Esame scritto di Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2016/2017
Appello di febbraio 2018

Esercizio 1
Sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$f_k\big((x,y,z)\big) = (y + kz, (k+1)x + 2y, x + z).$$

(i) Determinare per ogni k, i vettori $v \in \mathbb{R}^3$ tali che $f_k(v) = (-1, 0, 3)$.

(ii) Determinare per quali valori di k l'endomorfismo f_k^2 è iniettivo.

(iii) Descrivere la matrice associata all'endomorfismo f_k^3 rispetto alla base canonica.

(iv) Determinare la dimensione dell'immagine di f_k^3.

Esercizio 2
Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f\big((1,0,0,0)\big) = (1,2,4,0), \qquad f\big((0,1,0,0)\big) = (2,4,8,0),$$
$$f\big((0,0,1,0)\big) = (1,2,4,0), \qquad f\big((0,0,0,1)\big) = (-2,4,0,-1).$$

(i) Calcolare una base del nucleo e una base dell'immagine di f.

(ii) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, il sottospazio W generato dai vettori $(3,-1,-1,0)$, $(0,1,-2,1-t)$ e $(3t,1,-5,0)$ è contenuto nel nucleo di f.

(iii) Calcolare autovalori di f e stabilire se f è diagonalizzabile.

Esercizio 3
Si consideri il piano euclideo $\mathbb{E}^4$ con coordinate (x, y, z, w) rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di $\mathbb{R}^4$. Si considerino l'iperpiano

$$\pi : x - 2y + 2w - 1 = 0,$$

il vettore $v = e_3$ e il punto $P = (1, 0, -1, 0)$.

(i) Si scriva una base ortonormale della giacitura di π che abbia come primo vettore v;

(ii) Sia r la retta passante per P con giacitura generata dal vettore $e_1 - 4e_2 + e_3$. Calcolare l'angolo convesso tra r e π;

(iii) Ricavare una retta s che passi per P, sia ortogonale a r e sia contenuta nel piano $\tau : x - z - 2 = y + 4 + 4z = 0$.

Esercizio 4
Sia $\mathbb{K}$ un campo e si consideri il piano affine $\mathbb{A}^2$ su $\mathbb{K}$ con coordinate affini (x, y) e il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ su $\mathbb{K}$ con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Si identifichi $\mathbb{A}^2$ con $\mathbb{P}^2 \setminus \{x_0 = 0\}$ con la scelta $x = x_1/x_0$ e $y = x_2/x_0$. Si consideri, in $\mathbb{A}^2$, la curva

$$\mathcal{C} : f(x, y) = x^2 + (1 - a)xy + (a - 2)x + y^2 + (a - 4)y + 1 - a = 0$$

dove $a \in \mathbb{K}$ è un parametro. Si indichi con $\overline{\mathcal{C}}$ la sua chiusura proiettiva.

(i) Si assuma $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si dica per quali valori di a la conica è degenere. Si classifichi la conica al variare di a da un punto di vista affine scrivendo, in ogni caso, la forma canonica;

(ii) Si ponga $a = 0$ e si assuma $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si scriva la forma canonica affine di $\mathcal{C}$ e un'affinità che la riduce a forma canonica. Si ricavi la tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $(1, 0)$;

(iii) Si ponga $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si classifichi $\overline{\mathcal{C}}$ al variare di $a \in \mathbb{C}$. Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ si ha che $\overline{\mathcal{C}}$ è ha come tangente principale $x_0 = 0$.

Esame scritto di Geometria II

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2014/2015
Appello di febbraio 2018

Esercizio 5
Si consideri il piano euclideo $\mathbb{E}^4$ con coordinate (x, y, z, w) rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di $\mathbb{R}^4$. Si considerino l'iperpiano

$$\pi : x - 2y + 2w - 1 = 0,$$

il vettore $v = e_3$ e il punto $P = (1, 0, -1, 0)$.

