Esame scritto di Geometria A

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2016/2017

Appello di luglio 2017

Esercizio 1
Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 3x_5 = b_1 \\ x_4 - x_5 + 2x_6 = b_2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 7x_5 - 4x_6 = b_3 \\ -x_4 + x_5 - 2x_6 = b_4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 6x_4 + 7x_5 + 8x_6 = b_5 \end{cases}$$

dove b_1, b_2, b_3, b_4 e b_5 sono parametri reali.

(i) Determinare quali condizioni devono soddisfare i parametri b_1, b_2, b_3, b_4 e b_5 affinché il sistema sia compatibile e descrivere le equazioni parametriche del sottospazio affine S di $\mathbb{A}^6$ formato dalle soluzioni del sistema.

(ii) Sia $U \subset \mathbb{R}^5$ il sottospazio vettoriale formato dai termini noti $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ che rendono compatibile il sistema e sia T il sottospazio affine di $\mathbb{A}^5$ passante per il punto $P = (0, 0, 0, a+1, a)$ con giacitura U. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, determinare le equazioni cartesiane del più piccolo sottospazio affine contenente T e la retta di equazioni

$$r : \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2
Si consideri l'endomorfismo $f_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t^2 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Per ogni $t \in \mathbb{R}$, determinare gli autovalori dell'endomorfismo e la loro molteplicità algebrica.

(ii) Per ogni $t \in \mathbb{R}$, calcolare una base di ogni autospazio.

(iii) Determinare per quali $t \in \mathbb{R}$, l'endomorfismo f è diagonalizzabile ed esibire una base diagonalizzante.

(iv) Si consideri il sottospazio vettoriale $U \subset \mathbb{R}^3$ generato dalla base $\mathscr{B} = \langle (2, 2, 5), (3, -8, 2) \rangle$. Determinare per quali t in $\mathbb{R}$, la restrizione di f_t ad U risulta essere un endomorfismo di U.

Esercizio 3
Si consideri la spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard. Siano (x, y, z, t) le coordinate di V rispetto alla base canonica. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ sia Q la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ definita da:

$$Q(x, y, z, t) = 2kxt + 2yz$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

(i) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il rango di Q e la sua segnatura.

(ii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, esplicitare, se esiste, una base ortonormale diagonalizzante per Q rispetto al prodotto scalare standard. Scrivere l'espressione polinomiale di Q rispetto alla base scelta.

(iii) Sia B la forma bilineare simmetrica associata a Q e si consideri lo spazio vettoriale W tale che

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Sia $W^\perp$ lo spazio vettoriale generato dai vettori di $\mathbb{R}^4$ che sono ortogonali a tutti i vettori di W rispetto a B. Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione di $W^\perp$.

Esercizio 4
Si consideri il piano affine complesso $\mathbb{A}^2$ con coordinate affini (x, y) e il piano proiettivo $\mathbb{P}^2$ complesso con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$. Si identifichi $\mathbb{A}^2$ con $\mathbb{P}^2 \setminus \{x_0 = 0\}$ con la scelta $x = x_1/x_0$ e $y = x_2/x_0$. Si consideri, in $\mathbb{A}^2$, la curva

$$\mathcal{C} : f(x, y) = y^3 - 7 + 15x - 3x^2 + 2x^3 = 0$$

e si indichino con $\overline{\mathcal{C}}$ la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ e con $\overline{\mathcal{D}}$ l'hessiana di $\overline{\mathcal{C}}$. Si denoti con P il punto di coordinate $[1, -1, 3]$.

(i) Si ricavi il grado di $\overline{\mathcal{D}}$ e delle equazioni che descrivano $\overline{\mathcal{C}}$ e $\overline{\mathcal{D}}$. Si dimostri che P è un punto liscio per $\overline{\mathcal{C}}$.

(ii) Si ricavino le componenti irriducibili di $\overline{\mathcal{D}}$. Si dimostri che P è un punto di flesso e si ricavi la tangente inflessionale t in P, $m_{\overline{\mathcal{C}}}(P)$ e $I_P(\overline{\mathcal{C}}, t)$.

