Geometria A

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

A.A. 2020/2021

13 Gennaio 2022

Esercizio 1. Sia $\mathbb{E}^4$ dotato della base ortonormale standard $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e di relative coordinate x_1, x_2, x_3, x_4. Si consideri

$$\pi : \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} .$$

(1) Si determinino la giacitura e la dimensione di π.

(2) Presa la famiglia

$$L_a : \begin{cases} (2-a)x_1 + (a-1)x_4 = a \\ x_2 + ax_3 + (2-a)x_4 = 1-a \\ (2-a)x_1 + ax_2 = 2a \end{cases} \qquad \text{tale che } a \in \mathbb{R},$$

provare che $\dim L_a = 1$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(3) Provare che $\pi \cap L_a \neq \emptyset$ per al più tre valori di $a \in \mathbb{R}$.

(4) Scelto $a = 2$, provare che π e L_a sono sghembe e trovare la distanza $d(\pi, L_2)$.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ la curva di equazione

$$f(x, y) = xy^2 - y^4 + x^3 - 2x^2y = 0.$$

Si determinino:

(1) I punti impropri e gli asintoti di $\mathcal{C}$.

(2) I punti singolari di $\mathcal{C}$ con le relative molteplicità e tangenti principali.

(3) L'equazione della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P = (4, -4)$.

Soluzione Esercizio 1. (1) Cominciamo a calcolare la giacitura di π: prendiamo $x_1 = k$, allora dalla prima equazione segue $x_4 = -k$ e $x_3 = k/2$, mentre $x_2 = h$ dipende da un altro parametro. Quindi possiamo riscrivere i punti di π come

$$\pi = \left\{ k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : h, k \in \mathbb{R} \right\},$$

dove $u = (1, 0, 1/2, -1)^t$ e $v = (0, 1, 0, 0)^t$ sono i vettori che danno la giacitura di π. Visto che la giacitura è data da due vettori (linearmente indipendenti) segue che $\dim \pi = 2$.

(2) Per studiare la dimensione di L_a al variare di $a \in \mathbb{R}$, calcoliamo il rango della matrice

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2-a & 0 & 0 & a-1 & a \\ 0 & 1 & a & 2-a & 1-a \\ 2-a & a & 0 & 0 & 2a \end{array} \right).$$

Proviamo che $\operatorname{rk} A = 3$ per ogni $ain\mathbb{R}$: infatti guardando alla prima sottomatrice 3×3 otteniamo

$$\det \begin{pmatrix} 2-a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 2-a & a & 0 \end{pmatrix} = (2-a)(-a^2) = a^2(a-2) \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{rk} A = 3 \text{ se } a \neq 0, 2.$$

Per $a = 0$, la matrice diventa

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{rk} A_0 = 3.$$

In ultimo, per $a = 2$ otteniamo

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -4 \neq 0 \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{rk} A_2 = 3.$$

Visto che A ha sempre rango massimo, segue che anche $(A|b)$ ha sempre rango 3, quindi otteniamo un parametro libero per ogni $a \in \mathbb{R}$. Equivalentemente,

$$\dim L_a = 1 \quad \text{per ogni } a \in \mathbb{R}.$$

(3) Le soluzioni di $\pi \cap L_a$ sono date dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} (2-a)x_1 + (a-1)x_4 = a \\ x_2 + ax_3 + (2-a)x_4 = 1-a \\ (2-a)x_1 + ax_2 = 2a \\ x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad B = \left(\begin{array}{cccc|c} 2-a & 0 & 0 & a-1 & a \\ 0 & 1 & a & 2-a & 1-a \\ 2-a & a & 0 & 0 & 2-a \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right).$$

