Esercitazioni di Geometria A: spazi euclidei

9-10 marzo 2016

Esercizio 1
Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e si consideri una base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{bmatrix} a^2 - a & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2a \end{bmatrix}$$

dove a è un parametro reale. Si consideri la forma bilineare b su V la cui matrice rappresentativa rispetto alla base $\mathcal{B}$ è A. Sia $q : V \to \mathbb{R}$ definita dalla relazione $q(v) = b(v, v)$.

- Si dica, al variare di a, se b è simmetrica, antisimmetrica o non degenere;
- Si scriva la matrice rappresentativa di q rispetto alla base $\mathcal{B}$ e, una volto posto $a = 2$, una base di V rispetto alla quale q è in forma canonica;
- Si ricavi, al variare di a, la segnatura di q. Si dica per quali valori q è semidefinita positiva;
- Ponendo $a = 3$, si scriva la matrice rappresentativa di q rispetto alla base $\mathcal{B}' = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3\}$.

Soluzione dell'esercizio 1
La matrice A non è mai simmetrica quindi b non è mai una forma bilineare simmetrica. A è antisimmetrica se e solo se $a = 0$ quindi lo stesso vale per b. Siccome $\det(A) = 2a(2a - 1)$ abbiamo che la forma bilineare è non degenere se e solo se $a = 0$ o $a = 1/2$.

Siccome A è la matrice che rappresenta b rispetto a $\mathcal{B}$, se $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$, avremo

$$q(v) = b(v, v) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (a^2 - a)x^2 + xy - yx + 2xz - 2zx + 2az^2 = a(a-1)x^2 + 2az^2$$

quindi la matrice rappresentativa di q rispetto a $\mathcal{B}$ è la matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} a^2 - a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{bmatrix}.$$

La segnatura di q è quindi facilmente ricavabile: si ha

- per $a < 1, a \neq 0$, la segnatura di q è $(1, 1)$;
- per $a = 0$, q è la forma quadratica nulla e la sua segnatura è $(0, 0)$;

- per $a = 1$, la segnatura di q è $(1, 0)$;
- per $a > 1$, la segnatura di q è $(2, 0)$;

Abbiamo quindi che q è semidefinita positiva per $a \geq 1$ o $a = 0$. Se poniamo $a = 2$ avremo $q(v) = 2x^2 + 4z^2$ se $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Siccome $q(v) = 2x^2 + 4z^2 = (\sqrt{2}x)^2 + (2z^2)$ se usiamo come coordinate $x' = \sqrt{2}x$, $y' = 2z$ e $z' = y$ avremo che q è in forma canonica. Ma allora basta scegliere come base $\{e_1', e_2', e_3'\}$ con

$$e_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 \quad e_2' = \frac{1}{2}e_3 \quad e_3' = \mathrm{e}_2\,.$$

Si ha infatti

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3 = x\sqrt{2}e_1' + ye_3' + 2ze_2'$$

da cui si ricava appunto $q(v) = (x')^2 + (z')^2$.

Siccome la nuova base $\{f_1, f_2, f_3\}$ è tale che $f_1 = e_1, f_2 = e_1 + e_2$ e $f_3 = e_1 + e_2 + e_3$ allora

$$e_1 = f_1 \quad e_2 = f_2 - e_1 = f_2 - f_1 \quad e_3 = f_3 - e_1 - e_2 = f_3 - f_2$$

da cui si ha

$$v = xe_1 + ye_2 + ze_3 = xf_1 + y(f_2 - f_1) + z(f_3 - f_2) = (x - y)f_1 + (y - z)f_2 + zf_3.$$

