}$ è la stessa della natura del punto $(0, 0)$ per $\mathcal{D}$ poichè le affinità non cambiano il tipo di punto singolare. Abbiamo quindi che

$$m_{\mathcal{D}}((0, 0)) = m_{\mathcal{C}}(P) = 2$$

e che esiste un'unica tangente principale in P per $\mathcal{C}$. Inoltre, Poichè

$$g(0, t) = -t^3 + t^6 = t^3(t^3 - 1)$$

avremo $I(\mathcal{D}, x = 0; (0, 0)) = 3$ quindi $(0, 0)$ è un punto di cuspide per $\mathcal{D}$, e lo stesso vale per il punto P per $\mathcal{C}$.

I punti all'infinito di $\mathcal{D}$ sono le soluzioni del sistema*

$$\begin{cases} x_0^6 g(x_2/x_0, x_1/x_0) = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2^6 + x_1^6 - 2x_1^3 x_2^3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x_1^3 - x_2^3)^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

*Stiamo usando le variabili proiettive $[x_0, x_1, x_2]$ con la convenzione $x = x_1/x_0$ e $y = x_2/x_0$.

cioè

$$S = \left\{ [0,1,1], \left[0,1,\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right] \right\}$$

Ricordiamo che $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ si ottengono l'una dall'altra utilizzando la traslazione $\tau : (x, y) \mapsto (x+1, y+3)$ (e la sua inversa). Le (estensioni delle) traslazioni non muovono i punti all'infinito quindi i punti all'infinito di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ coincidono. Possiamo fare anche il conto direttamente scrivendo l'estensione

$$\overline{\tau} : (x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_0, x_2 + 3x_0, x_0)$$

dalla quale si vede subito che i punti di S sono punti fissi per $\overline{\tau}$ (come tutti i punti di $r_\infty : x_0 = 0$).

Soluzione dell'esercizio 4

La matrice che rappresenta la quadrica nelle coordinate $\underline{x}$ è

$$A = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ a & 0 & a & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per ricavare la matrice rappresentativa nelle coordinate $\underline{x}_1$ abbiamo diversi modi. Ad esempio, possiamo ricavare la trasformazione inversa e andare a sostituire nell'equazione di $\mathcal{Q}$. Le relazioni che legano i due sistemi di coordinate sono

$$[x_1, y_1, z_1, w_1] = [x, y, z - y, w - 2y]$$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y \\ z_1 = z - y \\ w_1 = w - 2y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \\ z = z_1 + y_1 \\ w = w_1 + 2y_1 \end{cases}$$

quindi, andando a sostituire, si ha:

$$\begin{aligned} q(x, y, z, w) &= (a+1)x^2 + 2xy + 2axz - y^2 - 4yw + az^2 - w^2 = \\ &= (a+1)x_1^2 + 2x_1y_1 + 2ax_1(z_1 + y_1) - y_1^2 - 4y_1(w_1 + 2y_1) + a(z_1 + y_1)^2 - (w_1 + 2y_1)^2 = \\ &= (a+1)x_1^2 + (2a+2)x_1y_1 + 2ax_1z_1 + (a-13)y_1^2 + 2ay_1z_1 - 8y_1w_1 + az_1^2 - w_1^2 \quad (1) \end{aligned}$$

Nelle coordinate $\underline{x}_1$ la matrice rappresentativa è invece

$$A_1 = \begin{bmatrix} a+1 & a+1 & a & 0 \\ a+1 & a-13 & a & -4 \\ a & a & a & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di A è $-2a$ quindi $\mathcal{Q}$ ha rango 4 per $a \neq 0$. Se $a = 0$ la quadrica è degenere e abbiamo che

$$A|_{a=0} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ha rango 3.

Cerchiamo di ridurre la quadrica a forma canonica. Iniziamo sommando e sottraendo $4y^2$ all'espressione polinomiale della quadrica.

$$\begin{aligned} q(x, y, z, w) &= (a+1)x^2 + 2xy + 2axz - y^2 - 4yw + az^2 - w^2 + \underline{4y^2} - \underline{4y^2} = \\ &= (a+1)x^2 + 2xy + 2axz - y^2 + 4y^2 + az^2 - (w+2y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 2y^2 + a(x+z)^2 - (w+2y)^2 = \\ &= (x+y)^2 + 2y^2 + a(x+z)^2 - (w+2y)^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Se poniamo

$$\tau : \begin{cases} x_2 = x + y \\ y_2 = \sqrt{2}y \\ z_2 = w + 2y \\ w_2 = b(x+z) \end{cases} \qquad \text{con} \quad b = \begin{cases} \sqrt{a} & \text{se } a > 0 \\ \sqrt{-a} & \text{se } a < 0 \\ 1 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

abbiamo che la matrice che definisce le $\underline{x}_2 = [x_2, y_2, z_2, w_2]$ è invertibile, quindi $\underline{x}_2$ sono coordinate proiettive. Per costruzione abbiamo che τ riduce la quadrica alla sua forma canonica che è

$$\begin{cases} x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - w_2^2 = 0 & \text{se } a > 0 \\ x_2^2 + y_2^2 - z_2^2 - w_2^2 & \text{se } a < 0 \\ x_2^2 + y_2^2 - w_2^2 & \text{se } a = 0 \end{cases}$$