(iii) Si ricavino i punti all'infinito di $\mathcal{C}$ e si indichi con Q l'unico punto con coordinate reali. Si scriva un'equazione cartesiana per la retta r passante per $(2, 4)$ e tale che la chiusura proiettiva di r passi per Q.

Esame scritto di Geometria II

Università degli Studi di Trento
Corso di laurea in Matematica
A.A. 2014/2015

Appello di luglio 2016

Esercizio 5
Si consideri la spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare standard. Siano (x, y, z, t) le coordinate di V rispetto alla base canonica. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ sia Q la forma quadratica su $\mathbb{R}^4$ definita da:

$$Q(x, y, z, t) = 2kxt + 2yz$$

dove $k \in \mathbb{R}$ è un parametro reale.

(i) Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il rango di Q e la sua segnatura.

(ii) Al variare di $k \in \mathbb{R}$, esplicitare, se esiste, una base ortonormale diagonalizzante per Q. Scrivere l'espressione polinomiale di Q rispetto alla base scelta.

(iii) Sia B la forma bilineare simmetrica associata a Q e si consideri lo spazio vettoriale W tale che

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Sia $W^\perp$ lo spazio vettoriale generato dai vettori di $\mathbb{R}^4$ che sono ortogonali a tutti i vettori di W rispetto a B. Calcolare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la dimensione di $W^\perp$.

Esercizio 6
Sia $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\}$ e si consideri la funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tale che, se $P = (x_P, y_P), Q = (x_Q, y_Q) \in X$ sono sulla stessa retta verticale allora $d(P, Q) = |y_Q - y_P|$ mentre in caso contrario si ha $d(P, Q) = |y_P| + |y_Q| + |x_P - x_Q|$.

- Dimostrare che (X, d) è uno spazio metrico e che su ogni semiretta verticale la distanza indotta è quella euclidea;
- Descrivere le palle aperte di centro $(0, 0)$ e $(0, 1)$;
- Si considerino le successioni $(P_n)_{n\geq1}$ e $(Q_n)_{n\geq1}$ con $P_n = (1/n, 1)$ e $Q_n = (1, 1/n)$. Si dica se le successioni convergono in (X, d);
- Chiamando τ la topologia definita dalla metrica, dire se (X, τ) è T_2 e compatto.

Soluzione dell'esercizio 1
(i) Osserviamo preliminarmente che la seconda e quarta equazione hanno la parte lineare cambiata di segno, quindi affinché il sistema sia risolubile è necessario che $b_4 = -b_2$. Sotto questa ipotesi, scriviamo la matrice dei coefficienti (senza la quarta equazione) e la riduciamo:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 3 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & b_2 \\ 2 & 4 & -2 & -4 & 7 & -4 & b_3 \\ 3 & 6 & -3 & -6 & 7 & 8 & b_5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1 \\ R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 3 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 8 & b_5 - 3b_1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ R_4 \leftarrow R_4 + 2R_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 3 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 + 2b_3 - 7b_1 \end{array}\right)$$

ottenendo come condizioni $b_5 + 2b_3 - 7b_1 = b_2 + b_4 = 0$. Riduciamo ulteriormente

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 3 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & b_3 - 2b_1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_1 \leftarrow R_1 - 3R_3 \\ R_2 \leftarrow R_2 + R_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 12 & 7b_1 - 3b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & b_2 + b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & b_3 - 2b_1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} R_1 \leftarrow R_1 + 2R_2 \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 8 & 3b_1 + 2b_2 - b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & b_2 + b_3 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & b_3 - 2b_1 \end{array}\right)$$

Le equazioni parametriche che descrivono le soluzioni sono quindi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b_1 + 2b_2 - b_3 \\ 0 \\ 0 \\ b_2 + b_3 - 2b_1 \\ -2b_1 + b_3 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u, v, w \in \mathbb{R}.$$