(i) Si scriva una base ortonormale della giacitura di π che abbia come primo vettore v;

(ii) Sia r la retta passante per P con giacitura generata dal vettore $e_1 - 4e_2 + e_3$. Calcolare l'angolo convesso tra r e π;

(iii) Ricavare una retta s che passi per P, sia ortogonale a r e sia contenuta nel piano $\tau : x - z - 2 = y + 4 + 4z = 0$.

Esercizio 6
Sia $I := [0, 1)$ e si consideri lo spazio topologico $X = (I, \tau)$ dove τ è la topologia generata dalla seguente collezione di sottoinsiemi di I:

$$\{(0, \delta) \mid \delta \in (0, 1]\}.$$

Si consideri il sottospazio $Y = (\{0\} \cup (1/2, 1), \tau_Y)$ con τ_Y topologia indotta da quella su X.

(i) Dimostrare che X è connesso e T_0.

(ii) X è T_1? X è compatto? X è connesso per archi? X è uno spazio di Hausdorff?

(iii) Calcolare la chiusura di $\{0\}$ e di $\{3/4\}$ in Y.

(iv) Esibire, se possibile, un arco continuo in Y che collega 0 a 3/4.

Soluzione dell'esercizio 1
(i) Risolviamo il sistema lineare $f_k(v) = (-1, 0, 3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & k & -1 \\ k+1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 \leftarrow R_3 \\ R_2 \leftarrow R_1 \\ R_3 \leftarrow R_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ k+1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_3 \leftarrow R_3 - (k+1)R_1 - 2R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 0 & 0 & -3k-1 & -3k-1 \end{array}\right)$$

Se $-3k - 1 \neq 0$, abbiamo

$$R_3 \leftarrow \frac{1}{-3k-1} R_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 \leftarrow R_1 - R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 - kR_3 \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1-k \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -k-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se $-3k - 1 = 0$, otteniamo

$$\begin{cases} v_1 = 3 - v_3 \\ v_2 = -1 + \frac{1}{3} v_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-t \\ -1 - \frac{1}{3}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Il determinante della matrice

$$M_{\mathscr{B}}(f_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ k+1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è $-3k - 1$, quindi il determinante $M_{\mathscr{B}}(f_k^2) = M_{\mathscr{B}}(f_k)^2$ è $(-3k-1)^2$ e il morfismo f_k^2 è iniettivo per ogni $k \neq \frac{1}{3}$

(iii) La matrice di f_k^3 rispetto alla base canonica è

$$M_{\mathscr{B}}(f_k^3) = M_{\mathscr{B}}(f_k)^3 = \begin{pmatrix} 2k+1 & 2 & k \\ 2k+2 & k+5 & k^2+k \\ 1 & 1 & k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & k \\ k+1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3k+2 & 2k+5 & 2k^2+2k \\ 2k^2+7k+5 & 4k+12 & 3k^2+3k \\ 2k+2 & 3 & 2k+1 \end{pmatrix}.$$

(iv) Il determinante di $M_{\mathscr{B}}(f_k^3)$ è $(-3k-1)^3$, quindi per $k \neq -\frac{1}{3}$ l'endomorfismo f_k^3 è iniettivo e suriettivo, cioè la dimensione dell'immagine è 3. Per $k = -\frac{1}{3}$, abbiamo

$$M_{\mathscr{B}}(f^3_{-\frac{1}{3}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/3 \\ 2/3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 13/3 & -4/9 \\ 26/9 & 32/3 & -2/3 \\ 4/3 & 3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

La dimensione è quindi 2 perchè il morfismo non è iniettivo (quindi non suriettivo) e ci sono 2 colonne linearmente indipendenti.