In poche parole abbiamo la seguente relazione tra le coordinate (x, y, z) e (x', y', z') rispetto alle due basi:

$$x' = x - y \quad y' = y - z \quad z' = z.$$

Ricavando le variabili note rispetto a quelle nuove si ha

$$x = x' + y' + z' \quad y' = y' + z' \quad z = z'.$$

Poniamo ora $a = 3$ ottenendo

$$q(v) = 6x^2 + 6z^2 = 6(x' + y' + z')^2 + 6(z')^2 = 6(x')^2 + 6(y')^2 + 12(z')^2 + 12x'y' + 12x'z' + 12y'z'$$

da cui si ricava che la matrice rappresentativa di q (posto $a = 3$) rispetto alla base $\mathcal{B}'$ è

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 12 \end{bmatrix}.$$

Un modo diverso per procedere è quello di scrivere la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

del cambio di base e di ricordarsi che la matrice B che rappresenta q nella base $\mathcal{B}'$ è la matrice $M^T AM$. Svolgendo i conti si arriva alla stessa conclusione.

Esercizio 2
Esercizio 1 dell'appello (del corso di Geometria II) di giugno 2015.

Soluzione dell'esercizio 2
Si vedano le soluzioni in rete sulla pagina web del corso.

Esercizio 3
Si consideri $\mathbb{R}^3$ e munito della base canonica e del relativo sistema di coordinate (x, y, z). Si consideri l'applicazione bilineare b data dalla matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

e si considerino i vettori $v_1 = (1, 0, 2)$ e $v_2 = (0, 1, 1)$

- Si dimostri che $(\mathbb{R}^3, b)$ è uno spazio euclideo.
- Si consideri il sottospazio vettoriale V generato dal vettore v_1. Si ricavi il complemento ortogonale di V rispetto al prodotto scalare dato da b e la misura dell'angolo convesso $\widehat{v_1v_2}$.
- Si scriva, se possibile, una matrice ortogonale M tale che $M^T AM$ sia diagonale;
- Si ricavi, se possibile, una base ortonormale $\{u_1, u_2, u_3\}$ di $(\mathbb{R}^3, b)$ con u_1 proporzionale a v_1.

Soluzione dell'esercizio 3
Basta mostrare che b è simmetrica e definita positiva. Questo si deduce immediatamente osservando che A è simmetrica e dal polinomio caratteristico

$$p_A = (t - 3)(t - 5)(t - 8)$$

che ha solo radici reali positive. Il complemento ortogonale di V rispetto a b è l'insieme dei vettori w di $\mathbb{R}^3$ tali che $b(v_1, w) = 0$. Siano quindi x, y e z le coordinate di w. Si ha $b(v_1, w) = 0$ se e solo se

$$0 = b(v_1, w) = 12z$$

cioè se e solo se $z = 0$. Abbiamo quindi $V^\perp = \langle e_1, e_2\rangle$. Denotiamo il prodotto scalare con $< \cdot, \cdot >$ e con $\| \cdot \|$ la norma indotta da b, cioè $\| v \|= \sqrt{b(v, v)}$.

Abbiamo

$$\cos(\widehat{v_1v_2}) = \frac{< v_1, v_2 >}{\| v_1 \| \| v_2 \|} = \frac{12}{\sqrt{24}\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

da cui si ricava che l'angolo convesso $\widehat{v_1v_2}$ vale $\pi/4$.

Cerchiamo gli autovettori relativi a 3 e a 8 (per 5 si vede a occhio che basta scegliere e_2).

$$\begin{cases} 4x - 2z = 3x \\ 5y = 3y \\ -2x + 7z = 3z \end{cases} = \begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 2z = 8x \\ 5y = 8y \\ -2x + 7z = 8z \end{cases} = \begin{cases} z = -2x \\ y = 0 \end{cases}$$

Abbiamo quindi che $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ con $w_1 = (2, 0, 1), w_2 = e_2$ e $w_3 = (1, 0, -2)$ è una base ortogonale per $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A. Basta normalizzare i tre vettori (sono vettori di $\mathbb{R}^3$ e la norma rispetto a cui li dobbiamo normalizzare è quella standard su $\mathbb{R}^3$) e metterli in colonna per ottenere la matrice M cercata:

$$M = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Una base ortonormale per $(\mathbb{R}^3, b)$ con il primo vettore proporzionale a v_1 esiste e possiamo ricavarla, ad esempio, con il processo di Gram-Schmidt.