(ii) Cominciamo con il determinare per quali valori di a lo spazio T e la retta r hanno intersezione. Le equazioni cartesiane di T sono

$$T \begin{cases} b_2 + b_4 = a + 1 \\ b_5 + 2b_3 - 7b_1 = a \end{cases}$$

mentre le equazioni cartesiane di r sono

$$r \begin{cases} b_2 = 2 \\ b_3 = 0 \\ b_4 + 2b_1 = 1 \\ b_5 - 3b_1 = 3 \end{cases}.$$

Riduciamo la matrice del sistema ottenuto unendo le equazioni:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & a+1 \\ -7 & 0 & 2 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_1 \leftarrow R_2 - 2R_4 \\ R_2 \leftarrow R_1 - R_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ R_3 \leftarrow R_4 \\ R_4 \leftarrow R_3 \\ R_5 \leftarrow R_5 - R_2 \\ R_6 \leftrightarrow R_6 - R_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3-a \end{array}\right) \quad R_6 \leftarrow R_6 - 2R_5 \left(\begin{array}{ccccc|c} -7 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

Per $a = 1$ abbiamo un punto di intersezione e per $a \neq 1$ i due spazi sono disgiunti. Inoltre le giaciture non dipendono da a, quindi la giacitura della retta non è mai contenuta in U (se fosse contenuta in U non potremmo avere un solo punto di intersezione). Quindi per $a \neq 1$ il più piccolo spazio affine contenente T e r è tutto lo spazio $\mathbb{A}^5$, mentre per $a = 1$ c'è un iperspazio H di dimensione 4 contenente T e r. Per calcolarne le equazioni abbiamo bisogno di una base di U. Dalle equazioni $b_2 + b_4 = b_5 + 2b_3 - 7b_1 = 0$, considerando b_1, b_2 e b_3 come parametri liberi, otteniamo

$$U = \big\langle (1,0,0,0,7), (0,1,0,-1,0), (0,0,1,0,-2) \big\rangle.$$

L'equazione cartesiana di H è quindi

$$\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 - 2 & b_3 & b_4 - 1 & b_5 - 3 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -14b_1 - 4b_2 + 4b_3 - 4b_4 + 2b_5 + 6 = 0.$$

Soluzione dell'esercizio 2

(i) Calcoliamo il polinomio caratteristico della matrice:

$$\det(A - \lambda \mathbf{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & t^2 \\ 0 & t-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (t-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & t^2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= (t-\lambda)\big((1-\lambda)^2 - t^2\big) = (t-\lambda)(1-\lambda-t)(1-\lambda+t).$$

Gli autovalori di f_t sono quindi t, $1-t$ e $1+t$. Osserviamo che i primi due autovalori coincidono quando $t = \frac{1}{2}$, il secondo e il terzo quando $t = 0$, mentre il primo e il terzo sono sempre distinti. Riepilogando, abbiamo

$$\begin{array}{lll} t \neq 0, \frac{1}{2}, & \lambda = t, 1-t, 1+t, & m_a(t) = m_a(1-t) = m_a(1+t) = 1, \\ t = 0, & \lambda = 0, 1, & m_a(0) = 1,\ m_a(1) = 2, \\ t = \frac{1}{2}, & \lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, & m_a(\frac{1}{2}) = 2,\ m_a(\frac{3}{2}) = 1. \end{array}$$

(ii) Cominciamo dal caso $t \neq 0, \frac{1}{2}$. Per $\lambda = t$, riduciamo la matrice $A - t\mathbf{Id}$:

$$\begin{pmatrix} 1-t & 0 & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{pmatrix} \; R_1 \leftrightarrow R_3 \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-t \\ 1-t & 0 & t^2 \end{pmatrix}$$
$$R_2 \leftarrow R_2 - (1-t)R_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & 2t-1 \end{pmatrix} \; R_2 \leftarrow \tfrac{1}{2t-1} R_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$R_1 \leftarrow R_1 - (1-t)R_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v_1 = v_3 = 0,$$