Soluzione dell'esercizio 2
(i) Dalla definizione di f osserviamo che

$$\begin{aligned} f\big((1,0,0,0)\big) = f\big((0,0,1,0)\big) \quad &\Longrightarrow \quad f\big((1,0,0,0)-(0,0,1,0)\big)=0,\\ 2f\big((1,0,0,0)\big) = f\big((0,1,0,0)\big) \quad &\Longrightarrow \quad f\big(2(1,0,0,0)-(0,1,0,0)\big)=0, \end{aligned}$$

quindi

$$\big\langle (1,0,-1,0),(2,-1,0,0)\big\rangle \subseteq N(f),$$

e

$$\big\langle (1,2,4,0),(-2,4,0,-1)\big\rangle \subseteq \mathrm{im}(f).$$

Per la proprietà $\dim\mathbb{R}^4 = \dim N(f) + \dim\mathrm{im}(f)$ devono valere le uguaglianze.

(ii) Determiniamo i valori di t per cui $W \subseteq N(f)$. Riduciamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ \hline 3 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1-t\\ 3t & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 - R_2\\ R_4 - 2R_1 + R_2\\ R_5 - 5R_1 + R_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-t\\ 3t-3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ottenendo che W è contenuto in $N(f)$ per $t=1$. L'uguaglianza discende dal fatto che $\dim W \geqslant 2$ per ogni t.

(iii) Calcoliamo il polinomio caratteristico di f:

$$\det\big(M_{\mathscr{B}}(f) - \lambda\mathbf{Id}_4\big) = \det\begin{pmatrix} 1-t & 2 & 1 & -2\\ 2 & 4-t & 2 & 4\\ 4 & 8 & 4-t & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1-t \end{pmatrix} = k^2(k-9)(k+1)$$

Gli autovalori sono quindi $\lambda = -1, 0, 9$. L'autospazio associato a $\lambda = 0$ è il nucleo quindi per $\lambda = 0$ la molteplicità algebrica coincide con quella geometrica e l'applicazione lineare f risulta essere diagonalizzabile.

Soluzione dell'esercizio 3 (i) Scriviamo innanzitutto le equazioni parametriche per l'iperpiano π:

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + 2u - 2t\\ y = u\\ z = v\\ w = t, \end{cases}$$

allora la giacitura di π è $\left\langle \begin{pmatrix} 2\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Usiamo quindi l'algoritmo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt su questi tre vettori partendo dal vettore $w_1 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}$, che è anche un versore. Procediamo quindi con gli altri vettori:

$$w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{1} w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{1} w_1 - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{5} w_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi, per trovare una base ortonormale, basta normalizzare i vettori trovati, dividendo ognuno per la propria norma. Otteniamo così la base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{5}}{3} \begin{pmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(ii) Troviamo innanzitutto le equazioni parametriche della retta r, dato che sappiamo che passa per il punto P e la sua direzione:

$$\begin{cases} x &= 1 + t \\ y &= -4t \\ z &= -1 + t \\ w &= 0. \end{cases}$$

Per calcolare l'angolo di incidenza con l'iperpiano π, consideriamo il vettore normale all'iperpiano e calcoliamo l'angolo di incidenza tra esso e la direzione w della retta r, in questo modo troveremo un angolo ψ che è supplementare rispetto all'angolo cercato θ, cioè $\theta + \psi = 90°$. Il vettore normale all'iperpiano, u, è dato dai coefficienti dell'equazione omogenea associata di π: $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Per calcolare l'angolo ψ, utilizziamo la formula $\cos\psi = \frac{\langle u, w \rangle}{\|u\|\|w\|}$, quindi

$$\cos\psi = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dunque $\psi = 45°$ e $\theta = 90° - 45° = 45°$.