Si vede facilmente che la quadrica $\mathcal{Q}'$ è tale che

$$\mathrm{Rk}(\mathcal{Q}') = \begin{cases} 4 & \text{se } a \neq \pm i \\ 3 & \text{se } a = -i \\ 2 & \text{se } a = i \end{cases}.$$

Ricordandoci che $\mathrm{Rk}(\mathcal{Q}) = 4$ se $a \neq 0$ e $\mathrm{Rk}(\mathcal{Q}) = 3$ per $a = 0$ ci basta controllare per quali valori di a le due quadriche hanno lo stesso rango. Di conseguenza, esiste una proiettività che trasforma $\mathcal{Q}$ in $\mathcal{Q}'$ se e solo se $a \neq 0, \pm i$.

Soluzione dell'esercizio 5
Si veda la soluzione dell'esercizio 4.

Soluzione dell'esercizio 6
Siano A e B due elementi di τ diversi da X e dal vuoto. Se entrambi contengono 0 allora entrambi contengono l'intervallo $(-1,1)$ quindi $(-1,1) \subset A \cap B$ e l'intersezione apparterrà a τ. Se uno dei due non contiene 0 allora nemmeno l'intersezione lo contiene. Di conseguenza τ è chiuso per intersezioni finite. Sia ora $\{A_i\}_{i \in I}$ una collezione di elementi di τ. Se nessun elemento contiene 0 allora l'unione non lo conterrà e apparterrà a τ. Se invece esiste i per cui $0 \in A_i$ allora

$$(-1,1) \subset A_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i$$

che quindi appartiene a τ. Questo basta per mostrare che τ è una topologia. τ non è confrontabile con la topologia euclidea su $[-1,1]$ infatti $[-1,1)$ è un aperto di (X,τ) che non è aperto per la topologia euclidea e $(-1/2,1/2)$ è un aperto per la topologia euclidea che non è un elemento di τ.

Siccome appartengono a τ tutti i sottoinsiemi di X che non contengono 0, per ogni $x, y \neq 0$ abbiamo che $\{x\}$ e $\{y\}$ sono due aperti disgiunti che contengono rispettiamente x e y. Se $x \neq 0$ e se definiamo $U := (-1,1)$ e $V := \{x\}$ abbiamo che U e V sono due aperti che contengono rispettiamente 0 e x e tali che $0 \notin V$. Questo mostra che (X,τ) è T_0. Se $x \neq 0, \pm 1$ si vede anche che non è possibile scegliere U e V in modo che di abbia anche $0 \notin U$: questo mostra che (X,τ) non è T_1 (e quindi nemmeno T_2).

Siccome $\{1\}$ e $(1/3,2/3)$ non contengono 0, questi sono aperti e coincidono con il loro interno. $\{0\}$ non è aperto e, essendo un punto, non può che avere interno vuoto. L'insieme $[-1/2,1/2)$ non è aperto perchè contiene 0 ma non l'intervallo $(-1,1)$. Il sottoinsieme ottenuto rimuovendo 0 è un aperto e coincide con l'interno (per ragioni di massimalità): $[-1/2,1/2)^o = [-1/2,0) \cup (0,1/2)$.

Sia C un chiuso contenente 0 (e diverso da X). Allora C^c è un aperto che non contiene 0 e questi sono tutti i sottoinsiemi di X che non contengono 0. La famiglia dei chiusi che contengono 0 coincide quindi con

$$\{A \subseteq X \,:\, 0 \in A\}.$$

Se C è un chiuso che non contiene 0 allora il suo complementare è un aperto che contiene 0 e quindi, necessariamente, tutto l'intervallo $(-1,1)$. La famiglia dei chiusi che non contengono 0 è quindi

$$\{\emptyset, \{1\}, \{-1\}, \{-1,1\}\}.$$

In particolare abbiamo mostrato che $\{0\}$ e $\{1\}$ sono chiusi (e quindi coincidono con la loro chiusura) mentre $\{1/2\}$ non lo è. $\{1/2, 0\}$ è un chiuso e, per ragioni di minimalità, è la chiusura di $\{1/2\}$.

Per concludere basta osservare che, come già visto, $\{1\}$ è sia aperto che chiuso in X. Da questo concludiamo che è una componente connessa di X e che X non è connesso.