da cui $V_t = \langle (0,1,0) \rangle$. Per $\lambda = 1-t$,

$$\begin{pmatrix} t & 0 & t^2 \\ 0 & 2t-1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \; \begin{array}{c} R_1 \leftarrow R_1 - tR_3 \\ R_2 \leftarrow \frac{1}{2t-1} R_2 \end{array} \; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v_1 + tv_3 = v_2 = 0,$$

da cui deduciamo $V_{1-t} = \langle(-t,0,1)\rangle$. Infine, per $\lambda = 1+t$,

$$\begin{pmatrix} -t & 0 & t^2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + tR_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -t \end{pmatrix} \implies v_1 - tv_3 = v_2 = 0,$$

da cui deduciamo $V_{1+t} = \langle(t,0,1)\rangle$.

Passiamo ora al caso $t = 0$. Per $\lambda = 0$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies v_1 = v_3 = 0,$$

l'autospazio è $V_0 = \langle(0,1,0)\rangle$, mentre per $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies v_1 = v_2 = 0$$

l'autospazio è $V_1 = \langle(0,0,1)\rangle$.

Se $t = \frac{1}{2}$, l'autospazio $V_{\frac{1}{2}}$ è definito dalle equazioni descritte dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - \frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \implies v_1 + \frac{1}{2}v_3 = 0$$

ed ha come base la coppia $\{(0,1,0), (-\frac{1}{2},0,1)\}$, mentre per l'autospazio $V_{\frac{3}{2}}$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 + \frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \implies v_2 = v_1 - \frac{1}{2}v_3 = 0$$

da cui $V_{\frac{3}{2}} = \langle(\frac{1}{2},0,1)\rangle$.

(iii) Per quanto svolto al punto (ii), l'endomorfismo f_t è diagonalizzabile per ogni $t \neq 0$ e una base diagonalizzante è data da $\{(0,1,0), (-t,0,1), (t,0,1))\}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & t^2 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -t & t \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2t} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2t} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(iv) Affinché $f_t|_U$ sia un endomorfismo di U, dobbiamo imporre che $f_t(U)$ sia contenuto in U. Per comodità, cerchiamo una base ridotta di U:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & -8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + 4R_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2/11} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

L'immagine $f_t(U)$ è quindi generata da

$$f_t\big((1,-4,0)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t^2 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4t \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f_t\big((0,2,1)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t^2 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Imponiamo che entrambi i vettori siano in U:

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & -4t & 1 \\ t^2 & 2t & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ \\ R_3 \leftarrow R_3 - R_1 - R_2 \\ R_4 \leftarrow R_4 - t^2 R_1 - R_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ \hline 0 & -4t+2 & 0 \\ 0 & 2t+4t^2-2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2t-1=0 \\ 2t^2+t-1=0 \end{cases}$$

ottenendo come unica soluzione $t = \frac{1}{2}$.

Soluzione dell'esercizio 3 (i) Chiamiamo A_k la matrice associata a Q al variare di $k \in \mathbb{R}$. Allora

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il rango di Q al variare di $k \in \mathbb{R}$ è equivalente a considerare il rango della matrice A_k, quindi possiamo considerare il determinante della matrice: $\mathrm{Det}(A_k) = k^2$. Quindi se $k \neq 0$, la matrice A_k ha determinante diverso da 0 e Q ha rango massimo, altrimenti se $k = 0$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2. Allora $\mathrm{Rk}(Q) = \begin{cases} 4 & \text{se } k \neq 0, \\ 2 & \text{se } k = 0. \end{cases}$

Per calcolare la segnatura di Q al variare di k, calcoliamo gli autovalori di A_k. Cerchiamo quindi il suo polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = |A_k - \lambda I_4| = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & k \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ k & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = (\lambda^2 - k^2)(\lambda^2 - 1).$$

Allora gli autovalori della matrice sono $\{+1, -1, +k, -k\}$, che corrispondono alla segnatura:

$$(p,q) = \begin{cases} (2,2) & \text{se } k \neq 0, \\ (1,1) & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