(iii) Dato che la retta s è contenuta nel piano τ, sappiamo che la sua direzione è una combinazione lineare dei due vettori che generano la giacitura del piano, quindi, per prima cosa, riscriviamo le equazioni parametriche del piano τ:

$$\tau : \begin{cases} x = 2 + u \\ y = -4 - 4u \\ z = u \\ w = v. \end{cases}$$

Dunque la giacitura di τ è $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Quindi, imponendo il passaggio per il punto P della retta s, possiamo ricavare delle equazioni parametriche per essa al variare di $a, b \in \mathbb{R}$:

$$s: \begin{cases} x = 1 + at \\ y = -4at \\ z = -1 + at \\ w = bt. \end{cases}$$

L'ultima condizione che dobbiamo imporre è la perpendicolarità con la retta r, calcolando il prodotto scalare delle direzioni delle due rette ed uguagliandolo a 0:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ -4a \\ a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = a + 16a + a = 18a = 0,$$

allora $a = 0$. Quindi la retta s cercata ha equazioni:

$$s: \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = -1 \\ w = t. \end{cases}$$

Soluzione dell'esercizio 4

Partendo dall'equazione che definisce $\mathcal{C}$, scriviamo la matrice che rappresenta la conica nelle coordinate scelte. Avremo che essa è la matrice

$$A = \begin{bmatrix} (1-a) & (a-2)/2 & (a-4)/2 \\ (a-2)/2 & 1 & (1-a)/2 \\ (a-4)/2 & (1-a)/2 & 1 \end{bmatrix}$$

e che il suo determinante soddisfa

$$\det(A) = \frac{1}{4}(2a^2 - 3a - 9) = \frac{1}{4}(a-3)(2a+3).$$

Di conseguenza, la conica è degenere per $a = 3$ oppure $a = 3/2$ e non degenere per gli altri valori di a.

Se indichiamo con A_0 la matrice dei termini quadratici avremo

$$\det(A_0) = \frac{1}{4}(3 + 2a - a^2) = \frac{1}{4}(a-3)(a+1)$$

e $\mathrm{Tr}(A_0) = 2$. Supponiamo ora di avere $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si ha quindi

$$\begin{cases} \mathrm{Det}(A_0) < \iff a < -1 \text{ o } a > 3 \\ \mathrm{Det}(A_0) = 0 \iff a = -1 \text{ o } a = 3 \\ \mathrm{Det}(A_0) > \iff -1 < a < 3 \end{cases}$$

Con le informazioni che abbiamo possiamo classificarela conica in tutti i casi tranne $a = 3$ per cui siamo di fronte a una parabola degenere ma non sappiamo se è a punti reali o immaginari. Per distinguere i due casi, intersechiamo la conica con una retta che non è parallela a nessuna delle eventuali componenti della conica: ad esempio $x = 0$. Infatti, se fosse parallela a una componente avremo $f = \lambda(x - x_1)(x - x_2)$ per qualche $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e quindi y non comparirebbe nell'equazione di $\mathcal{C}$. Si ha

$$f(0, y)|_{a=3} = (y^2 + (a - 4)y - a + 1)|_{a=3} = y^2 - y - 2 = (y - 2)(y + 1)$$

quindi $(0, 2)$ e $(0, -1)$ sono due punti (a cooordinate reali!) che appartengono alla nostra conica. Possiamo concludere la classificazione della conica:

a	tipologia	forma canonica
$a < -1$ o $a > 3, a \neq -3/2$	iperbole non degenere	$X^2 - Y^2 = 1$
$a = -3/2$	iperbole degenere	$X^2 - Y^2 = 0$
$a = -1$	parabola non degenere	$Y - X^2 = 0$
$-1 < a < 3$	ellisse non degenere a punti reali	$X^2 + Y^2 = 1$
$a = 3$	parabola degenere a punti reali	$X^2 = 1$