L'intersezione $\pi \cap L_a$ non vuota equivale a chiedere che il rango di B sia massimo, cioè che $\det B \neq 0$. Al contrario, $\pi \cap L_a = \emptyset$ equivale a dire che $\operatorname{rk} B < 5$. Sappiamo che

$$\det B = (2-a) \det B_{11} - (a-1) \det B_{14} + a \det B_{15}$$

dove con B_{ij} intendiamo la matrice ottenuta da B togliendo la i-esima riga e la j-esima colonna. Ancora

$$\det B_{11} = \det(B_{11})_{44} = \det \begin{pmatrix} 1 & a & 1-a \\ a & 0 & 2-a \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2(a-2) + 2a(1-a) = -2a^2 + 4a - 4;$$

$$\det B_{14} = \det(B_{14})_{41} = \det \begin{pmatrix} 1 & a & 1-a \\ a & 0 & 2-a \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2(a-2) + 2a(1-a) = -2a^2 + 4a - 4;$$

$$\begin{aligned} \det B_{15} = \det(B_{15})_{41} - \det(B_{15})_{44} &= \det \begin{pmatrix} 1 & a & 2-a \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ 2-a & a & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= (-2a^2 + 2a(2-a)) - (-2(2-a) - a^2) = -3a^2 + 2a + 4. \end{aligned}$$

Mettendo tutto assieme otteniamo che

$$\begin{aligned} \det B &= (2-a)(-2a^2 + 4a - 4) - (a-1)(-2a^2 + 4a - 4) + a(-3a^2 + 2a + 4) = \\ &= a^3 - 12a^2 + 24a - 12. \end{aligned}$$

Visto che $\det B$ è un polinomio di grado 3, esso avrà al più 3 soluzioni reali (*Spoiler*: il computer dice che sono esattamente 3!).

(4) Per $a = 2$, dal punto precedente avremo $\det B = -4 \neq 0$, da cui segue che π e L_2 non si intersecano, quindi in $\mathbb{E}^4$ potranno essere solo parallele o sghembe. Se fossero parallele, allora la giacitura di L_2 sarebbe contenuta nella giacitura di π. Calcoliamo la giacitura di

$$L_2 : \begin{cases} x_4 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_2 = 4 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} x_4 = 2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -3/2 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad L_2 = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che $(1, 0, 0, 0) \in \langle (1, 0, 1/2, -1), (0, 1, 0, 0) \rangle$, allora esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} 1 = \lambda \\ 0 = \mu \\ 0 = \lambda/2 \\ 0 = -\lambda \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \text{non ci sono soluzioni!}$$

Segue quindi che π e L_2 sono sghembe.

Troviamo una direzione $v = (a, b, c, d)$ in $\mathbb{E}^4$ che sia ortogonale sia a π che a L_2 (questa esiste!). Dobbiamo richiedere che il prodotto scalare tra v e i vettori delle due giaciture sia nullo, ottenendo

$$\begin{cases} a + c/2 - d = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad a = b = 0, d = \frac{c}{2} \quad \rightsquigarrow \quad v = (0, 0, 2, 1).$$

Usiamo questa direzione per trovare l'unica retta ortogonale a π e a L_2 che interseca sia π che L_2.

Questa apparterrà al fascio di rette con direzioni v passanti per i punti di L_2, dato dalle equazioni parametriche

$$m_k : \begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -3/2 + 2s \\ x_4 = 2 + s \end{cases} .$$

Intersecando le rette m_k di questo fascio con il piano π otteniamo il sistema

$$\begin{cases} k + 2 + s = 0 \\ k - 3 + 4s + 4 + 2s = 0 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} s = 1/5 \\ k = -11/5 \end{cases} .$$

Il punto di intersezione con L_2 si ottiene per $k = -11/5$ e produce il punto

$$P = \left(-\frac{11}{5}, 2, -\frac{3}{2}, 2 \right).$$

L'intersezione di $m_{-11/5}$ con π si ottiene scegliendo $s = 1/5$ per costruzione, dandoci il punto

$$Q = \left(-\frac{11}{5}, 2, -\frac{11}{10}, \frac{11}{5} \right).$$

In ultimo, possiamo calcolare

$$\overline{PQ} = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} (x_i(P) - x_i(Q))^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{17}}{5}. \qquad \square$$