(ii) La matrice A_k è simmetrica, quindi, per il teorema spettrale, è sempre diagonalizzabile tramite una base ortonormale. Per calcolare una base con queste caratteristiche ricaviamo una base ortonormale formata da autovettori di $\mathbb{R}^4$. Abbiamo tre casi distinti:

- $k = 0$
  In questo caso,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ed ha autovalori $\{0 \text{ (con molteplicità algebrica 2)}, 1, -1\}$. L'autospazio $V_0 = \mathrm{Ker}(A_0)$ corrisponde ai vettori che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi una base per $\mathrm{Ker}(A_0) = V_0$ è

$$V_0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

che ha quindi dimensione 2. Mentre per quanto riguarda gli altri due autospazi V_{-1} e V_1:

$$V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{e} \qquad V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

una base ortonormale diagonalizzante per A_0 è quindi data da tutti i vettori diagonalizzante normalizzato, poiché autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali e i due vettori di V_0 sono ortonormali per costruzione. Quindi la base cercata è:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La forma quadratica si scriverà, in questa base, come $Q(x', y', z', t') = -z'^2 + t'^2$.

- $k = \pm 1$

  Supponiamo $k = 1$. In questo caso

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  e gli autovalori sono $\{1, -1\}$ entrambi con molteplicità algebrica 2. Dobbiamo quindi trovare una base per V_1 e V_{-1}. I vettori di V_{-1} soddisfano il sistema

$$\begin{cases} x + t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

  Quindi

$$V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

  che sono ortogonali. Analogamente i vettori di V_1 soddisfano

$$\begin{cases} x - t = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

  E quindi

$$V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

  che anche in questo caso sono ortogonali. Una base ortonormale diagonalizzante è quindi data dagli autovettori normalizzati:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'espressione della forma quadratica rispetto a questa base sarà

$$Q(x', y', z', t') = x'^2 + y'^2 - z'^2 - t'^2.$$

In modo analogo si procede per il caso $k = -1$: la segnatura non cambia.

- Se $k \neq 0$ e $k \neq \pm 1$
In questo caso abbiamo tutti autovalori distinti, allora gli autovettori corrispondenti saranno automaticamente ortogonali e una base ortonormale diagonalizzante è data dall'insieme di essi normalizzati. L'autospazio V_k corrisponde ai vettori che soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

V_{-k} a quelli che soddisfano

$$\begin{cases} x = -t \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

V_1 a quelli che soddisfano

$$\begin{cases} x = 0 \\ t = 0 \\ z = y \end{cases}$$

ed infine i vettori in V_{-1} soddisfano

$$\begin{cases} x = 0 \\ t = 0 \\ z = -y \end{cases} \quad .$$

Quello che otteniamo è che:

$$V_k = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_{-k} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Quindi abbiamo che la base ortonormale è data da:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

L'espressione della forma quadratica rispetto a questa base sarà

$$Q(x', y', z', t') = kx'^2 - ky'^2 - z'^2 + t'^2.$$

(iii) Notiamo che i vettori di W sono linearmente indipendenti, allora $\mathrm{Dim}(W) = 3$ e abbiamo due casi:

- Se $k \neq 0$
In questo caso la forma quadratica Q è non degenere, quindi $\mathrm{Dim}(\mathbb{R}^4) = \mathrm{Dim}(W) + \mathrm{Dim}(W^\perp)$.
Allora $\mathrm{Dim}(W^\perp) = \mathrm{Dim}(\mathbb{R}^4) - \mathrm{Dim}(W) = 4 - 3 = 1$.

- Se $k = 0$
  In questo caso abbiamo una forma quadratica degenere, allora dati $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$, i vettori della base di W, e $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, un generico vettore in $\mathbb{R}^4$, imponiamo che questo sia ortogonale, rispetto a B, ai vettori della base scelta. Questo equivale ad assumere che $\mathbf{x}^t A_0 \mathbf{v_1}$, $\mathbf{x}^t A_0 \mathbf{v_2}$ e $\mathbf{x}^t A_0 \mathbf{v_3}$ siano tutti nulli. In questo modo otteniamo un sistema di equazioni soddisfato da tutti e soli i vettori in $W^\perp$.
  Nello specifico avremo

$$(x, y, z, t)A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4,$$

$$(x, y, z, t)A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = z = 0,$$

$$(x, y, z, t)A_0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = y - z = 0.$$

  Quindi

$$W^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

  e $\mathrm{Dim}(W^\perp) = 2$.