Poniamo $a = 0$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. L'equazione di $\mathcal{C}$ diventa

$$f(x, y) = x^2 + xy - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$$

e sappiamo già che siamo di fronte a un'ellisse non degenere a punti reali. Ricaviamo il centro

$$\begin{cases} x + y/2 = 1 \\ x/2 + y = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

da cui si ottiene $C = (0, 2)$. Operiamo delle manipolazioni algebriche sul polinomio che definisce $\mathcal{C}$ per ridurre a forma canonica la conica. Iniziamo sfruttando l'informazione ricavatasul centro:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + xy - 2x + y^2 - 4y + 1 = x^2 + x(y - 2) + y^2 - 4y + 1 + 3 - 3 = \\ &= x^2 + x(y - 2) + (y - 2)^2 - 3 = x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2 - 3 = \frac{1}{3}(x_1^2 + x_1 y_1 + y_1^2) - 1 = \\ &= \frac{1}{3}\left(x_1^2 + 2x_1\frac{y_1}{2} + 4\left(\frac{y_1}{2}\right)^2\right) - 1 = \frac{1}{3}\left(x_1 + \frac{y_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{2}\right)^2 - 1 = x_2^2 + y_2^2 - 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Abbiamo posto

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y - 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x_1 - \frac{y_1}{2}\right) \\ y_2 = \frac{y_1}{2} \end{cases}$$

che sono entrembe affinità poichè il determinante della matrice definita dalla parte lineare della trasformazione è non zero in entrambi i casi (nel primo caso, inoltre, stiamo operando una traslazione!). Quindi

$$\tau : \begin{cases} x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{y}{2} + 1\right) \\ y_2 = \frac{y}{2} - 1 \end{cases}$$

è un'affinità che permette di scrivere l'equazione di $\mathcal{C}$ in forma canonica.

Il gradiente di $f = x^2 + xy - 2x + y^2 - 4y + 1$ è

$$\nabla(f) = (2x + y - 2, x + 2y - 4)$$

e si ha

$$\nabla(f)|_{(1,0)} = (2 - 2, 1 - 4) = (0, -3)$$

quindi la retta tangente alla curva in $(1, 0)$ è

$$r : y = 0.$$

Poniamo ora $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Omogeneizzando f si ha

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 + (1-a)x_1x_2 + (a-2)x_0x_1 + x_2^2 + (a-4)x_0x_2 + (1-a)x_0^2 = 0.$$

Sappiamo già che la conica è degenere se e solo se $a = 3$ o $a = -3/2$. Quindi per $a \neq 3, -3/2$ la conica $\overline{\mathcal{C}}$ è proiettivamente equivalente a $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$. In caso contrario, per quanto visto nel caso affine, la forma canonica sarà $X_0^2 + X_1^2 = 0$.

Sia $P \in \overline{\mathcal{C}}$ ricordiamo che il suo rango è sempre almeno 2. Allora sono possibili due casi:

- se P è non singolare, la tangente in P è unica e, per il Teorema di Bezout, è una retta che passa interseca la curva solo ed esclusivamente in P;
- se P è singolare, allora la conica è degene, ha rango 2 e quindi si spezza come unione di due rette che si intersecano in P.

Possiamo quindi già rispondere alla richiesta dell'esercizio: se $x_0 = 0$ è tangente principale alla curva deve essere necessariamente in quei casi in cui la curva affine è una parabola non degenere ($a = -1$) o quando la conica è spezzata in due rette con una delle componenti che è proprio $x_0 = 0$. Quest'ultimo caso non può mai accadere se partiamo da una conica affine quindi l'unico caso che ci interessa è per $a = -1$.

Verifichiamo il ragionamento direttamente: cerchiamo le intersezioni con $x_0 = 0$. Si ha

$$F(0, x_1, x_2) = x_1^2 + (1-a)x_1x_2 + x_2^2$$

il cui discriminante è $-3 - 2a + a^2 = (a-3)(a+1)$. Questo si annulla per $a = 3$ o $a = -1$ quindi questi sono i due valori per cui la condizione di tangenza è verificata (non a caso, corrispondono esattamente ai casi in cui abbiamo delle parabole affini). Per $a = -1$ abbiamo una parabola non degenere che quindi è tangente a $x_0 = 0$ automaticamente. Se invece abbiamo $a = -3$, la conica si spezza in due rette che si incontrano proprio in un punto P_3 di $x_0 = 0$ (nell'affine sono due rette parallele), quindi P_3 è un punto singolare per la curva. Ma x_0 non è un fattore di F quindi $x_0 = 0$ non è una tangente principale. Come anticipato, abbiamo solo un valore di a soddisfa le richieste: $a = -1$.