Soluzione Esercizio 2. (1) Per studiare punti impropri e asintoti (cioè le tangenti principali dei punti impropri) abbiamo bisogno della chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:

$$F(x_0, x_1, x_2) = x_0 x_1 x_2^2 - x_2^4 + x_0 x_1^3 - 2x_0 x_1^2 x_2 = 0.$$

I punti impropri sono dati dall'intersezione $\overline{\mathcal{C}} \cap \{x_0 = 0\}$, cioè sono i punti nel proiettivo che risolvono l'equazione $x_2^4 = 0$. Segue che esiste un solo punto improprio, $P = [0 : 1 : 0]$. Per studiare le tangenti principali a P, ci mettiamo nella carta $U_1 = \{x_1 \neq 0\}$ (e possiamo supporre $x_1 = 1$), dove la curva assume l'equazione

$$F(x_0, 1, x_2) = x_0 x_2^2 - x_2^4 + x_0 - 2x_0 x_2 = 0.$$

Visto che le tangenti principali sono date dalla fattorizzazione della parte omogenea di grado minimo, segue che la tangente principale è la retta di equazione $x_0 = 0$ che non può essere un asintoto perché i suoi punti stanno in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$.

(2) Sappiamo che i punti singolari di $\mathcal{C}$ sono i punti singolari di $\overline{\mathcal{C}}$ che sono anche propri, cioè i punti che risolvono le equazioni di $\overline{\mathcal{C}}$ e $\nabla F(x_0, x_1, x_2) = (0, 0, 0)$. Queste informazioni vengono date dalla risoluzione del sistema

$$\begin{cases} x_1 x_2^2 + x_1^3 - 2x_1^2 x_2 = x_1(x_1 - x_2)^2 = 0 \\ x_0 x_2^2 + 3x_0 x_1^2 - 4x_0 x_1 x_2 = 0 \\ 2x_0 x_1 x_2 - 4x_2^3 - 2x_0 x_1^2 = 0 \\ x_0 x_1 x_2^2 - x_2^4 + x_0 x_1^3 - 2x_0 x_1^2 x_2 = 0 \end{cases} .$$

Usiamo la prima equazione per procedere per casi. Se $x_1 = 0$, dalla seconda equazione segue che $x_0 x_2^2 = 0$, dandoci i punti $Q = [1 : 0 : 0]$ e $R = [0 : 0 : 1]$, ma il secondo non appartiene a $\overline{\mathcal{C}}$ e dobbiamo scartarlo. Se invece $x_1 = x_2$, la terza equazione diventa $4x_1^3 = 0$, da cui recuperiamo ancora il punto $Q = [1 : 0 : 0]$.

In definitiva, Q è l'unico punto singolare proprio, che corrisponde a $(0, 0) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$. Per studiare la sua natura, guardiamo alla parte omogenea di grado minimo di f:

$$xy^2 + x^3 - 2x^2 y = x(x - y)^2.$$

Segue che $m_{(0,0)}(\mathcal{C}) = 3$ e le tangenti principali sono date dalle rette di equazioni $x = 0$ e $x = y$, contata due volte.

(3) Essendo $(4, -4)$ un punto dove la curva è non singolare, ci aspettiamo un'unica retta tangente. Sappiamo che la retta tangente a $\mathcal{C}$ per un tale punto è data dall'equazione

$$\nabla f(4, -4) \cdot (x - 4, y + 4) = 0,$$

dove $\nabla f(x, y) = (y^2 + 3x^2 - 4xy, 2xy - 4y^3 - 2x^2)$. Per cui l'equazione è data da

$$(128, 192) \cdot (x - 4, y + 4) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 2x + 3y + 4 = 0. \qquad \square$$