Poniamo $w_1 = v_1$ e completiamo $\{w_1\}$ a base di $\mathbb{R}^3$ aggiungendo a $\{w_1\}$ ad esempio $w_2 = e_2$ e $w_3 = e_3$. Avremo

$$q(w_1) = 24 \quad q(w_2) = 5 \quad q(w_3) = 7$$

$$b(w_1, w_2) = 0 \quad b(w_1, w_3) = 12 \quad b(w_2, w_3) = 0$$

$$u_1' = w_1$$

$$u_2' = w_2 - \frac{b(w_2, u_1')}{q(u_1')} u_1' = w_2 - 0u_1' = w_2$$

$$u_3' = w_3 - \frac{b(w_3, u_1')}{q(u_1')} u_1' - \frac{b(w_3, u_2')}{q(u_2')} u_2' = e_3 - \frac{12}{24} u_1' - 0u_2' = w_3 - w_1/2$$

Da cui otteniamo

$$u_1' = (1, 0, 2) \quad u_2' = (0, 1, 0) \quad u_3' = (0, 0, 1) - (1, 0, 2)/2 = (-1/2, 0, 0)$$

Ora non rimane che normalizzare (rispetto alla norma indotta da b): siccome

$$q(u_1') = 24 \quad q(u_2') = 5 \quad q(u_3') = 1$$

una base con le caratteristiche cercate è

$$u_1 = (1, 0, 2)/\sqrt{24} \quad u_2 = (0, 1/\sqrt{5}) \quad u_3 = (-1/2, 0, 0).$$

Esercizio 4

Sia $\mathbb{E}^2$ il piano euclideo con coordinate (x, y) e origine O. Si consideri la retta r passante per $P = (1, 3)$ ortogonale alla retta di equazione s $y = 2x + 67$. Si consideri il punto di coordinate $Q = (-2, 7)$ e la trasformazione del piano tale

$$f(x, y) = \frac{1}{5}(4x + 3y + 5, 3x - 4y + 5a)$$

dove a è un parametro reale.

- Si ricavi la distanza tra la retta r e il punto Q;
- Si dica se f è un'isometria e, al variare di a, si individui il tipo di isometria di f e l'insieme dei punti fissi;
- Rispondere alle stesse domande dell'ultimo punto per f^2.

Soluzione dell'esercizio 4

La giacitura di s è generata da $d_s = (1, 2)$ poichè un'equazione parametrica per s è $x = t, y = 2t + 67$. Quindi la giacitura di r sarà generata da $d_r = (2, -1)$ e un'equazione cartesiana per r sarà

$$(x - 1) + 2(y - 3) = 0 \to x + 2y - 7 = 0.$$

Ci basta applicare la distanza punto-retta ricordando che l'equazione cartesiana di r è $x + 2y - 7 = 0$ e che $Q = (-2, 7)$:

$$d(Q, r) = \frac{|-2 + 14 - 7|}{\sqrt{1 + 4}} = \sqrt{5}.$$

Per controllare se f è un'isometria basta controllare se è un'affinità e che la parte lineare di f sia un'isometria su $\mathbb{R}^2$. f è chiaramente un'affinità e la matrice che rappresenta la parte lineare di f (l'isomorfismo $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che manda un vettore ilvettore di estremi A e B in quello di estremi $f(A)$ e $f(B)$) è

$$M = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Siccome le colonne di M sono ortogonali e hanno norma 1 abbiamo che $M \in O(2)$ e che f è un'isometria. Notiamo che $\det(M) = -1$: sappiamo che f è un'isometria inversa per ogni a. Vediamo per quali valori di a, f ha punti fissi. Per ricavarli basta risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4x + 3y + 5 & = & 5x \\ 3x - 4y + 5a & = & 5y \end{cases} \begin{cases} 3y + 5 & = & x \\ 3x + 5a & = & 9y \end{cases} \begin{cases} -x + 3y = -5 \\ 3x - 9y = -5a \end{cases} \begin{cases} -x + 3y = -5 \\ x - 3y = -5a/3 \end{cases}$$

che è un sistema a cui matrice dei coefficienti ha determinante nullo: se $-1 = a/3$, cioè se $a = -3$, il sistema ha per soluzione la retta $x - 3y = 5$ mentre per tutti gli altri valori di a si ha che il luogo dei punti fissi è vuoto. Quindi per $a = -3$ abbiamo una riflessione rispetto alla retta $x - 3y - 5 = 0$ mentre per $a \neq -3$ f è una glissoriflessione. Non ci serve fare conti per vedere cosa succede per f^2: se $a = -3$, f è una riflessione rispetto a una retta quindi $f^2 = \mathrm{Id}$ (e ogni punto dello spazio è punto fisso), mentre se $a \neq -3$, f è una glissoriflessione quindi f^2 è una traslazione e non ha punti fissi.

Esercizio 5
Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ con origine O e munito delle coordinate (x, y, z, w). Si consideri la retta per $P = (1, 2, 0, 1)$ avente per direttrice il vettore $d = e_1 - e_3 + e_4$. Si calcoli la distanza tra $Q = (0, 2, -1, 2)$ e r.

Soluzione dell'esercizio 5
Primo metodo: scriviamo l'equazione dell'iperpiano π di $\mathbb{E}^4$ ortogonale a r e passante per Q. L'intersezione tra π e r è un punto che chiameremo R che è il punto di r che realizza la distanza minima da Q: avremo quindi $d(r, Q) = d(P, Q)$.

L'iperpiano cercato è

$$\pi :< d, (x, y - 2, z + 1, w - 2) >= x - z - 1 + w - 2 = 0$$

cioè

$$\pi : x - z + w - 3 = 0.$$

L'equazione parametrica di r è

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = -t \\ w = 1 + t \end{cases}$$

quindi possiamo ricavare l'intersezione andando a sostituire nell'equazione di π le coordinate parametrizzate:

$$1 + t + t + 1 + t - 3 = 0 \quad 3t = 1 \quad t = 1/3.$$

Il punto R ha coordinate $R = (4/3, 2, -1/3, 4/3)$ e la distanza tra r e Q è

$$d(r, Q) = d(R, Q) =\| Q - R \|=\| (-4/3, 0, -2/3, 2/3) \|= \frac{2}{3}\sqrt{4 + 1 + 1} = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

Secondo metodo: sfrutto la parametrizzazione di r per calcolare la distanza tra un suo punto (P_t) e Q. Interpreto questa come funzione di t e la distanza tra r e Q è il minimo di f al variare di t.

Ho $P_t = (1+t, 2, -t, 1+t)$. Il vettore $Q - P_t$ ha coordinate

$$(-1-t, 0, -1+t, 1-t)$$

quindi

$$f(t) := d(P_t, Q) = \sqrt{(t+1)^2 + 2(t-1)^2}.$$

Cerco il minimo di f al variare di t che coincide con il minimo di

$$f^2 = t^2 + 2t + 1 + 2t^2 + 2 - 4t = 3t^2 - 2t + 3.$$

O derivando o ricordandosi che il minimo di una funzione quadratica si ha per

$$t_0 = -(-2)/(2 \cdot 3) = 1/3$$

otteniamo che il minimo di f è

$$f(t_0) = \sqrt{3/9 - 2/3 + 3} = \sqrt{\frac{1-2+9}{3}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$

Vale, come anticipato

$$d(r, Q) = f(t_0) = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$