Soluzione dell'esercizio 5
Si veda la soluzione dell'esercizio 3.

Soluzione dell'esercizio 6
La topologia τ è composta, oltre che da X e dall'insieme vuoto, di tutti e soli gli insiemi del tipo $(0, \delta)$ con $\delta \in (0, 1]$. Questo vuol dire che ogni aperto di X è anche un aperto di (I, τ_e) dove τ_e è la topologia indotta da quella euclidea su I. Siamo quindi di fronte a due topologie confrontabili con quella di X che è più debole. Tra le varie conseguenze di questo fatto, abbiamo che ogni funzione $f : [0, 1] \to I$ (stiamo munendo $[0, 1]$ della topologia euclidea) che è continua per la topologia euclidea è continua con τ. In particolare, siccome (I, τ_e) è connesso per archi, anche X lo è. Lo stesso vale per la connessione.

Mostriamo che X è T_0. Siano a, b due punti distinti di X. Se $a = 0$ allora ogni intorno di b diverso da X non contiene a. Se entrambi sono diversi da 0 posso assumere $a < b$: l'insieme $(0, (a + b)/2)$ è un aperto in X che contiene a ma non b. Abbiamo mostrato che per ogni coppia di punti esiste un aperto che contiene uno dei due ma non l'altro: questa è la definizione di spazio topologico T_0.

X è compatto infatti se $\{U_j\}_{j \in J}$ è una collezione di aperti di X che copre X allora esiste almeno un $\bar{j} \in J$ tale che $0 \in U_{\bar{j}}$. Ma l'unico aperto di X che contiene 0 è X quindi ogni ricoprimento aperto contiene X. Un sottoricoprimento finito è quindi $\{U_{\bar{j}}\} = \{X\}$.

Mostrare che $P = \{3/4\}$ non è chiuso è semplice infatti il suo complementare non è aperto. Questo basta per concludere che X non è T_1 (e di conseguenza nemmeno di Hausdorff). Siccome gli aperti non banali sono tutti e soli gli insiemi del tipo $(0, \delta)$, i chiusi in X diversi da X e dal vuoto sono del tipo

$$\{0\} \cup [\delta, 1)$$

con $\delta \in (0, 1]$ e $\{0\}$. I chiusi di Y sono della stessa forma con $\delta \in (1/2, 1]$. Di conseguenza la chiusura di P in Y è $\overline{P} = \{0\} \cup [3/4, 1)$.

Il punto $Q = \{0\}$ è chiuso in X infatti il suo complementare è $(0, 1)$ che è un aperto. Di conseguenza Q è anche un chiuso in Y infatti $Q = Q \cap Y$ (tutti i chiusi di Y sono di questo tipo).

Si consideri l'arco $f : [0, 1] \to Y$ tale che $f(0) = 0$ e $f(t) = 1/2 + t/4$ (si ha quindi $f(1) = 3/4$). Mostriamo che f è un arco continuo in Y. Definiamo, per comodità, $U_\delta = (1/2, \delta)$ con $\delta \in (1/2, 1]$ e $U_0 = Y$. Questi sono tutti e soli gli aperti non vuoti di Y. Si ha

$$f^{-1}(U_\delta) = \begin{cases} \text{se } \delta = 0 & f^{-1}(Y) = [0, 1] \\ \text{se } \delta < 3/4 & (0, 4\delta - 2) \\ \text{se } \delta \geq 3/4 & (0, 1] \end{cases}$$

quindi la controimmagine di ogni aperto di Y è un aperto di $[0, 1]$ con la topologia indotta da quella euclidea: f è un arco continuo in Y che collega 0 e 3/4.