Soluzione dell'esercizio 4
Consideriamo la cubica

$$f = y^3 - 7 + 15x - 3x^2 + 2x^3 = 0.$$

La chiusura proiettiva è la cubica

$$\overline{\mathcal{C}} : F = x_2^3 - 7x_0^3 + 15x_1x_0^2 - 3x_1^2x_0 + 2x_1^3 = 0.$$

La sua hessiana è quindi una cubica con equazione $\det(H(F)) = 0$ dove $H(F)$ è la matrice hessiana di F. Calcoliamo quindi la matrice hessiana. Abbiamo

$$\nabla(F) = \begin{bmatrix} -21x_0^2 + 30x_0x_1 - 3x_1^2 \\ 15x_0^2 - 6x_0x_1 + 6x_1^2 \\ 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$H(F) = \begin{bmatrix} -42x_0 + 30x_1 & 30x_0 - 6x_1 & 0 \\ 30x_0 - 6x_1 & -6x_0 + 12x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 6x_2 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} -7x_0 + 5x_1 & 5x_0 - x_1 & 0 \\ 5x_0 - x_1 & -x_0 + 2x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{bmatrix}$$

il cui determinante è

$$6^3x_2((-7x_0 + 5x_1)(-x_0 + 2x_1) - (5x_0 - x_1)^2) = 6^3x_2(7x_0^2 + 10x_1^2 - 19x_0x_1 - 25x_0^2 - x_1^2 + 10x_0x_1) =$$

$$= 6^3x_2(-18x_1^2 - 9x_0x_1 + 9x_1^2) = 9 \cdot 6^3x_2(x_1^2 - x_0x_1 - 2x_0^2) = 9 \cdot 6^3x_2(x_1 + x_0)(x_1 - 2x_0)$$

quindi la curva hessiana è

$$\overline{\mathcal{D}} : x_2(x_1 + x_0)(x_1 - 2x_0) = 0$$

e le sue componenti sono le tre rette

$$x_2 = 0 \qquad x_1 + x_0 = 0 \qquad x_1 - 2x_0 = 0.$$

Ora concentriamoci sul punto P. Prima di tutto, osserviamo che $P \in \overline{\mathcal{C}}$ poichè annulla l'equazione della cubica. Se valutiamo il gradiente nel punto P otteniamo che il punto è non singolare poichè, ad esempio, l'ultima derivata non si annulla in P. Quindi $m_{\overline{\mathcal{C}}}(P) = 1$. Più precisamente

$$\nabla(F)|_P = (-54, 27, 27)$$

quindi

$$t : 2x_0 - x_1 - x_2 = 0$$

è la retta tangente alla cubica nel punto P. Siccome il punto P soddisfa anche l'equazione $x_0 + x_1 = 0$ (che descrive una delle componenti della curva hessiana) avremo che $P \in \overline{\mathcal{D}}$ e, di conseguenza, che P è un punto di flesso. Quindi, sapendo che la curva è una cubica, avremo

$$I(\overline{\mathcal{C}}, t; P) = 3.$$

I punti all'infinito di $\mathcal{C}$ si ricavano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} F(x_0, x_1, x_2) = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2^3 + 2x_1^3 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2^3 = -2x_1^3 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

le cui uniche soluzioni reali sono date dalla soluzione di $\sqrt[3]{2}x_1 + x_2 = x_0 = 0$. Quindi il punto che stiamo cercando è $Q = [0, 1, -\sqrt[3]{2}]$. Gli altri punti all'infinito sono

$$Q_\pm = \left[0, 1, \sqrt[3]{2}\frac{1 \mp i\sqrt{3}}{2}\right].$$

La retta che dobbiamo ricavare sarà quindi scrivibile in forma parametrica come

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + \sqrt[3]{2}t \end{cases}$$

Si tratta quindi della retta $y - 4 - 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2}x = 0$.

