Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA A

Esercizio 1. Si consideri nello spazio $\mathbb{R}^3$ la seguente forma bilineare simmetrica, scritta rispetto alle coordinate indotte dalla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$:

$$g_k\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = 2x_1y_1 + (k+1)x_2y_2 + (k+1)x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 +$$

$$+ (k-1)x_1y_3 + (k-1)x_3y_1 + (1-2k)x_2y_3 + (1-2k)x_3y_2$$

(i) Si scriva una matrice A_k associata alla forma bilineare g e si discuta la segnatura in funzione del paramentro k. Si stabilisca infine per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ g_k è semidefinita o definita (positiva o negativa) e in particolare per quali $k \in \mathbb{R}$ definisce un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

Posto quindi $k = 1$, si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare g_1.

(ii) Si trovi un'equazione parametrica della retta affine r passante per il punto $P\ (4, 4, -7)$ e ortogonale al sottospazio vettoriale U di equazione

$$U\colon x + y - 2z = 0.$$

Si determini quindi la distanza tra il punto P e il piano U.

(iii) Sia $\rho\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la riflessione rispetto al piano U. Si determinino le coordinate del punto $Q := \rho(P)$.

Svolgimento Esercizio 1.

(i) La matrice A_k associata alla forma bilineare g_k rispetto alla base canonica è

$$A_k := \begin{pmatrix} 2 & -1 & k-1 \\ -1 & k+1 & 1-2k \\ k-1 & 1-2k & k+1 \end{pmatrix}$$

Utilizziamo il metodo dei minori principali per determinare la segnatura della matrice, cominciando dall'entrata in posizione $(1, 1)$:

- $\det(2) = 2 > 0 \Rightarrow \mathrm{Sgn} = (1, 0)$;
- $\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & k+1 \end{pmatrix} = 2k + 1 > 0 \Leftrightarrow k > -1/2$, quindi

$$\mathrm{Sgn} = \begin{cases} (1,1) & k < -1/2 \\ (2,0) & k > -1/2 \end{cases}$$

- $\det(A_k) = -(k-2)k(k+3) > 0 \Leftrightarrow k < -3 \vee 0 < k < 2$, quindi

$$\mathrm{Sgn}(A_k) = \begin{cases} (1,2) & k < -3 \\ (2,1) & -3 < k < 0 \vee k > 2 \\ (3,0) & 0 < k < 2 \end{cases}$$

Osserviamo nel dettaglio il caso $k = -1/2$. Per questo valore di k siamo passati da un minore di ordine 1 con determinante positivo al determinante della matrice $A_{-1/2}$ di determinante strettamente negativo; questo significa che la forma $g_{-1/2}$ è non degenere e - rispetto al minore di ordine 1 - ha sia l'indice di positività che quello di negatività aumentati di 1.

Restano da studiare i valori per i quali il determinante di A_k si annulla, ossia quelli per i quali la forma bilineare g_k è degenere. Dall'osservazione del segno del minore di ordine 2 possiamo concludere che

$$\operatorname{Sgn}(A_k) = \begin{cases} (1,1) & k = -3 \\ (2,0) & k = -0, k = 2 \end{cases}$$

Concludiamo che g_k è una forma semidefinita positiva per $k \leq 0 \leq 2$ e definita positiva (e quindi è un prodotto scalare) per $0 < k < 2$.

(ii) È immediato vedere che $U :=< u_1, u_2 >$, dove

$$u_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

una direzione ortogonale a U sarà quindi data da una soluzione non banale del sistema

$$\begin{cases} (x\ y\ z)A_1 u_1 = 0 \\ (x\ y\ z)A_1 u_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + 3y - z = 0 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = -2/3z \end{cases} .$$

Un'equazione parametrica per la retta r è quindi data da

$$r\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Per calcolare la distanza tra U e P determiniamo $r \cap U$:

$$(4 - 3t) + (4 - 2t) - 2(-7 + 3t) = 0 \Rightarrow t = 2.$$

Pertanto il punto Q di intersezione tra r e U è il punto $(-2, 0, -1)$. A questo punto

$$d^2(P,U) = d^2(P,Q) = ||PQ|| = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} = 176$$

quindi $d(P,U) = 4\sqrt{11}$.

(iii) L'immagine di P rispetto a ρ giace sulla retta r e soddisfa $d(\rho(P), Q) = 2d(\rho(P), P)$, pertanto, avendo ottenuto Q ponendo $t = 2$ nell'equazione parametrica di r, $\rho(P)$ corrisponederà al punto di r ottenuto imponendo $t = 4$ nell'equazione parametrica, ossia $\rho(P) = (-8, -4, 5)$.

Esercizio 2. Si considerino nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ le curve piane proiettive $\overline{\mathcal{Q}}_k$ e $\overline{\mathcal{C}}$ definite rispettivamente da da

$$F_k(x_0, x_1, x_2)\colon kx_1x_2 + (k+2)x_0x_1 + (1-k)x_0x_2 - (k+3)x_0^2 = 0 \quad ;$$
$$G(x_0, x_1, x_2)\colon x_1^3x_2 - 2x_0x_1x_2^2 + x_0^4 = 0 \quad ,$$

con $k \in \mathbb{C}$.

(i) Si classifichi la conica proiettiva $\overline{\mathcal{Q}}_k$ al variare di k, scrivendo l'equazione canonica della conica proiettivamente equivalente ad essa.

(ii) Si trovino i punti singolari di $\overline{\mathcal{C}}$ e si calcolino le tangenti principali in tali punti con le rispettive molteplicità di intersezione nei punti di tangenza.

(iii) Si consideri il piano affine $U_0 := \{x_0 \neq 0\}$, si definiscano le coordinate affini $x := x_1/x_0$ e $y := x_2/x_0$ e si considerino $\mathcal{Q}_k$ e $\mathcal{C}$, le curve piane affini definite rispettivamente da $f_k(x,y) = F_k(1,x,y)$ e $g(x,y) = G(1,x,y)$. Si trovino i valori di $k \in \mathbb{C}$ per i quali le curve $\mathcal{Q}_k$ e $\mathcal{C}$ hanno almeno un asintoto in comune.

Svoglimento Esercizio 2.

(i) Le coniche proiettive complesse vengono classificate in base al rango, quindi è sufficiente calcolare il rango della matrice associata a F_k:

$$A_k := \begin{pmatrix} -(k+3) & (k+2)/2 & (1-k)/2 \\ (k+2)/2 & 0 & k/2 \\ (1-k)/2 & k/2 & 0 \end{pmatrix};$$

$\det(A_k) = (k^2+k)/2$. La matrice ha rango massimo per $k \neq 0, -1$, mentre per $k = 0, -1$ la matrice ha rango 2. Quindi la conica $\overline{\mathcal{Q}}_k$ è proiettivamente equivalente a

$$\begin{cases} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 & \text{per } k \neq 0, -1 \\ x_0^2 + x_1^2 = 0 & \text{per } k = 0, -1 \end{cases}$$

(ii) Calcoliamo le derivate parziali di $G(x_0, x_1, x_2)$ rispetto alle tre coordinate proiettive:

$$\begin{aligned} G_0(x_0,x_1,x_2) &= -2x_1x_2^2 + 4x_0^3 \\ G_1(x_0,x_1,x_2) &= 3x_1^2x_2 - 2x_0x_2^2 \\ G_2(x_0,x_1,x_2) &= x_1^3 - 4x_0x_1x_2 \end{aligned}$$

L'unico punto in cui si annullano contemporaneamente le derivate parziali è il punto $P\colon [0,0,1]$.

Per calcolare le tangenti principali in P deomogeneizziamo rispetto alla coordinata x_2, definendo $u := x_0/x_2$ e $w := x_1/x_2$. La curva affine corrispondente ha equazione

$$g_2(u,w) = w^3 - 2uw + u^4 = 0.$$

Il punto di coordinate $(0,0)$ è un punto doppio e le sue tangenti principali sono le rette di equazione $r\colon u = 0$, $s\colon w = 0$.

Calcoliamo le rispettive molteplicità di intersezione.

Parametrizziamo la retta r come

$$\begin{cases} u = 0 \\ w = t \end{cases};$$

e osserviamo che $g_2(0,t) = t^3$.

Parametrizziamo la retta s come

$$\begin{cases} u = t \\ w = 0 \end{cases};$$

e osserviamo che $g_2(t,0) = t^4$. Tutto ciò ci permette di concludere che le tangenti principali al punto P sono le rette $r\colon x_0 = 0$ e $s\colon x_1 = 0$ e $I(\overline{\mathcal{C}}, r; P) = 3$ e $I(\overline{\mathcal{C}}, s; P) = 4$.

(iii) Le curve affini da considerare hanno equazione

$$f_k(x,y)\colon kxy+(k+2)x+(1-k)y-(k+3)=0$$
$$g(x,y)\colon x^3y-2xy^2+1=0$$

Calcoliamo gli asintoti di $\mathcal{Q}_k$. Per $k=0$, $\mathcal{Q}_k$ è una retta, pertanto il suo asintoto coincide con la retta stessa. Supponiamo ora $k\neq 0$. I punti impropri di $\mathcal{Q}_k$ sono $P_1\colon [0,1,0]$ e $P_2\colon [0,0,1]$. Per calcolare le tangenti in tali punti calcoliamo le derivate parziali di F_k:

$$\begin{aligned}
F_{k0}(x_0,x_1,x_2) &= (k+2)x_1+(1-k)x_2-2(k+3)x_0\\
F_{k1}(x_0,x_1,x_2) &= kx_2+(k+2)x_0\\
F_{k2}(x_0,x_1,x_2) &= kx_1+(1-k)x_0
\end{aligned}$$

Osserviamo che per $k\neq 0$ le derivate prime non si annullano simultaneamente nei punti P_1 e P_2, pertanto essi sono punti semplici per ogni valore di $k\in\mathbb{C}$. Le rette tangenti sono

$$\bar{t}_{1,k}\colon (k+2)x_0+kx_2=0$$
$$\bar{t}_{2,k}\colon (1-k)x_0+kx_1=0,$$

quindi gli asintoti di $\mathcal{Q}_k$ sono le rette $t_{1,k}\colon (k+2)+ky=0$ e $t_{2,k}\colon (1-k)+kx=0$.

I punti impropri di $\mathcal{C}$ sono gli stessi di $\mathcal{Q}_k$: $P_1\colon [0:1:0]$ e $P_2\colon [0:0:1]$.

Abbiamo già calcolato nel punto precedente le tangenti principali a P_2: delle due solo la retta s è un asintoto per $\mathcal{C}$ $s\colon x=0$.

Il punto P_1 è un punto semplice per $\overline{\mathcal{C}}$, quindi la retta tangente a $\overline{\mathcal{C}}$ in P_1 è data da $s'\colon x_2=0$. Abbiamo quindi un secondo asintoto per $\mathcal{C}$ che è la retta $y=0$.

Per avere un asintoto in comune, quindi, dovremo avere $k=1$ (per il quale $x=0$ è l'asintoto comune) o $k=-2$ (per il quale l'asintoto comune è $y=0$).