Soluzione dell'esercizio 5
Si veda la soluzione dell'esercizio 3.

Soluzione dell'esercizio 6
L'annullamento e la simmetria sono ovvie dalla definizione. Bisogna dimostrare la disuguaglianza triangolare. Se i tre punti sono sulla semiretta verticale con origine sull'asse x la funzione d coincide con la distanza euclidea ristretta ai punti della semiretta (la cosa è ovvia dalla definizione di d) e quindi la disuguaglianza triangolare vale. Se tutti e tre i punti $P_i = (x_i, y_i)$ sono su semirette diverse si ha

$$d(P_1, P_3) = |y_1| + |y_3| + |x_3 - x_1| \leq |y_1| + |y_2| + |y_2| + |y_3| + |x_3 - x_1|.$$

Usando la disuguaglianza triangolare tra i reali abbiamo $|x_3 - x_1| \leq |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2|$ da cui deduciamo

$$d(P_1, P_3) =\leq |y_1| + |y_2| + |y_2| + |y_3| + |x_3 - x_1| + |x_2 - x_1| = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

Il caso in cui due punti sono sulla stessa semiretta e il terzo no si analizza in modo analogo.

Si consideri la palla aperta $B = B_r(O)$ di centro l'origine e raggio r. I punti della semiretta verticale passante per l'origine che appartengono a B sono tutti e soli quelli con ordinata minore di r. Se invece consideriamo la semiretta verticale con i punti di ascissa x_0, abbiamo che un punto $P = (x_0, y_0)$ sulla semiretta appartiene a B se e solo se $|x_0| + |y_0| < r$. Da questo si deduce che B coincide con il triangolo con vertici $(-r, 0), (r, 0)$ e $(0, r)$ (i punti sui lati obliqui non sono nella palla). Sia ora B la palla di centro $P = (0, 1)$ e raggio r. Supponiamo inizialmente $r \leq 1$. Un punto $Q = (x_0, y_0) \neq P$ che non sta sulla semiretta per $(0, 1)$ ha distanza da P uguale a $1 + |y_0| + |x_0|$ quindi non potrà mai appartenere a B. Per $r \leq 1$ si ha quindi che $B = \{0\} \times (1 - r, r + r)$. Supponiamo ora $r > 1$. Mostriamo che $B = B_r((0, 1)) = B_{r-1}((0, 0)) \cup (\{0\} \times [0, 1 + r))$. Che tutti i punti di $\{0\} \times [0, 1 + r))$ appartengano a B e che questi sono tutti e soli quelli della semiretta per P è chiaro. Se un punto $Q = (x_0, y_0)$ su un'altra semiretta appartiene a B allora $|x_0| + |y_1| + 1 < r$ e quindi

$$|x_0| + |y_1| < r - 1$$

che sono proprio i punti di $B_{r-1}((0, 0))$.

Dimostriamo che la successione $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ non è di Cauchy (e quindi non può avere limite). Supponiamo per assurdo che sia di Cauchy. Sia $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n, m > N$ si ha $d(P_n, P_m) < 1/2$. Per $n \neq m$ si ha che P_n e P_m sono su due semirette verticali distinte quindi

$$1/2 > d(P_n, P_m) = |1/n - 1/m| + |1| + |1| = 2 + |1/n - 1/m| > 2$$

che è assurdo. Di conseguenza la successione non è di Cauchy e non può avere limite in (X, d). La successione Q_n ha invece limite: il punto $(1, 0)$. Per dire che ha limite basta osservare che è contenuta in una semiretta per l'origine sulla quale abbiamo dimostrato che la distanza è quella euclidea.

Essendo (X, τ) uno spazio topologico metrizzabile si ha che è T_2. Non è compatto infatti la collezione di palle aperte

$$\{B_n(O)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

è un ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti.